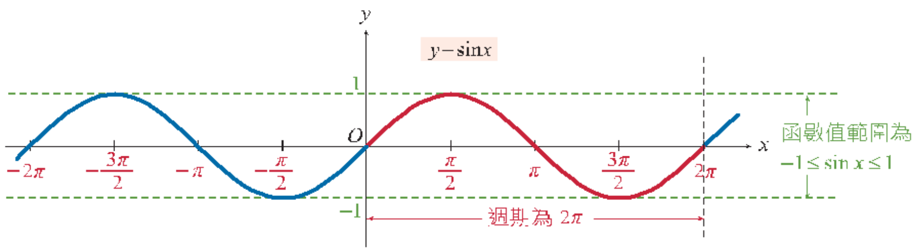
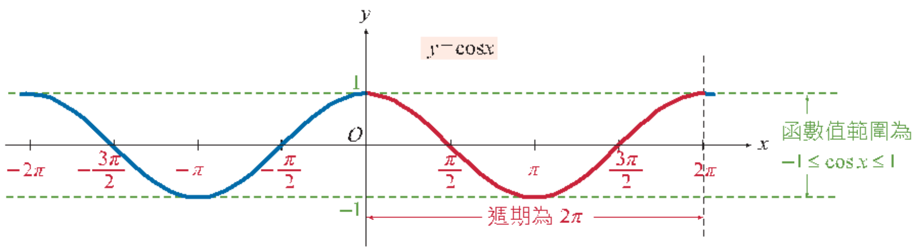
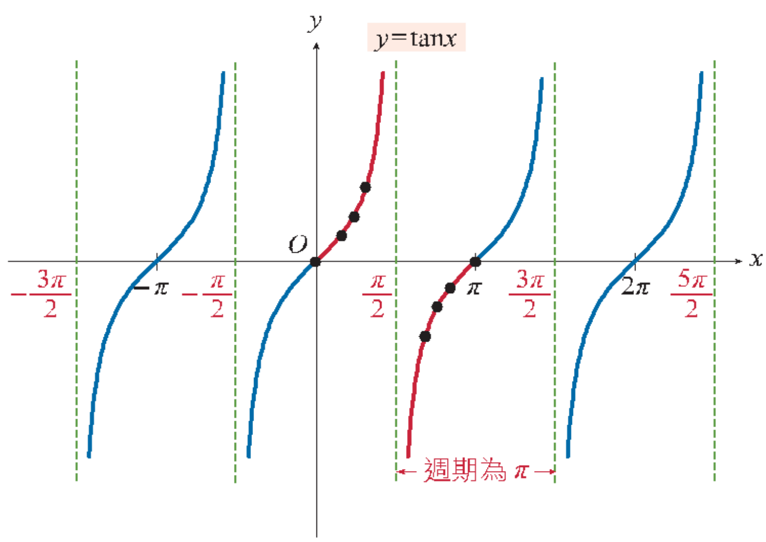
