2-3 任意角的三角函數

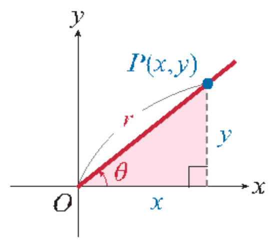
重點一 任意角三角函數的定義

1. 標準位置角 θ 終邊上一點 $P(x, y)$，

$\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$，如圖，

則定義任意角三角函數：$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$。

再利用倒數關係得：$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$，$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$，$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$。



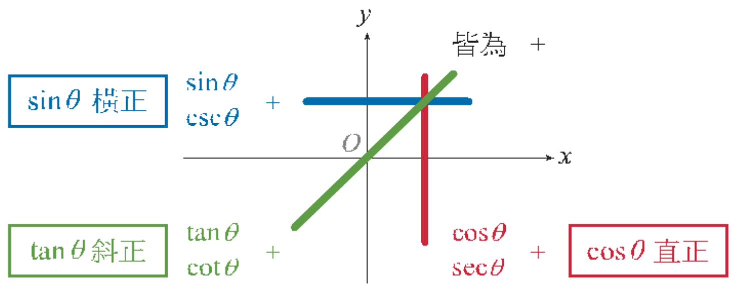
2. 三角函數值的正負號：

三角函數值的正負符號取決於角 θ 終邊的所在位置，規則如下：

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\theta$ $\csc\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$ $\sec\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$ $\cot\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

觀念補充 //

可用右圖輔助記憶：



1　老師講解　任意角三角函數之定義　學生練習

已知 $P(12,-5)$ 為角 θ 終邊上一點，試求其六個三角函數值。

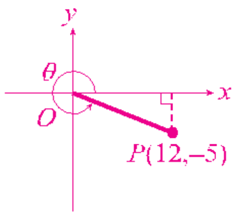
想法　任意角三角函數定義：

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，

$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$，$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$，$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$。

[答：見解析]

解　如圖所示



$\because\ P(12,-5)$

$\therefore\ r=\overline{OP}=13$，$x=12$，$y=-5$

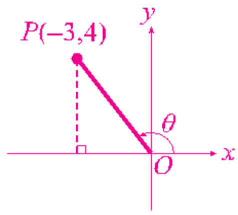
故 $\sin\theta=-\dfrac{5}{13}$，$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$，$\tan\theta=-\dfrac{5}{12}$

$\cot\theta=-\dfrac{12}{5}$，$\sec\theta=\dfrac{13}{12}$，$\csc\theta=-\dfrac{13}{5}$

已知 $P(-3,4)$ 為角 θ 終邊上一點，試求其六個三角函數值。

[答：見解析]

解　如圖所示



$\because\ P(-3,4)$

$\therefore\ r=\overline{OP}=5$，$x=-3$，$y=4$

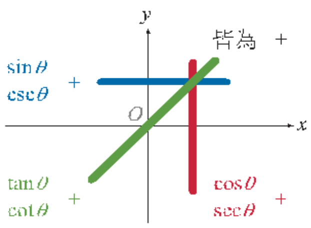
故 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$

$\cot\theta=-\dfrac{3}{4}$，$\sec\theta=-\dfrac{5}{3}$，$\csc\theta=\dfrac{5}{4}$

2　老師講解　利用三角函數值的正負判斷 θ 之象限　學生練習

已知 $\sin\theta\cos\theta<0$ 且 $\tan\theta\csc\theta>0$，試求 θ 為第幾象限角?

想法



[答：第四象限角]

解　$\sin\theta\cos\theta<0$，兩者異號

$\Rightarrow$　θ 為第二或第四象限角

$\tan\theta\csc\theta>0$，兩者同號

$\Rightarrow$　θ 為第一或第四象限角

故 θ 為第四象限角

已知 $\tan\theta>0$ 且 $\sec\theta<0$，試求點 $(\cos\theta,\csc\theta)$ 在第幾象限?

