2-2 三角函數的定義與性質

重點一　銳角三角函數

1. 銳角三角函數：

定義：在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，且 $\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，如圖：

$\angle A$ 的正弦 $=\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$，

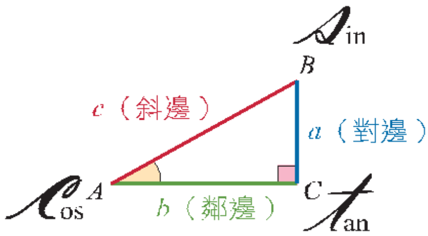
$\angle A$ 的餘弦 $=\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$，

$\angle A$ 的正切 $=\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 對邊}}{\angle A\text{ 鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$，

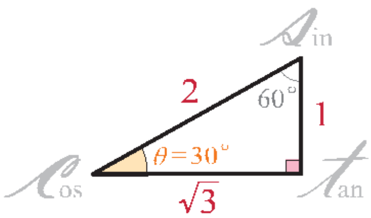
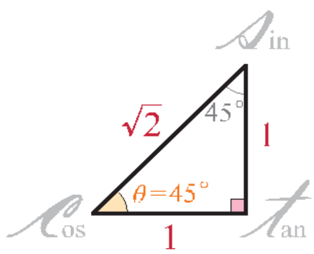
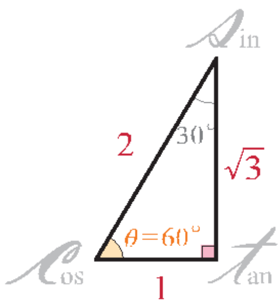
$\angle A$ 的餘切 $=\cot A=\dfrac{\angle A\text{ 鄰邊}}{\angle A\text{ 對邊}}=\dfrac{b}{a}$，

$\angle A$ 的正割 $=\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{ 鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$，

$\angle A$ 的餘割 $=\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{ 對邊}}=\dfrac{c}{a}$。



2. 特別角：

函數／角度	$30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$	$45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$	$60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$
圖示			
sin	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
tan	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
sec	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

1 老師講解　銳角三角函數的定義　學生練習

已知 θ 為銳角且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，試求

$\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 的值。

想法　銳角三角函數定義：

$\sin\theta=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$，$\cos\theta=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$，$\tan\theta=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$。

[答：$\dfrac{7}{5}$]

解　由 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow\ \sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cot\theta=\dfrac{4}{3}$

代入原式 $=\dfrac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{3}}+\dfrac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{4}}$

$=-\dfrac{9}{5}+\dfrac{16}{5}$

$=\dfrac{7}{5}$

已知 θ 為銳角且 $\cot\theta=\dfrac{5}{12}$，試求

$\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{\sec\theta}{2-\tan\theta}$ 的值。

[答：-5]

解　由 $\cot\theta=\dfrac{5}{12}$

$\Rightarrow\ \sin\theta=\dfrac{12}{13}$，$\cos\theta=\dfrac{5}{13}$

$\tan\theta=\dfrac{12}{5}$，$\sec\theta=\dfrac{13}{5}$

代入原式 $=\dfrac{\frac{12}{13}}{1-\frac{5}{13}}+\dfrac{\frac{13}{5}}{2-\frac{12}{5}}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{13}{2}$

$=-5$

2 老師講解　特別角的三角函數值　學生練習

試求下列各式的值：

(1) $\sin30^\circ\times\cos45^\circ\times\sec60^\circ\times\csc45^\circ$

(2) $\sin^2 60^\circ+\tan30^\circ\times\cot60^\circ$

想法　熟記特別角之三角函數值。

[答：(1) 1　(2) $\dfrac{13}{12}$]

解　(1) 原式 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times2\times\sqrt{2}$

$=1$

(2) 原式 $=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{13}{12}$

試求下列各式的值：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}\times\tan\dfrac{\pi}{6}\times\sec\dfrac{\pi}{4}\times\cot\dfrac{\pi}{4}$

(2) $1-\tan^2\dfrac{\pi}{3}\times\sec^2\dfrac{\pi}{6}$

[答：(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2) -3]

解　(1) 原式 $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{2}\times1$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 原式 $=1-\left(\sqrt{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$=-3$