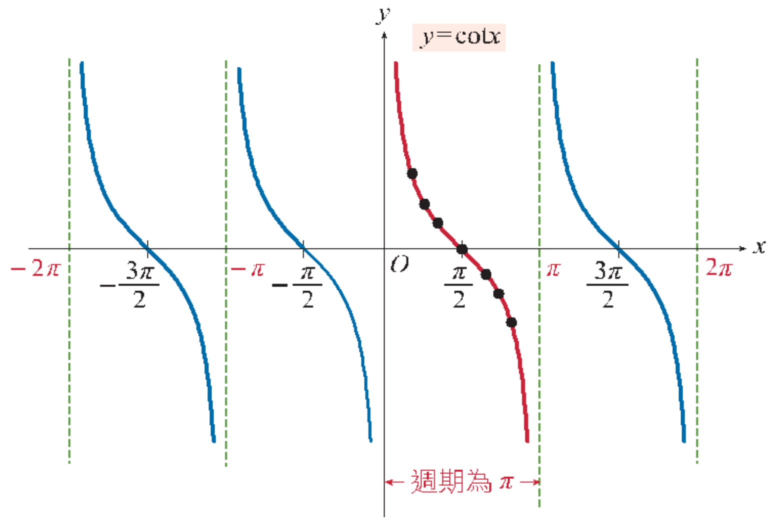
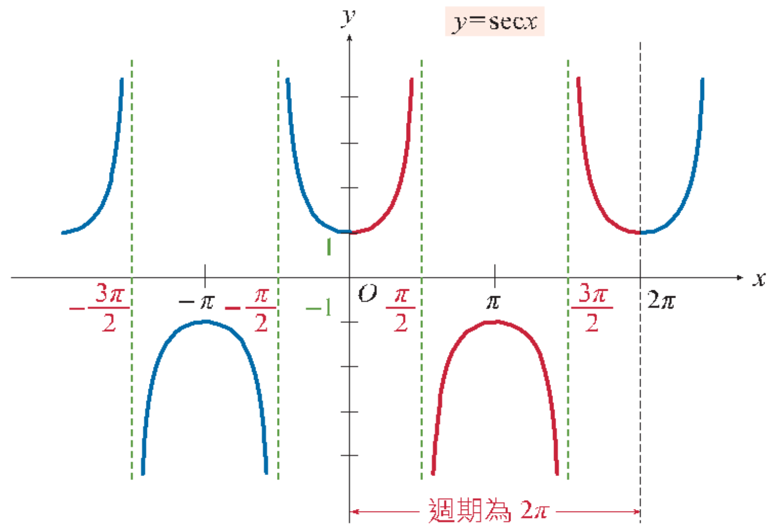
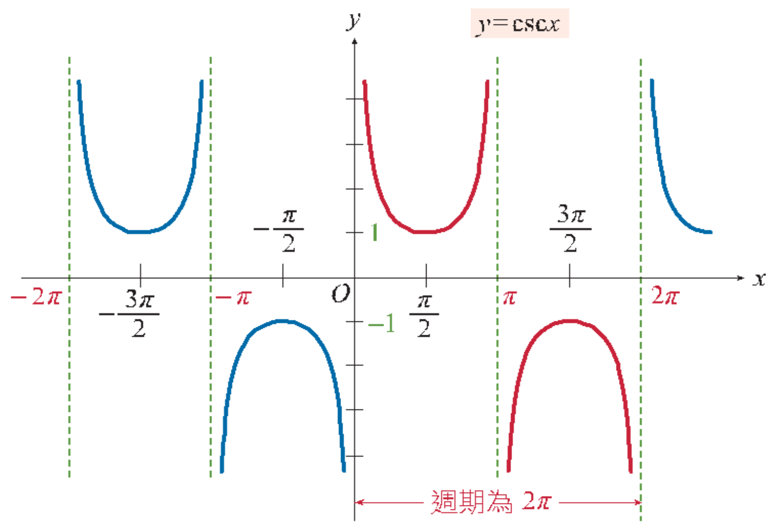
2-4 》三角函數的圖形與週期