[答：第三象限]

解　$\tan\theta>0$　$\Rightarrow$　θ 為第一或第三象限角

$\sec\theta<0$　$\Rightarrow$　θ 為第二或第三象限角

故 θ 為第三象限角

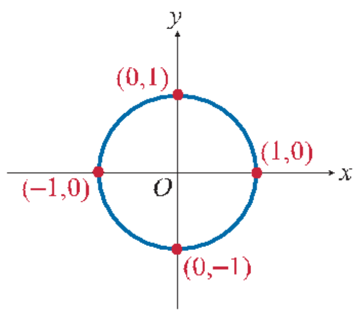
則點 $(\cos\theta,\csc\theta)$ 之坐標符號為 $(-,-)$

在第三象限

重點二　利用銳角求任意角三角函數值

1. 象限角的三角函數值：

在單位圓上布建四個點分別為：$(1,0)$、$(0,1)$、$(-1,0)$、$(0,-1)$，如圖所示。



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0°	0	1	0	無意義	1	無意義
90°	1	0	無意義	0	無意義	1
180°	0	-1	0	無意義	-1	無意義
270°	-1	0	無意義	0	無意義	-1

2. 化任意角三角函數為銳角三角函數：

(1) 負角公式：

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$。

例如：$\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ$，$\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ$，$\tan(-30^\circ)=-\tan 30^\circ$。

利用倒數關係，可得另三個三角函數負角公式，規則相同。

(2) 非第一象限角之轉換式（θ 為銳角）：

① 第二象限角之轉換式 $=F(180^\circ-\theta)=\pm F(\theta)$

② 第三象限角之轉換式 $=F(180^\circ+\theta)=\pm F(\theta)$

③ 第四象限角之轉換式 $=F(360^\circ-\theta)=\pm F(\theta)$

例如：$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

(3) 常見特別角之三角函數值：

	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) 任意角三角函數的轉換技巧：（口訣：奇變、偶不變；正負、看象限）

① 原函數（$\frac{\pi}{2}\times$偶數$\pm\theta$）＝±原函數 (θ)

② 原函數（$\frac{\pi}{2}\times$奇數$\pm\theta$）＝±餘函數 (θ)

例如：

	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$\frac{3\pi}{2}+\theta$	$2\pi-\theta$	$2\pi+\theta$
sin	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
cos	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$

3 老師講解　利用銳角求任意角三角函數值　學生練習

試求：

(1) $\cos 240^\circ+\tan(-315^\circ)+\sin(-750^\circ)$
$+\sec 180^\circ$

(2) $\sin 600^\circ\cot 210^\circ+\tan 135^\circ+\cos 120^\circ$

想法　依轉換公式化簡任意角的三角函數值。

[答：(1) -1　(2) -3]

解 (1) 原式

$=-\cos 60^\circ+\tan 45^\circ-\sin 30^\circ+(-1)$

$=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+(-1)$

$=-1$

(2) 原式

$=(-\sin 60^\circ)(\cot 30^\circ)-\tan 45^\circ-\cos 60^\circ$

$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt{3}-1-\frac{1}{2}$

$=-3$

試求：

(1) $\cos 180^\circ\times\sin 330^\circ-\tan 180^\circ\times\cot 585^\circ$

(2) $\sin 150^\circ+\cot(-135^\circ)-\cos 420^\circ$

[答：(1) $\frac{1}{2}$　(2) 1]

解 (1) 原式

$=(-1)\times(-\sin 30^\circ)-0\times\cot 45^\circ$

$=(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)-0\times 1$

$=\frac{1}{2}$

(2) 原式

$=\sin 30^\circ-(-\cot 45^\circ)-\cos 60^\circ$

$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}$

$=1$

4 老師講解　利用已知三角函數值求任意角三角函數值　學生練習

已知 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 且 $\tan\theta<0$，試求 $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 之值。

想法　依任意角三角函數之定義代入求值，特別注意 θ 所屬象限。

[答：$-\frac{1}{5}$]

解　$\because$ $\sin\theta=\frac{3}{5}>0$ 且 $\tan\theta<0$

$\therefore$ θ 為第二象限角

則 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$，$\cot\theta=-\frac{4}{3}$

$$代入原式=\frac{\frac{3}{5}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)}+\frac{-\frac{4}{5}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{9}{35}-\frac{16}{35}$$

$$=-\frac{7}{35}$$

$$=-\frac{1}{5}$$

已知 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ 且 $\sin\theta<0$，試求 $\cot\theta+\csc\theta$ 之值。

[答：$-\frac{1}{3}$]

解　$\because$ $\cos\theta=-\frac{4}{5}<0$ 且 $\sin\theta<0$

$\therefore$ θ 為第三象限角

則 $\cot\theta=\frac{4}{3}$，$\csc\theta=-\frac{5}{3}$

$$代入原式=\frac{4}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}$$

5 老師講解　利用銳角求任意角三角函數之轉換　學生練習

已知 θ 非象限角，試求

$$\frac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}-\frac{\cos(360^\circ-\theta)}{\sin(90^\circ-\theta)}-\frac{\sin(270^\circ-\theta)}{\cos(-\theta)}$$ 之值。

