105 學年度四技二專第二次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷　105-2-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	C	C	C	A	D	B	C	D	A	B	A	D	C	A	B	B	A	D	C	D	B	B	A	D

1. 直線通過第一、二、三象限

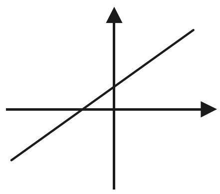
$\Rightarrow$ 直線斜率為正，x 截距為負，y 截距為正

又斜率為 $-\dfrac{a}{b}$，x 截距為 $-\dfrac{c}{a}$，y 截距為 $-\dfrac{c}{b}$

$\Rightarrow -\dfrac{a}{b}>0$，$-\dfrac{c}{a}<0$，$-\dfrac{c}{b}>0$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b}<0$，$\dfrac{c}{a}>0$，$\dfrac{c}{b}<0$

$\Rightarrow ab<0$，$ac>0$，$bc<0$



2. $(\dfrac{-k}{k+3},\dfrac{2}{k+3})$ 在第一象限

$\Rightarrow \dfrac{-k}{k+3}>0$ 且 $\dfrac{2}{k+3}>0$

$\Rightarrow k+3>0$ 且 $-k>0$

$\Rightarrow k>-3$ 且 $k<0$

$\Rightarrow -3<k<0$

3. 令山高為 h

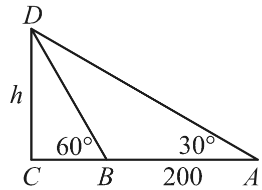
由 ΔBCD 可知 $\overline{BC}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

由 ΔACD 得 $\dfrac{h}{200+\dfrac{h}{\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{3}h=200+\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{3}h=200+\dfrac{\sqrt{3}h}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{2\sqrt{3}h}{3}=200 \Rightarrow h=100\sqrt{3}$



4. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$=-(2,-3)+(-1,1)=(-3,4)$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

$\therefore$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 同方向的單位向量

$=\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{(-3,4)}{5}=(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5})$

5. $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(m,3)$

$\because$ $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 互相垂直

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow (-3,4)\cdot(m,3)=0$

$\Rightarrow -3m+12=0 \Rightarrow m=4$

6. $\overline{OP}$ 最短時，此時 $\overline{OP}\perp L$

則 $\overline{OP}=\dfrac{|0+0+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 3 & 18 & 27 \\ 6 & 27 & 9 \end{vmatrix}$

[第一列×(−3) 加到第二列；第一列×(−6) 加到第三列]

$=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & -63 \end{vmatrix}$

[以第一行降階]

$=1\times\begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & -63 \end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ -9 & -63 \end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$

$=0\times(-63)-(-9)\times(-9)=-81$

8. $\because$ 方程組除了 $(0,0)$ 外，尚有其他解

$\therefore$ 方程組 $\begin{cases}(a+1)x-4y=0\\2x+(1-a)y=0\end{cases}$ 有無限多組解

$\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} a+1 & -4 \\ 2 & 1-a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (a+1)(1-a)-(-4)\times 2=0$

$\Rightarrow 1-a^2+8=0 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3$ ($\because$ a 為正整數)

9. $|5-2x|\le 7 \Rightarrow |2x-5|\le 7 \Rightarrow -7\le 2x-5\le 7$

$\Rightarrow -2\le 2x\le 12 \Rightarrow -1\le x\le 6$

10. $\because$ 解集合為 $\{x\,|\,x<0$ 或 $x>3$，x 為實數$\}$

$\therefore$ 二次不等式為 $x(x-3)>0 \Rightarrow x^2-3x>0$

$\Rightarrow -x^2+3x<0 \Rightarrow -2x^2+6x<0$

故 $a=-2$

11. $\cos 31^\circ=\sin 59^\circ=\dfrac{\sin 59^\circ}{1}$

$\cot 31^\circ=\tan 59^\circ=\dfrac{\sin 59^\circ}{\cos 59^\circ}$

$\csc 31^\circ=\sec 59^\circ=\dfrac{1}{\cos 59^\circ}$

$\because 0<\cos 59^\circ<1$，$\therefore \sin 59^\circ<\tan 59^\circ$

又 $0<\sin 59^\circ<1$，$\therefore \tan 59^\circ<\sec 59^\circ$

則 $\sin 59^\circ<\tan 59^\circ<\sec 59^\circ$

故 $\cos 31^\circ<\cot 31^\circ<\csc 31^\circ$

12. $\dfrac{5x^3-5x^2+6x-2}{(x-1)(x^3+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$

$\Rightarrow 5x^3-5x^2+6x-2=A(x-1)(x^2-x+1)$

$+B(x+1)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)$

$\Rightarrow 5x^3-5x^2+6x-2=A(x^3-2x^2+2x-1)+B(x^3+1)$

$+(Cx^3+Dx^2-Cx-D)$

$\Rightarrow 5x^3-5x^2+6x-2=(A+B+C)x^3+(-2A+D)x^2$

$+(2A-C)x+(-A+B-D)$

$\Rightarrow\begin{cases}A+B+C=5\\-2A+D=-5\\2A-C=6\\-A+B-D=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\B=2\\C=0\\D=1\end{cases}$