重點一　三角函數圖形

1. 三角函數的圖形：

<table>
<tr><th>三角函數</th><th>定義域</th><th>值域</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\sin x$</td><td>$\left\{x\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$</td><td>$\left\{y\middle|-1\le y\le 1\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\cos x$</td><td>$\left\{x\middle|x\in\mathbb{R}\right\}$</td><td>$\left\{y\middle|-1\le y\le 1\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\tan x$</td><td>$\left\{x\middle|x\ne k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$</td><td>$\left\{y\middle|y\in\mathbb{R}\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

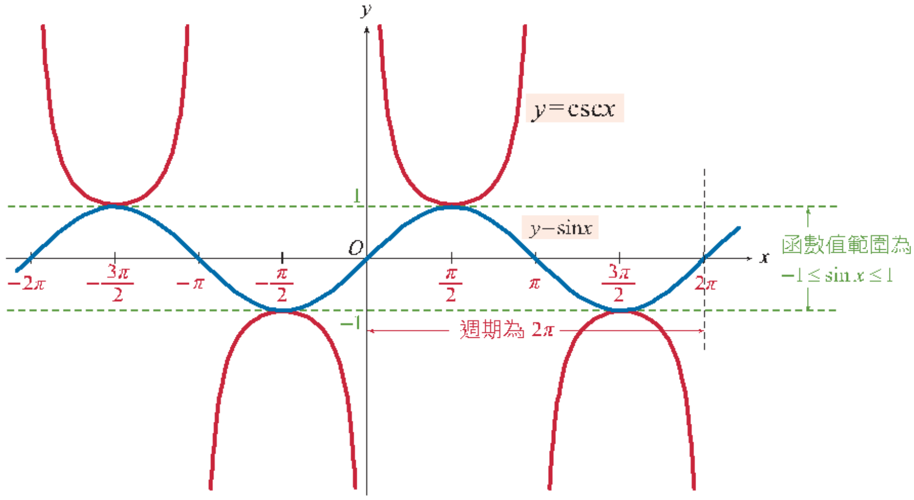
<table>
<tr><th>三角函數</th><th>定義域</th><th>值域</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\cot x$</td><td>$\left\{x \middle| x \neq k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$</td><td>$\left\{y \middle| y \in \mathbb{R}\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\sec x$</td><td>$\left\{x \middle| x \neq k\pi+\frac{\pi}{2} \ \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$</td><td>$\left\{y \middle| \ |y| \geq 1\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\csc x$</td><td>$\left\{x \middle| x \neq k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$</td><td>$\left\{y \middle| \ |y| \geq 1\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

觀念補充 //

觀察下方 $y=\csc x$ 的圖形和 $y=\sin x$ 的圖形：

$\csc x$ 的圖形在 $y=-1 \sim y=1$ 之間的中空地帶剛好可以塞進 $\sin x$ 的圖形，

因為 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，$\sec x$ 和 $\cos x$ 也類似。



2. 三角函數的週期：

若一函數恆有 $f(x+T)=f(x)$ 之關係，我們稱 f 為週期函數。習慣取滿足條件的最小正數 T，此 T 稱為 $f(x)$ 之週期，亦即其函數值每隔 T 就會再重現一次。

例如：$\sin(2\pi+x)=\sin x$，則稱 $\sin x$ 之週期為 2π。

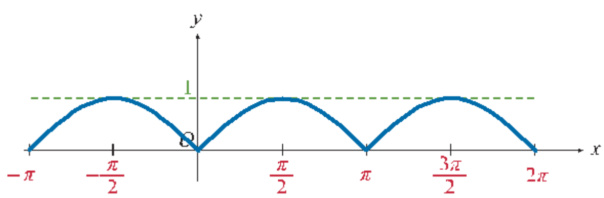
(1) 週期為 2π 的三角函數有：$\sin x$，$\cos x$，$\sec x$，$\csc x$。
　週期為 π 的三角函數有：$\tan x$，$\cot x$。

(2) 若 $f(x)$ 之週期為 T，則函數 $af(kx+b)+c$ 之週期為 $\dfrac{T}{|k|}$。

(3) 三角函數加絕對值：$|\sin x|$、$|\cos x|$、$|\tan x|$、$|\cot x|$、$|\sec x|$、$|\csc x|$ 之週期均為 π。

觀念補充 //

$y=|\sin x|$ 的圖形就是把 $y=\sin x$ 圖形中負的部分翻正，如圖所示，所以週期減半。



3. 銳角三角函數的大小關係：

(1) 當 $0^\circ<\theta<45^\circ$ 時：$\sin\theta<\cos\theta$，$\tan\theta<\cot\theta$，$\sec\theta<\csc\theta$（正函數＜餘函數）。
　例如：$\sin 40^\circ<\cos 40^\circ$。

(2) 當 $45^\circ<\theta<90^\circ$ 時：$\sin\theta>\cos\theta$，$\tan\theta>\cot\theta$，$\sec\theta>\csc\theta$（正函數＞餘函數）。
　例如：$\sin 50^\circ>\cos 50^\circ$。

1 老師講解　求三角函數之週期　學生練習

試求下列各函數之週期：

(1) $y=3\sin x+\dfrac{\pi}{4}$　(2) $y=5\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

