2-5 》正弦定理與餘弦定理

重點一 正弦定理

1. $\triangle ABC$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$。

2. 正弦定理：

$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。

推論：$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$。

1 老師講解 **利用正弦定理求外接圓半徑** 學生練習

等腰 $\triangle ABC$ 中，$a=8$，$\angle B=\angle C=75^\circ$，試求 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑 R 之值。

想法 正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

$\triangle ABC$ 中，$c=12$，$\sin C=\dfrac{3}{5}$，試求 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑 R 之值。

2 老師講解　利用正弦定理求三內角之正弦比　學生練習

設 $\triangle ABC$ 之三邊長為 a、b、c，若 $(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$。

想法　正弦定理之推論：
$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$。

$\triangle ABC$ 中，若 $(a+b):(b+c):(c+a)=11:9:12$，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$。

C

2

3 老師講解　利用正弦定理求三內角之正弦比　學生練習

$\triangle ABC$ 中，若 $2a+b-5c=0$，$6a-4b-c=0$，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$。

想法　正弦定理之推論：
$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$。

$\triangle ABC$ 中，若 $(a-2b+2c)^2+(a+2b-3c)^2=0$，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$。

重點二 餘弦定理

1. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 或 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$。

2. $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ 或 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$。

3. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 或 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

觀念補充 //

$\triangle ABC$ 中，若 c 為最大邊：

❶ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，得 $c^2<a^2+b^2$ $\Leftrightarrow$ 銳角三角形。

❷ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$，得 $c^2=a^2+b^2$ $\Leftrightarrow$ 直角三角形（即畢氏定理）。

❸ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，得 $c^2>a^2+b^2$ $\Leftrightarrow$ 鈍角三角形。

4 老師講解 已知三邊比求角度 學生練習

$\triangle ABC$ 中，$a：b：c=3：2：\sqrt{7}$，試求 $\angle C$。

想法 餘弦定理：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

$\triangle ABC$ 中，$a：b：c=2：3：4$，試求 $\cos A$。

5 老師講解　利用餘弦定理求第三邊　學生練習

在 $\triangle ABC$ 中，若 $b=5$，$c=3$，$\angle A=60^\circ$，試求 a。

想法　餘弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$。

在 $\triangle ABC$ 中，若 $a=3$，$b=5$，$\angle C=120^\circ$，試求 c。

★表難題

★ 6 老師講解　由三邊長關係式求角度　學生練習

$\triangle ABC$ 中，若 $b^2-(c-a)^2=ac$，試求 $\angle B$。

想法　餘弦定理：$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$。

$\triangle ABC$ 中，若 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，試求 $\angle A$。

重點三　解三角形

三角形的三內角與三邊長合稱三角形的六要素，若已知其中三要素，欲求其餘三要素，稱為解三角形。

觀念補充 //

❶ 若題目給「角」條件多於「邊」，例如：AAS 型或 ASA 型　$\Rightarrow$　利用正弦定理。

❷ 若題目給「邊」條件多於「角」，例如：SAS 型或 SSS 型　$\Rightarrow$　利用餘弦定理。

❸ 若題目給一組對角對邊，例如：SSA 型　$\Rightarrow$　利用正弦定理。
但因平面幾何並無 SSA 全等性質，因此無法確定唯一三角形，故其結果可能有兩解、一解或無解。

7　老師講解　已知一組對角對邊解三角形　學生練習

$\triangle ABC$ 中，$a=15$，$b=5\sqrt{6}$，$\angle A=60^\circ$，試求 $\angle B$ 與 $\angle C$。

想法▸ 給一組對角對邊 $\angle A$ 及 a，利用正弦定理。

$\triangle ABC$ 中，若 $a=3\sqrt{3}$，$\angle A=30^\circ$，$b=6\sqrt{3}$，試求 $\angle C$ 及 c。

8 已知三邊長解三角形

老師講解

在 $\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}-1$，試求 $\angle B$ 及 $\angle A$。

想法　給三邊長（SSS），利用餘弦定理。

學生練習

$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=6$，$\overline{AB}=2\sqrt{7}$，試求 $\angle C$ 與 $\sin A$。

重點四　三角形面積之求法

Δ 表 $\triangle ABC$ 之面積

1. 給兩邊夾一角：

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$ 。

2. 給三邊長：

海龍公式，令 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，則 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

9 老師講解　兩邊夾一角求三角形面積　學生練習

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}=2$，$\overline{BC}=2\sqrt{3}$，$\angle A=120^\circ$，試求 $\angle C$ 與 $\triangle ABC$ 之面積。

想法 $\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}ab\sin C$。

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $c=5$，$b=8$，$\angle A=60^\circ$，試求 a 與 $\triangle ABC$ 之面積。

