105 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 105-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	A	C	B	B	A	C	D	C	A	B	D	A	D	A	A	B	C	B	D	C	C	A	B	D

1. (A) B 點坐標為 $(-2+2, 1-3)=(0,-2)$

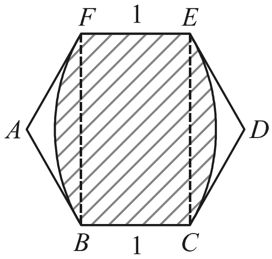
(B)(C) 由兩點式可得 L：$y+2=\dfrac{-2-1}{0+2}(x-0)$

$\Rightarrow 3x+2y+4=0$ 且 L 之斜率為 $-\dfrac{3}{2}$

(D) B 點左移 4 單位，上移 6 單位可得 $(0-4, -2+6)=(-4, 4)$

代入 L：$3x+2y+4=0$ 成立，故亦在 L 直線上

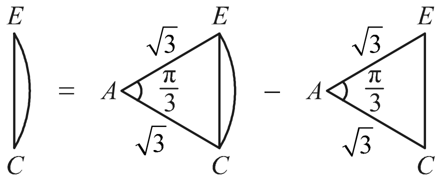
2.



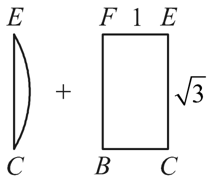
$\because \overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos120^\circ$

$=1+1-2\times1\times1\times(-\dfrac{1}{2})=3$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{3}$



$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}^2\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

所求 $=2\times$ 

$=2(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4})+1\times\sqrt{3}=\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\because \cos350^\circ=\cos(360^\circ-10^\circ)=\cos10^\circ$

$\sin550^\circ=\sin190^\circ=\sin(180^\circ+10^\circ)=-\sin10^\circ$

$\therefore A$ 點坐標為 $(\cos10^\circ, -\sin10^\circ)\in \text{IV}\Rightarrow \theta\in \text{IV}$

可得 $\tan\theta=\dfrac{-\sin10^\circ}{\cos10^\circ}=-\tan10^\circ$

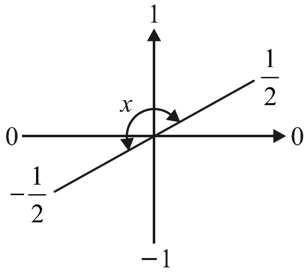
$=\tan(360^\circ-10^\circ)=\tan350^\circ$

$\therefore \theta$ 可為 350°及其所有同界角，故選(C)

4. 求式 $=\sin^2\dfrac{\pi}{8}+2\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{\pi}{8}$

$=1+\sin\dfrac{\pi}{4}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

5. $\because \dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{7\pi}{6}$



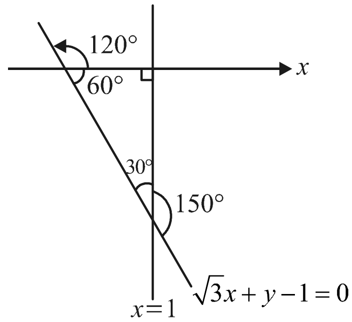
$\therefore -\dfrac{1}{2}\le\sin x\le1\Rightarrow 0\le\sin^2x\le1$

故當 $\sin^2x=0$ 時，$f(x)=1-3\sin^2$ 有最大值 1

6. $\because x=1$ 斜率不存在 $\Rightarrow$ 斜角為 90°

又 $\sqrt{3}x+y-1=0\Rightarrow$ 斜率 $=-\sqrt{3}=\tan\theta\Rightarrow\theta=120^\circ$

$\therefore$ 斜角 $\theta=120^\circ$，如下圖可知夾角為 30°、150°

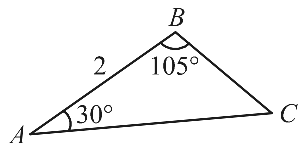


7. $\angle C=180^\circ-30^\circ-105^\circ=45^\circ$

由正弦定理

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin30^\circ}=\dfrac{2}{\sin45^\circ}$

$\Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}$



8. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

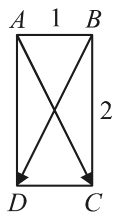
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})$

$=|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2$

$=2^2-1^2=3$



9. 設 $f(x)$ 除以 $2x^2+2x-4$ 之商式為 $Q(x)$，餘式為 $ax+b$

由除法原理知 $f(x)=(2x^2+2x-4)Q(x)+ax+b$

$\Rightarrow f(x)=2(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$ ……①

$\because f(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式爲 $4 \Rightarrow f(1)=4$