(3) $y=3+\tan\pi x$　(4) $y=|\sec x|+1$

想法　若 $f(x)$ 週期為 T，則 $af(kx+b)+c$ 週期為 $\dfrac{T}{|k|}$。

[答：(1) 2π　(2) π　(3) 1　(4) π]

解 (1) $\because$ $\sin x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 2π

(2) $\because$ $\sin x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(3) $\because$ $\tan x$ 週期為 π

$\therefore$ 原式週期為 $\dfrac{\pi}{\pi}=1$

(4) $\because$ $\sec x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 π

試求下列各函數之週期：

(1) $y=8\csc x+3\pi$　(2) $y=\tan 3x-1$

(3) $y=\dfrac{1}{3}\sec\dfrac{x}{2}$　(4) $y=7\cos 2x-11$

[答：(1) 2π　(2) $\dfrac{\pi}{3}$　(3) 4π　(4) π]

解 (1) $\because$ $\csc x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 2π

(2) $\because$ $\tan x$ 週期為 π

$\therefore$ 原式週期為 $\dfrac{\pi}{3}$

(3) $\because$ $\sec x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

(4) $\because$ $\cos x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

2 老師講解　三角函數週期之變化　學生練習

某工廠使用交流電的電流強度 I（安培）與時間 t（秒）可用函數 $I=100\sin\left(100\pi t+\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 表示，試求最大電流及電流強度變化的週期。

想法　$\sin x$ 週期為 2π，且 $|\sin x|\le 1$。

[答：最大電流為 100 安培，週期為 $\dfrac{1}{50}$ 秒]

解 $\because$ $\sin x$ 的最大值為 1

$\therefore$ $I=100\sin\left(100\pi t+\dfrac{5\pi}{6}\right)$

最大電流為 100 安培

且週期為 $\dfrac{2\pi}{100\pi}=\dfrac{1}{50}$（秒）

受到潮汐影響，設某港口的水深 y（公尺）與時間 t（小時）可用函數 $y=2\sin\dfrac{\pi}{6}t+8$ 表示。試求：

(1) $t=7$ 時的水深。

(2) 潮汐的週期。

[答：(1) 7 公尺　(2) 12 小時]

解 (1) 將 $t=7$ 代入 $y=2\sin\dfrac{\pi}{6}t+8$ 中

得 $y=2\sin\dfrac{7\pi}{6}+8=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+8=7$

即 $t=7$（小時）時水深為 7 公尺

(2) 函數週期為 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$

所以潮汐的週期為 12 小時

3 三角函數之大小關係

老師講解　學生練習

設 $a=\sin 55^\circ$，$b=\cos 55^\circ$，$c=\tan 55^\circ$，試比較 a、b、c 的大小關係。

想法　當 $45^\circ<\theta<90^\circ$ 時，$1>\sin\theta>\cos\theta$。

[答：$c>a>b$]

解　$\because$ $a=\sin 55^\circ$

$b=\cos 55^\circ=\sin 35^\circ$

$c=\tan 55^\circ>\tan 45^\circ=1$

$\therefore$ $c>a>b$

設 $a=\tan 40^\circ$，$b=\sec 40^\circ$，$c=\csc 40^\circ$，試比較 a、b、c 的大小關係。

[答：$c>b>a$]

解　$\because$ $a=\tan 40^\circ<\tan 45^\circ=1$，$a$ 最小

$$b=\sec 40^\circ=\frac{1}{\cos 40^\circ}=\frac{1}{\sin 50^\circ}<\frac{1}{\sin 40^\circ}=c$$

$\therefore$ $c>b>a$

4 解三角函數方程式

老師講解　學生練習

若 $2\sin^2 x-5\sin x-3=0$，試求 $\sin x$。

想法　類比解二次方程式的技巧解三角函數方程式。

[答：$-\frac{1}{2}$]

解　對三角函數方程式進行十字交乘

原式 $=(2\sin x+1)(\sin x-3)=0$

$\Rightarrow$ $\sin x=-\frac{1}{2}$ 或 3（不合）

若 $8\cos^2 x+10\cos x-3=0$，試求 $\cos x$。

[答：$\frac{1}{4}$]

