

2-4 三角函數的圖形與週期

重點一 三角函數圖形

1. 三角函數的圖形：

三角函數	定義域	值域
$y = \sin x$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
$y = \cos x$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
$y = \tan x$	$\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$



三角函數	定義域	值域
$y = \cot x$	$\{x \mid x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$
$y = \sec x$	$\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})\}$	$\{y \mid y \geq 1\}$
$y = \csc x$	$\{x \mid x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$	$\{y \mid y \geq 1\}$

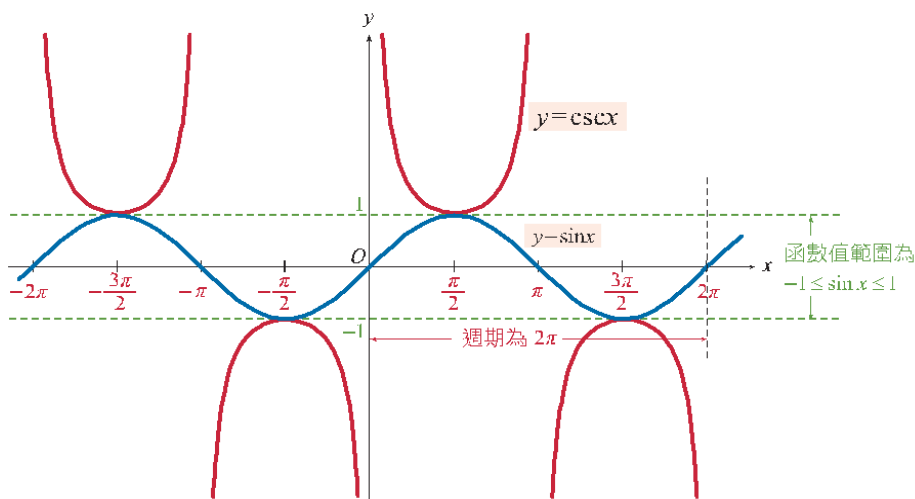


觀念補充 //

觀察下方 $y = \csc x$ 的圖形和 $y = \sin x$ 的圖形：

$\csc x$ 的圖形在 $y = -1 \sim y = 1$ 之間的中空地帶剛好可以塞進 $\sin x$ 的圖形，

因為 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ ， $\sec x$ 和 $\cos x$ 也類似。



2. 三角函數的週期：

若一函數恆有 $f(x+T) = f(x)$ 之關係，我們稱 f 為週期函數。習慣取滿足條件的最小正數 T ，此 T 稱為 $f(x)$ 之週期，亦即其函數值每隔 T 就會再重現一次。

例如： $\sin(2\pi + x) = \sin x$ ，則稱 $\sin x$ 之週期為 2π 。

(1) 週期為 2π 的三角函數有： $\sin x$ ， $\cos x$ ， $\sec x$ ， $\csc x$ 。

週期為 π 的三角函數有： $\tan x$ ， $\cot x$ 。

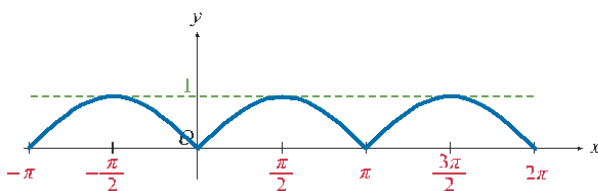
(2) 若 $f(x)$ 之週期為 T ，則函數 $af(kx+b)+c$ 之週期為 $\frac{T}{|k|}$ 。

(3) 三角函數加絕對值： $|\sin x|$ 、 $|\cos x|$ 、 $|\tan x|$ 、 $|\cot x|$ 、 $|\sec x|$ 、 $|\csc x|$ 之週期均為 π 。



觀念補充 //

$y = |\sin x|$ 的圖形就是把 $y = \sin x$ 圖形中負的部分翻正，如圖所示，所以週期減半。



3. 銳角三角函數的大小關係：

(1) 當 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ 時： $\sin \theta < \cos \theta$ ， $\tan \theta < \cot \theta$ ， $\sec \theta < \csc \theta$ （正函數 $<$ 餘函數）。

例如： $\sin 40^\circ < \cos 40^\circ$ 。

(2) 當 $45^\circ < \theta < 90^\circ$ 時： $\sin \theta > \cos \theta$ ， $\tan \theta > \cot \theta$ ， $\sec \theta > \csc \theta$ （正函數 $>$ 餘函數）。