想法　任意角轉換技巧：

(1) 原函數 $\left(\frac{\pi}{2}\times\text{偶數}\pm\theta\right)=\pm$ 原函數 (θ)。

(2) 原函數 $\left(\frac{\pi}{2}\times\text{奇數}\pm\theta\right)=\pm$ 餘函數 (θ)。

[答：1]

解　$$原式=\frac{-\sin\theta}{-\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{-\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$=1-1+1$$

$$=1$$

已知 θ 非象限角，試求

$$\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sin(\pi+\theta)}-\frac{\tan(-\theta)}{\cot\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin(3\pi-\theta)}$$ 之值。

[答：-1]

解　$$原式=\frac{\sin\theta}{-\sin\theta}-\frac{-\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{-\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$=-1+1-1$$

$$=-1$$

進階例題

6 老師講解　利用已知三角函數值求任意角三角函數值　學生練習

若 $\cos(-123^\circ)=k$，試求 $\tan213^\circ$ 之值。

[答：$-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$]

解 $\cos(-123^\circ)=-\cos57^\circ=k=\dfrac{k}{1}$

$\tan213^\circ=\tan33^\circ=\cot57^\circ=-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

已知 $\tan22^\circ=k$，試求 $\sin2002^\circ$ 之值。

[答：$-\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$]

解 $\tan22^\circ=k=\dfrac{k}{1}$

$\sin2002^\circ=\sin(360^\circ\times5+202^\circ)$

$=\sin202^\circ$

$=\sin(180^\circ+22^\circ)$

$=-\sin22^\circ$

$=-\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

7 老師講解　利用任意角之三角函數轉換式求值　學生練習

試求 $\sin1^\circ+\sin2^\circ+\cdots+\sin359^\circ+\sin360^\circ$ 之值。

[答：0]

解 原式整理

$=(\sin1^\circ+\sin359^\circ)+(\sin2^\circ+\sin358^\circ)$

$+\cdots+\sin180^\circ+\sin360^\circ$

$=(0+0+\cdots+0)+\sin180^\circ+\sin360^\circ$

$=0+0+0$

$=0$

試求 $\cos1^\circ+\cos2^\circ+\cdots+\cos179^\circ+\cos180^\circ$ 之值。

[答：-1]

解 原式整理

$=(\cos1^\circ+\cos179^\circ)+(\cos2^\circ+\cos178^\circ)$

$+\cdots+\cos90^\circ+\cos180^\circ$

$=(0+0+\cdots+0)+0+(-1)$

$=-1$

2-3 段落測驗

★表難題

1. 設 $P(-24, a)$ 為 θ 角終邊上一點，若 $\cot\theta=\dfrac{12}{5}$，則 $\dfrac{3\sin\theta-\cos\theta}{2\tan\theta+\sec\theta}=$ $\underline{\dfrac{12}{13}}$。

2. 設 $P(\cos\theta, \tan\theta)$ 在第三象限，則 θ 為第 $\underline{\text{二}}$ 象限角。

3. $\sin 810^\circ+\cos(-540^\circ)+\sec 675^\circ+\csc 1215^\circ=$ $\underline{2\sqrt{2}}$。

4. 若 $\sin\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ 且 $\cot\theta>0$，則 $\tan\theta\times\sec\theta=$ $\underline{-3\sqrt{10}}$。

5. $\dfrac{\sin 240^\circ\cot 210^\circ}{\tan 315^\circ+\cos 120^\circ}=$ $\underline{1}$。

★ 6. $\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=$ $\underline{0}$。

7. 已知 θ 非象限角，則 $\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{\sin(2\pi+\theta)}+\dfrac{\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\cot(-\theta)}+\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos(-\theta)}=$ $\underline{1}$。

8. $\sin^2 210^\circ+\cos^2 570^\circ+\sec^2 930^\circ-\tan^2 1290^\circ+\csc^2 1650^\circ-\cot^2 2010^\circ=$ $\underline{3}$。【統測】

9. 設 θ 為銳角，則 $\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(360^\circ+\theta)}+\dfrac{\tan(180^\circ+\theta)}{\cot(270^\circ+\theta)}-\dfrac{\sin(270^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ+\theta)}=$ $\underline{-1}$。【統測】

10. 設 θ 為第四象限角，若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$ $\underline{-\dfrac{\sqrt{14}}{3}}$。【統測】

2-3 高手過招

1. 若 $\cos x=\tan x$，則 $\sin x=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$。