103 學年度四技二專第五次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 103-5-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	D	C	C	D	A	B	C	B	A	D	A	D	B	A	C	B	C	B	D	D	B	D	C	A

1. $|3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})}=\sqrt{9\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+6\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}}$
$=\sqrt{9\times9+6\times0+4}=\sqrt{85}$
2. $x^3+12x^2+ax+7=(x+3)(x^2+bx+2)+c$
比對係數得 $\begin{cases}12=3+b\\a=3b+2\\7=6+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=29\\b=9\\c=1\end{cases}\Rightarrow a+b+c=39$
3. $f(x)=(x-a)(x-b)Q_1(x)+3x+a$
$=(x-a)(x-c)Q_2(x)+x+6$
$\Rightarrow f(a)=3a+a=a+6\Rightarrow 3a=6\Rightarrow a=2$
代入 $f(a)=a+6$ 得 $f(2)=8$
$\Rightarrow f(x)+x^2f(x)$ 除以 $2x-2a$ 餘式 $=f(a)+a^2f(a)$
$=f(2)+2^2f(2)=8+4\times8=40$
4. $x^2+2x-18=0$ 兩根爲 α 、 β
由根與係數的關係知 $\alpha+\beta=-2$ ， $\alpha\beta=-18$
$\Rightarrow(\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha\beta})^2=(\sqrt{-2}+\sqrt{-18})^2=(\sqrt{2}i+\sqrt{18}i)^2$
$=(\sqrt{2}i+3\sqrt{2}i)^2=(4\sqrt{2}i)^2=32i^2=-32$
5. $6x+2ay=2b$ 與 $6x+8y=19$ 平行 $\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4$
兩平行線距離 $=\dfrac{|2b-19|}{\sqrt{6^2+8^2}}=2\Rightarrow 2b-19=\pm20$
$\Rightarrow 2b=39$ 或 $-1\Rightarrow$ 正數 $b=\dfrac{39}{2}\Rightarrow a+b=4+\dfrac{39}{2}=\dfrac{47}{2}$
6. $\dfrac{(1+99)\times99}{2}=\dfrac{100\times99}{2}=4950$
7. $(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+i})^{20}=[\dfrac{2(\cos300^\circ+i\sin300^\circ)}{\sqrt{2}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)}]^{20}$
$=[\sqrt{2}(\cos255^\circ+i\sin255^\circ)]^{20}$
$=2^{10}(\cos5100^\circ+i\sin5100^\circ)=1024(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)$
$=1024(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)=512+512\sqrt{3}i$
8. $2\sin^2x+\cos x+3=2(1-\cos^2x)+\cos x+3$
$=-2\cos^2x+\cos x+5=-2(\cos x-\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{41}{8}$
當 $\cos x=\dfrac{1}{4}\Rightarrow$ 最大值 $M=\dfrac{41}{8}$
當 $\cos x=-1\Rightarrow$ 最小值 $N=2\Rightarrow M+N=\dfrac{57}{8}$
9. θ 是第二象限角 $\Rightarrow 0<\sin\theta<1$
$(3\sin\theta+1)(\sin\theta-1)(4\sin\theta-1)=0$
$\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ (合於 $0<\sin\theta<1$)
$\Rightarrow\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta=\dfrac{-1}{4}$
10. $\cos A=\dfrac{1}{3}$ ， $\overline{AC}=b=6$ ， $\overline{AB}=c=9$
$\Rightarrow a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{36+81-2\times6\times9\times\dfrac{1}{3}}$
$=\sqrt{81}=9$
11. α 爲第二象限角 $\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{12}{13}\Rightarrow r=13$ ， $y=12$
$\Rightarrow x=-5\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{-5}{13}$ ， $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$
β 爲第三象限角 $\Rightarrow\tan\beta=\dfrac{4}{3}\Rightarrow x=-3$ ， $y=-4$
$\Rightarrow r=5\Rightarrow\cos B=\dfrac{-3}{5}$ ， $\sin\beta=\dfrac{-4}{5}$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$=\dfrac{-5}{13}\times\dfrac{-3}{5}-\dfrac{12}{13}\times\dfrac{-4}{5}=\dfrac{63}{65}$
12. $\dfrac{7!}{3!2!}=420$
13. $\begin{vmatrix}a_1&b_1+2d_1&c_1\\a_2&b_2+2d_2&c_2\\a_3&b_3+2d_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&2d_1&c_1\\a_2&2d_2&c_2\\a_3&2d_3&c_3\end{vmatrix}$
$\Rightarrow10=6+2\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}=2$
$\Rightarrow y=\dfrac{\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$
14. n (任選 3 人) $=C_3^{10}=\dfrac{10!}{3!7!}=120$
n (選 3 人恰含 1 對夫妻) $=C_1^5\times(C_1^4\times C_1^2)$
$=5\times4\times2=40$
$\Rightarrow P$ (選 3 人恰含 1 對夫妻) $=\dfrac{40}{120}=\dfrac{1}{3}$
15. 平行四邊形 $ABCD\Rightarrow\overline{AC}$ 中點 $=\overline{BD}$ 中點