例如： $\sin 50^\circ > \cos 50^\circ$ 。

試求下列各函數之週期：

$$(1) y = 3 \sin x + \frac{\pi}{4} \quad (2) y = 5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(3) y = 3 + \tan \pi x \quad (4) y = |\sec x| + 1$$

若 $f(x)$ 週期為 T ，則 $af(kx+b)+c$ 週期為

想法 $\frac{T}{|k|}$ 。

試求下列各函數之週期：

$$(1) y = 8 \csc x + 3\pi \quad (2) y = \tan 3x - 1$$

$$(3) y = \frac{1}{3} \sec \frac{x}{2} \quad (4) y = 7 \cos 2x - 11$$

某工廠使用交流電的電流強度 I (安培)
與時間 t (秒) 可用函數

$$I = 100 \sin\left(100\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$$
 表示，試求最大電

流及電流強度變化的週期。

想法 $\sin x$ 週期為 2π ，且 $|\sin x| \leq 1$ 。

受到潮汐影響，設某港口的水深 y (公尺)
與時間 t (小時) 可用函數 $y = 2 \sin \frac{\pi}{6} t + 8$

表示。試求：

(1) $t = 7$ 時的水深。

(2) 潮汐的週期。

3

老師講解

三角函數之大小關係

學生練習

設 $a = \sin 55^\circ$, $b = \cos 55^\circ$, $c = \tan 55^\circ$,
試比較 a 、 b 、 c 的大小關係。

想法 當 $45^\circ < \theta < 90^\circ$ 時, $1 > \sin \theta > \cos \theta$ 。

設 $a = \tan 40^\circ$, $b = \sec 40^\circ$, $c = \csc 40^\circ$,
試比較 a 、 b 、 c 的大小關係。

C

2

4

老師講解

解三角函數方程式

學生練習

若 $2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$, 試求 $\sin x$ 。

想法 類比解二次方程式的技巧解三角函數方程式。

若 $8 \cos^2 x + 10 \cos x - 3 = 0$, 試求 $\cos x$ 。

已知 $0 \leq x < 2\pi$ ，試求函數
 $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 3$ 的最大值與最小值。

想法 運用二次函數配方法求極值。

設 $0 \leq x < 2\pi$ ，若 $2 \sin^2 x + \cos x$ 的最大值
為 a ，最小值為 b ，試求 (a, b) 。 【統測】

2-4 段落測驗

1. 函數 $f(x) = 4 \cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right) + 1$ 的週期為_____。
2. 函數 $f(x) = \left| \cot\left(\frac{x}{2} + \pi\right) \right| + 5$ 的週期為_____。
3. 將 $y = \sin x$ 的圖形，先沿水平方向壓縮為原來的 $\frac{1}{4}$ 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位，然後向下平移 3 單位，則新函數圖形之週期為_____。
4. 有一彈簧綁鉛塊，距離平衡點的位移 y (公分) 與時間 t (秒) 可用函數 $y = 5 \cos\left(\pi t + \frac{2\pi}{5}\right)$ 表示，則最大位移為_____公分，振動一次所需要的時間為_____秒。
5. 設 $a = \sin 40^\circ$ ， $b = \cos 70^\circ$ ， $c = \tan 50^\circ$ ， $d = \cot 35^\circ$ ，則 a 、 b 、 c 、 d 的大小為_____。
6. 若 $3 \sec^2 x - 11 \sec x - 4 = 0$ ，則 $\sec x =$ _____。
7. 已知 $0 \leq x < 2\pi$ ，則方程式 $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ 之解為_____。
- ★ 8. 已知 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ ，則函數 $y = \cos^2 x + \sin x - 1$ 的最大值為_____，最小值為_____。
9. 若 θ 為一銳角，且 $a = \sin \frac{\theta}{3}$ ， $b = \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ ， $c = \tan \frac{\theta}{3}$ ，試比較 a 、 b 、 c 大小。

10. 設 $0 \leq \theta \leq \pi$ ，且 $2 \sin^2 \theta + 11 \cos \theta - 7 = 0$ ，則 $\theta =$ _____。

【統測】

【統測】

2-4 高手過招

1. 若 $f(x) = \sec^2 \frac{x}{2} + \csc^2 \frac{x}{2}$ 的週期為 P ，則 P 之值為_____。
(提示： $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$)

【105(C)】