又 $f(x)$ 除以 $x+2$ 之餘式爲 $1 \Rightarrow f(-2)=1$

代入①可得 $\begin{cases} a+b=4 \\ -2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=1$，$b=3$

故餘式爲 $x+3$

10. 原式同乘 $(x-2)(x+1)^2$ 可得

$x^2+6x+2=A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)$

令 $x=2$ 代入得 $18=9A \Rightarrow A=2$

令 $x=-1$ 代入得 $-3=-3C \Rightarrow C=1$

令 $x=0$ 代入得 $2=A-2B-2C$

$\Rightarrow 2=2-2B-2 \Rightarrow B=-1$

11. $\because \sqrt{12+4\sqrt{8}}=\sqrt{12+2\sqrt{8\times 4}}=\sqrt{(\sqrt{8}+\sqrt{4})^2}$

$=\sqrt{8}+\sqrt{4}=2\sqrt{2}+2$

$\fallingdotseq 2\times 1.414+2=4.828$

$\therefore \sqrt{12+4\sqrt{8}}$ 之整數部分爲 4

小數部分爲 $(2\sqrt{2}+2)-4=2\sqrt{2}-2$

12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 9 \\ 4 & -3 & 45 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{降階展開}]{\text{由第一列}} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -3 & 45 \end{vmatrix}$

(−1) (−1)

$=45-(-27)=72$

【另解】由凡得夢行列式

原式 $=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 7 \\ (-2)^2 & (-1)^2 & 7^2 \end{vmatrix}$

$=(-2+1)(-1-7)(7+2)=72$

13. $\because L_1 // L_2 \Rightarrow \dfrac{3}{a+8}=\dfrac{-a}{4}\neq\dfrac{1}{-a}$

由 $\dfrac{3}{a+8}=\dfrac{-a}{4} \Rightarrow a^2+8a+12=0 \Rightarrow (a+2)(a+6)=0$

$\Rightarrow a=-2$ 或 -6

(1) 當 $a=-2$，係數比 $\dfrac{3}{6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow L_1=L_2$

(2) 當 $a=-6$，係數比 $\dfrac{3}{2}=\dfrac{6}{4}\neq\dfrac{1}{6} \Rightarrow L_1 // L_2$

可知 $a=-6$，故選(A)

14. $\because Z_1=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$

$Z_2=2(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)$

$\therefore Z_1^{\,2}=2(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$

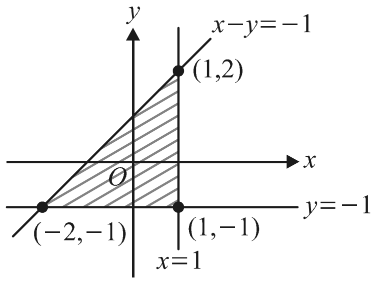
$Z_2^{\,3}=8(\cos 900^\circ+i\sin 900^\circ)=8(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$

故 $\dfrac{Z_1^{\,2}}{Z_2^{\,3}}=\dfrac{2(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)}{8(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)}$

$=\dfrac{1}{4}[\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)]$

$=\dfrac{1}{4}(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)$

15. 畫可行解區域如下



令 $f(x,y)=x+2y$，分別以各頂點代入得

$f(1,2)=1+4=5$

$f(-2,-1)=-2-2=-4$

$f(1,-1)=1-2=-1$

故最大值爲 5

16. $\because$ 等比數列每 n 項和亦成等比

$\therefore a_1+a_2+a_3$，$a_4+a_5+a_6$，$a_7+a_8+a_9$ 亦成等比

即 $\sum_{n=1}^{3}a_n$ 、 $\sum_{n=4}^{6}a_n$ 、 $\sum_{n=7}^{9}a_n$ 成等比

由 $\sum_{n=4}^{6}a_n=\sum_{n=1}^{6}a_n-\sum_{n=1}^{3}a_n=15-5=10$

可得每 3 數和所成之新數列的公比爲 $\dfrac{\sum_{n=4}^{6}a_n}{\sum_{n=1}^{3}a_n}=\dfrac{10}{5}=2$

$\therefore \sum_{n=7}^{9}a_n=2\times\sum_{n=4}^{6}a_n=2\times 10=20$

故 $\sum_{n=1}^{9}a_n=\sum_{n=1}^{6}a_n+\sum_{n=7}^{9}a_n=15+20=35$

【另解】

設公比爲 r

由 $S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$S_3=\sum_{n=1}^{3}a_n=5 \Rightarrow \dfrac{a_1(1-r^3)}{1-r}=5$ ……①