解　對三角函數方程式進行十字交乘

原式 $=(4\cos x-1)(2\cos x+3)=0$

$\Rightarrow$ $\cos x=\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{3}{2}$（不合）

已知$0 \le x < 2\pi$，試求函數
$y = \cos^2 x + 2\sin x + 3$的最大值與最小值。

想法 運用二次函數配方法求極值。

[答：最大值為 5，最小值為 1]

解 利用$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

將原函數改寫為

$y = (1 - \sin^2 x) + 2\sin x + 3$

$= -\sin^2 x + 2\sin x + 4$

再利用配方法得

$y = -(\sin x - 1)^2 + 5$

因為$-1 \le \sin x \le 1$

當$\sin x = 1$時，最大值為 5

當$\sin x = -1$時，

最小值為$-(-1-1)^2 + 5 = 1$

設$0 \le x < 2\pi$，若$2\sin^2 x + \cos x$的最大值為a，最小值為b，試求(a, b)。【統測】

[答：$\left(\frac{17}{8}, -1\right)$]

解 利用$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

將原函數改為

$y = 2(1 - \cos^2 x) + \cos x$

$= -2\left(\cos x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$

當$\cos x = \frac{1}{4}$時，最大值$a = \frac{17}{8}$

當$\cos x = -1$時，最小值$b = -1$

故$(a, b) = \left(\frac{17}{8}, -1\right)$

2-4 段落測驗

★表難題

1. 函數 $f(x)=4\cos\left(\dfrac{3}{2}x+\pi\right)+1$ 的週期為 $\underline{\dfrac{4\pi}{3}}$。

2. 函數 $f(x)=\left|\cot\left(\dfrac{x}{2}+\pi\right)\right|+5$ 的週期為 $\underline{2\pi}$。

3. 將 $y=\sin x$ 的圖形，先沿水平方向壓縮為原來的 $\dfrac{1}{4}$ 倍，再向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 單位，然後向下平移 3 單位，則新函數圖形之週期為 $\underline{\dfrac{\pi}{2}}$。

4. 有一彈簧綁鉛塊，距離平衡點的位移 y（公分）與時間 t（秒）可用函數 $y=5\cos\left(\pi t+\dfrac{2\pi}{5}\right)$ 表示，則最大位移為 $\underline{5}$ 公分，振動一次所需要的時間為 $\underline{2}$ 秒。

5. 設 $a=\sin40^\circ$，$b=\cos70^\circ$，$c=\tan50^\circ$，$d=\cot35^\circ$，則 a、b、c、d 的大小為 $\underline{b<a<c<d}$。

6. 若 $3\sec^2x-11\sec x-4=0$，則 $\sec x=\underline{4}$。

7. 已知 $0\leq x<2\pi$，則方程式 $2\cos^2x-3\cos x+1=0$ 之解為 $\underline{0、\dfrac{\pi}{3}或\dfrac{5\pi}{3}}$。

★ 8. 已知 $\dfrac{\pi}{6}\leq x\leq\dfrac{5\pi}{6}$，則函數 $y=\cos^2x+\sin x-1$ 的最大值為 $\underline{\dfrac{1}{4}}$，最小值為 $\underline{0}$。

9. 若 θ 為一銳角，且 $a=\sin\dfrac{\theta}{3}$，$b=\cos\left(\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$c=\tan\dfrac{\theta}{3}$，試比較 a、b、c 大小。
$\underline{b<a<c}$ 【統測】

10. 設 $0\leq\theta\leq\pi$，且 $2\sin^2\theta+11\cos\theta-7=0$，則 $\theta=\underline{\dfrac{\pi}{3}}$。 【統測】

2-4 高手過招

1. 若 $f(x)=\sec^2\dfrac{x}{2}+\csc^2\dfrac{x}{2}$ 的週期為 P，則 P 之值為 $\underline{\pi}$。
（提示：$\sin2x=2\sin x\cos x$） 【105(C)】