10 老師講解　海龍公式求三角形面積　學生練習

$\triangle ABC$ 之三邊長分別為 4、7、9，試求 $\triangle ABC$ 之面積。

想法 海龍公式 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

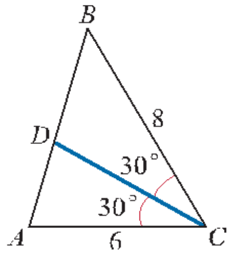
$\triangle ABC$ 中，$a=5$，$b=6$，$c=7$，試求 $\triangle ABC$ 之面積。

11 老師講解

已知兩邊夾一角求內角平分線長

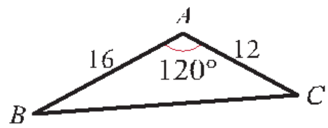
學生練習

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=8$，且 $\angle C=60^\circ$，若 $\angle C$ 的角平分線交 $\overline{AB}$ 於 D，試求 $\overline{CD}$。



想法　$\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin C$。

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=16$，$\overline{AC}=12$，且 $\angle BAC=120^\circ$，若 $\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 邊於 D，試求 $\overline{AD}$。



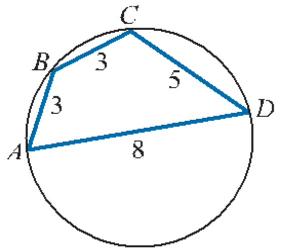
進階例題

12 老師講解　**求圓內接四邊形之對角線長**　學生練習

如圖，圓內接四邊形 $ABCD$ 中，

$\overline{AB}=\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=8$，試求：

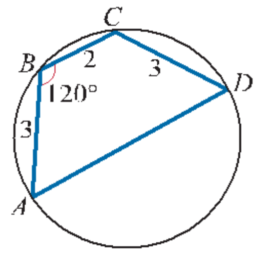
(1) $\cos A$　(2) $\overline{BD}$



圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=3$，

$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\angle ABC=120^\circ$，

試求 $\overline{AD}$。



13 老師講解　已知三邊長求外接圓與內切圓半徑　學生練習

已知甲、乙、丙三家機車行兩兩相距 35、40 與 45 公尺，今欲設置一電動機車電池充電站，且充電站到三家距離相等，試問此距離為何？（輔助公式：$\Delta=\dfrac{abc}{4R}=rs$，其中 R 與 r 分別為三角形的外接圓與內切圓半徑）

$\triangle ABC$ 之三邊長分別為 7、8、13，試求外接圓半徑與內切圓半徑之乘積。

C

2

2-5 段落測驗

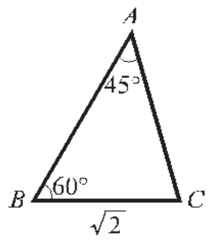
★表難題

1. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=75^\circ$，$\angle C=60^\circ$ 且 $a=8$，則 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑為__________。

2. $\triangle ABC$ 中，$a-2b+c=0$ 且 $3a+b-2c=0$，則 $\sin A:\sin B:\sin C=$__________。

3. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\overline{BC}=\sqrt{2}$，

   則 $\overline{AB}=$__________。（$\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$）



4. $\triangle ABC$ 中，$b=4$，$c=\sqrt{2}$，$\angle A=45^\circ$，則 $a=$__________。

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=30^\circ$，$a=5\sqrt{3}$，$b=10$，則 $\angle B=$__________。

6. 設 $\triangle ABC$ 中，$c=2$，$b=1+\sqrt{3}$，$\angle A=30^\circ$，則 $\overline{BC}=$__________。

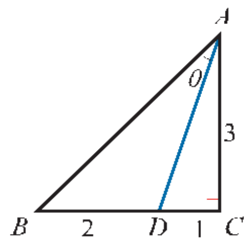
7. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=2\sqrt{3}$，$\angle A=30^\circ$，$\angle B>90^\circ$，則 $\triangle ABC$ 之面積為__________平方單位。【統測】

8. $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BC}=\sqrt{13}$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60^\circ$，則 $\cos C$ 之值為__________。【統測】

9. 三角形 $\triangle_1$ 的三邊長為 8、7、5，面積為 x；三角形 $\triangle_2$ 的三邊長為 8、6、6，面積為 y；三角形 $\triangle_3$ 的三邊長為 9、7、4，面積為 z，下列何者正確？__________

   (A) $y<z$　(B) $x<z$　(C) $x<y$　(D) $x+y+z=\sqrt{800}$。【統測】

★10. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，D 在 $\overline{BC}$ 線段上，且線段長 $\overline{BD}=2$，$\overline{DC}=1$，$\overline{AC}=3$，如圖所示。令 $\angle BAD=\theta$，求 $\cos\theta=$__________。【統測】



11. 設 $\triangle ABC$ 三邊之對應高分別為 $h_a=6$，$h_b=4$，$h_c=3$，則最小角之餘弦值為__________。

2-5 高手過招

1. 梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$，已知 $\overline{AD}=4$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AB}=5$，$\overline{CD}=7$，則梯形 $ABCD$ 面積為__________平方單位。