13. $x(x-2)(x+4)(x+6)-45=0$

$\Rightarrow x(x+4)(x-2)(x+6)-45=0$

$\Rightarrow (x^2+4x)(x^2+4x-12)-45=0$

$\Rightarrow (x^2+4x)^2-12(x^2+4x)-45=0$

$\Rightarrow (x^2+4x+3)(x^2+4x-15)=0$

$\Rightarrow (x+1)(x+3)(x^2+4x-15)=0$

$\Rightarrow x=-1$，-3，$-2\pm\sqrt{19}$

故整數解的和為 $-1+(-3)=-4$

14. $\begin{vmatrix}3&2&4-k\\3&2-k&4\\3-k&2&4\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\begin{vmatrix}9-k&2&4-k\\9-k&2-k&4\\9-k&2&4\end{vmatrix}=0$

[將第二、三行加到第一行]

$\Rightarrow(9-k)\begin{vmatrix}1&2&4-k\\1&2-k&4\\1&2&4\end{vmatrix}=0$

[第一行提公因式 $(9-k)$]

$\Rightarrow(9-k)\begin{vmatrix}1&0&-k\\1&-k&0\\1&0&0\end{vmatrix}=0$

[第一行 $\times(-2)$ 加到第二行；第一行 $\times(-4)$ 加到第三行]

$\Rightarrow -k^2(9-k)=0\Rightarrow k=9$ ($\because k$ 為正整數)

15. $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$Z_k=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{3}$，其中 $k=0$，1，2

$Z_0=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$Z_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$Z_2=\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

16. 設 $P(t\,,t^2)$

$\overline{PQ}=\sqrt{(t-0)^2+(t^2-1)^2}=\sqrt{t^2+t^4-2t^2+1}$

$=\sqrt{t^4-t^2+1}=\sqrt{(t^4-t^2+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}=\sqrt{(t^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

因此，當 $t^2=\dfrac{1}{2}$ 時，$\overline{PQ}$ 有最小值 $\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

17. 由正弦定理得

$a：b：c=\sin A：\sin B：\sin C=2：3：4$

由餘弦定理得 $\cos A：\cos B：\cos C$

$=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}：\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}：\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\dfrac{3^2+4^2-2^2}{2\times3\times4}：\dfrac{2^2+4^2-3^2}{2\times2\times4}：\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}$

$=\dfrac{21}{24}：\dfrac{11}{16}：\dfrac{-3}{12}=14：11：(-4)$

18. 令 $f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(1)=1\Rightarrow a+b=1$，$f(2)=3\Rightarrow 2a+b=3$

解得 $a=2$，$b=-1$，故 $a+b=2+(-1)=1$

19. $A(2\,,300°)$，$B(2\,,-\dfrac{11}{3}\pi)=(2\,,60°)$

可得 $\angle AOB=60°+60°=120°$

由餘弦定理可得

$\overline{AB}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120°=4+4+4=12$

$\Rightarrow\overline{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

20. 設方程式之另一根為 k

兩根和：$k+(2-i)=-\dfrac{-3}{1}=3\Rightarrow k=1+i$

兩根乘積：$(2-i)(1+i)=\dfrac{a}{1}\Rightarrow a=2+2i-i-i^2=3+i$

21. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

$f(x)=x^4+4x^3+7x^2+6x-1=(x+1)^4+(x+1)^2-3$

$\therefore f(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1})=f(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^4+(\sqrt{2})^2-3=3$

22. $\alpha+\beta=-6$，$\alpha\beta=4\Rightarrow\alpha<0$ 且 $\beta<0$

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=-6+2\sqrt{4}=-2$

23. $x>1$，$x+\dfrac{1}{x-1}+2=x-1+\dfrac{1}{x-1}+3$

由算幾不等式：$\dfrac{x-1+\frac{1}{x-1}}{2}\geq\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}}$

$\Rightarrow x-1+\dfrac{1}{x-1}\geq2\Rightarrow x+\dfrac{1}{x-1}+2\geq5$

故 $x+\dfrac{1}{x-1}+2$ 的最小值為 5

24. $f(x)=\cos(2x+\dfrac{2}{3}\pi)-2\sin^2x+1$

$=\cos2x\cos\dfrac{2\pi}{3}-\sin2x\sin\dfrac{2\pi}{3}+1-2\sin^2x$

$=-\dfrac{1}{2}\cos2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\cos2x$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\dfrac{1}{2}\cos2x$

$\therefore$最大值為 $\sqrt{(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^2}=1$

25. $\because L$ 通過原點，且斜率爲 m

$\therefore$令 L 方程式爲 $y = mx \Rightarrow mx - y = 0$

又 $P(3,-2)$ 、 $Q(1,-1)$ 在 L 的不同側

則 $(3m+2)(m+1) < 0 \Rightarrow -1 < m < -\dfrac{2}{3}$