$S_6=\sum_{n=1}^{6}a_n=15 \Rightarrow \dfrac{a_1(1-r^6)}{1-r}=15$ ……②

將 $\dfrac{①}{②} \Rightarrow \dfrac{1-r^3}{1-r^6}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1-r^3}{(1-r^3)(1+r^3)}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{1+r^3}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow 1+r^3=3 \Rightarrow r^3=2$ 代入①

得 $\dfrac{a_1(1-2)}{1-r}=5 \Rightarrow \dfrac{a_1}{1-r}=-5$

所求 $=S_9=\dfrac{a_1(1-r^9)}{1-r}=\dfrac{a_1[1-(r^3)^3]}{1-r}=-5(1-2^3)=35$

17. $\because a=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$

$b=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$

$c=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}=2^{\frac{7}{6}}$

$\because$ 指數 $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}>\frac{7}{6}$，又底數爲 $2>1$

故 $2^{\frac{3}{2}}>2^{\frac{4}{3}}>2^{\frac{7}{6}}$，即 $b>a>c$

18. $\because \log_2 x+\log_4 y=6 \Rightarrow \log_4 x^2+\log_4 y=6$

$\Rightarrow \log_4 x^2 y=6 \Rightarrow x^2 y=4^6$

由算幾不等式 $\frac{x+x+y}{3}\geq\sqrt[3]{x\cdot x\cdot y}$

$\Rightarrow \frac{2x+y}{3}\geq\sqrt[3]{4^6}=16$

$\Rightarrow \frac{2x+y}{3}\geq 16 \Rightarrow 2x+y\geq 48$

檢驗等式成立時，需 $x=x=y$，又 $2x+y=48$

可得 $3x=48 \Rightarrow x=16$，$y=16$ 確實達到等號成立條件

故 $2x+y$ 的最小值爲 48

19. 原式 $\Rightarrow \log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_{81}x)]>\log_2 2$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_{81}x)>2$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_{81}x)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_{81}x)>\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow 0<\log_{81}x<\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \log_{81}1<\log_{81}x<\log_{81}81^{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow \log_{81}1<\log_{81}x<\log_{81}3$

$\Rightarrow 1<x<3$

20. 所求 $=$ (任意排) $-$ (A 排首) $-$ (B 排二) $+$ (A 排首且 B 排二)

$=5!-4!-4!+3!=120-24-24+6=78$

21. $(x^2-\frac{1}{x})^5=\sum_{k=1}^{5}C_k^5(x^2)^k(-\frac{1}{x})^{5-k}=\sum_{k=1}^{5}C_k^5(-1)^{5-k}x^{3k-5}$

令 $3k-5=1 \Rightarrow k=2$

故所求爲 $C_2^5(-1)^{5-2}=-10$

22. $n(\mathrm{S})=3^3=27$

(A) 所求 $=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$（3：甲可出刀、石或布而贏）

(B) 所求 $=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$（3：甲、乙同時出刀、石或布而贏）

(C) 所求 $=\frac{3+3!}{27}=\frac{1}{3}$（3：3人出同一種類；3!：3人皆出不同種類）

(D) 所求 $=\frac{C_2^3\times 3}{27}=\frac{1}{3}$（$C_2^3$：3人中選2人贏；3：贏者可出刀、石或布）

故(C)爲錯誤

23. 設出現奇數點 1、3、5 之機率分別爲 P

則出現偶數點 2、4、6 之機率分別爲 $2P$

且 $P+P+P+2P+2P+2P=1 \Rightarrow 9P=1 \Rightarrow P=\frac{1}{9}$

故擲此骰子一次之數學期望值爲

$1\times\frac{1}{9}+3\times\frac{1}{9}+5\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+4\times\frac{2}{9}+6\times\frac{2}{9}=\frac{11}{3}$

24. $\because \mu=\frac{1}{10}(1+1+2+2+3+3+4+4+5+5)=3$

$\therefore \sigma^2=\frac{1}{10}[2(1-3)^2+2(2-3)^2+2(3-3)^2+2(4-3)^2+2(5-3)^2]$

$=2$

25. $\because \frac{80-70}{5}=2$，$\therefore$ 所求即 $\mu+2\sigma$

以上之人數約佔 $1000\times\frac{1-2\times(13.5\%+34\%)}{2}$

$=1000\times\frac{1-95\%}{2}=1000\times 0.025=25$ 人