令 $D(x\,,\,y)\Rightarrow(\frac{-2+3}{2},\frac{3+2}{2})=(\frac{5+x}{2},\frac{4+y}{2})$

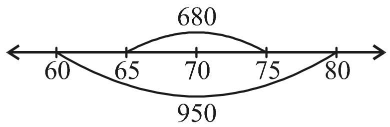
$\Rightarrow x=-4$ ，$y=1\Rightarrow D(-4\,,1)$

$\Rightarrow\Delta ABC$ 重心 $G=(\frac{-2+5+3}{3},\frac{3+4+2}{3})=(2\,,3)$

$\Rightarrow m_{GD}=\frac{3-1}{2-(-4)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

16. $68\%-95\%-99.7\%$ 法則

1000 人$\Rightarrow 680-950-997$ 法則



75~80$\Rightarrow(950-680)\div 2=135$

17. $(x+x^{-1})^2=x^2+2+x^{-2}\Rightarrow 20=x^2+2+x^{-2}$

得 $x^2+x^{-2}=18$

18. $\log 6^{20}=20\times\log(2\times 3)=20(\log 2+\log 3)$

$=20(0.3010+0.4771)=20\times 0.7781=15.562$

$\Rightarrow\log 6^{20}$ 首數是 15$\Rightarrow 6^{20}$ 是 16 位數

19. kx^2+2x+k 恆負$\Rightarrow\begin{cases}k<0\\2^2-4k\cdot k<0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}k<0\\4(1+k)(1-k)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k<0\\(k+1)(k-1)>0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}k<0\\k<-1\text{或}k>1\end{cases}\Rightarrow k<-1$

20. 焦點 $F(5\,,3)$ ，準線 $3x+4y-2=0$

焦點到準線距離$=\frac{|\,3\times 5+4\times 3-2\,|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5$

$=2$ 倍焦距$\Rightarrow$ 焦距$=\frac{5}{2}$

21. 圓：$(x+1)^2+(y+2)^2=25\Rightarrow$ 圓心 $O(-1\,,-2)$

半徑 $r=5$ ，L ：$3x+4y-4=0$

$\Rightarrow d=$ 圓心 O 到 L 之距離$=\frac{|\,3\times(-1)+4\times(-2)-4\,|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

$\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{5^2-3^2}=8$

ΔABC 最大面積$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times(d+r)=\frac{1}{2}\times 8\times(3+5)=32$

22. $f(x)=x^5-74x+5\Rightarrow f'(x)=5x^4-74$

$\lim_{x\to 2}[\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}]=f'(2)\times\frac{1}{4}$

$=(5\times 2^4-74)\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

23. $f(x)=\frac{2x-5}{x+6}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-5)'(x+6)-(2x-5)(x+6)'}{(x+6)^2}$

$=\frac{2(x+6)-(2x-5)}{(x+6)^2}=\frac{17}{(x+6)^2}\Rightarrow f'(3)=\frac{17}{81}$

24. $\int_{-2}^{3}|\,x+1\,|dx=\int_{-2}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{3}(x+1)dx$

$=(\frac{-x^2}{2}-x)\,|_{-2}^{-1}+(\frac{x^2}{2}+x)\,|_{-1}^{3}=[(\frac{-1}{2}+1)-(-2+2)]$

$+[(\frac{9}{2}+3)-(\frac{1}{2}-1)]=\frac{17}{2}$

25. 直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 過 $P(1\,,4)$ 得 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$ ，其中 $a>0$ ，$b>0$ ，求 $a+b$ 之最小值，由柯西不等式知

$[(\sqrt{\frac{1}{a}})^2+(\sqrt{\frac{4}{b}})^2][(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2]\geq(1+2)^2$

$\Rightarrow(\frac{1}{a}+\frac{4}{b})(a+b)\geq 9\Rightarrow 1\times(a+b)\geq 9$

得 $a+b\geq 9$ ，所以 $a+b$ 的最小値爲 9