重點二 三角恆等式

1. 三角基本關係式：

(1) 平方關係：

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ② $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$ ③ $\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$

(2) 倒數關係：

① $\sin\theta\times\csc\theta=1 \Leftrightarrow \csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

② $\cos\theta\times\sec\theta=1 \Leftrightarrow \sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$

③ $\tan\theta\times\cot\theta=1 \Leftrightarrow \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

(3) 商數關係：

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ② $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(4) 餘角關係：

① $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$，$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

② $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$，$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$

③ $\csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta$，$\sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta$

觀念補充 //

利用下圖之正六邊形來幫助記憶：

倒數關係：

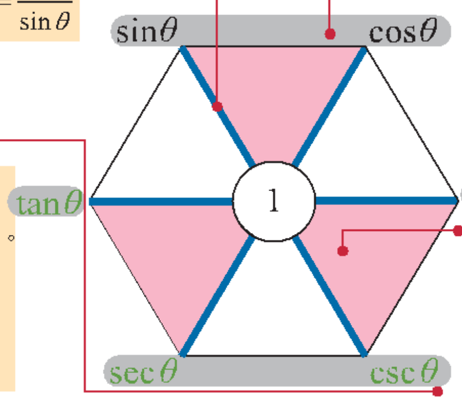
正對面的函數乘積＝1。例如：

$\sin\theta\times\csc\theta=1 \Rightarrow \csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

餘角關係：

同一水平線兩端函數互為餘角關係。

例如：$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$



商數關係：

相鄰三個函數，

中間函數＝兩邊函數乘積。

例如：$\sec\theta=\tan\theta\times\csc\theta$

$\Rightarrow \csc\theta=\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta}$

平方關係：

任一倒三角形 ABC，恆有 $A^2+B^2=C^2$。

例如：$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

2. 常見公式：

(1) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ (2) $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta$

3 老師講解　三角恆等式　學生練習

試求：

(1) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ + \sec^2 50^\circ - \cot^2 40^\circ$

(2) $(\sin 3^\circ - \csc 3^\circ)^2 + (\cos 3^\circ - \sec 3^\circ)^2 - (\tan 3^\circ)^2 - (\cot 3^\circ)^2$

想法　平方關係、倒數關係與餘角關係之綜合應用。

[答：(1) 2　(2) -1]

解 (1) 原式 $= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sec^2 50^\circ - \tan^2 50^\circ)$
$= 1 + 1$
$= 2$

(2) 原式
$= (\sin^2 3^\circ - 2\sin 3^\circ \csc 3^\circ + \csc^2 3^\circ) + (\cos^2 3^\circ - 2\cos 3^\circ \sec 3^\circ + \sec^2 3^\circ) - \tan^2 3^\circ - \cot^2 3^\circ$
$= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) - 2\sin 3^\circ \csc 3^\circ - 2\cos 3^\circ \sec 3^\circ + (\sec^2 3^\circ - \tan^2 3^\circ) + (\csc^2 3^\circ - \cot^2 3^\circ)$
$= 1 - 2 - 2 + 1 + 1$
$= -1$

試求：

(1) $\cos^2 57^\circ + \cos^2 33^\circ - \csc^2 27^\circ + \cot^2 27^\circ$

(2) $(\sin 83^\circ + \cos 83^\circ)^2 + (\sin 7^\circ - \cos 7^\circ)^2$

[答：(1) 0　(2) 2]

解 (1) 原式 $= (\sin^2 33^\circ + \cos^2 33^\circ) - (\csc^2 27^\circ - \cot^2 27^\circ)$
$= 1 - 1$
$= 0$

(2) 原式
$= (\sin^2 83^\circ + 2\sin 83^\circ \cos 83^\circ + \cos^2 83^\circ) + (\sin^2 7^\circ - 2\sin 7^\circ \cos 7^\circ + \cos^2 7^\circ)$
$= (\sin^2 83^\circ + \cos^2 83^\circ) + (\sin^2 7^\circ + \cos^2 7^\circ) + 2\sin 83^\circ \cos 83^\circ - 2\cos 83^\circ \sin 83^\circ$
$= 1 + 1$
$= 2$

4 老師講解　商數關係的應用　學生練習

若 $\tan\theta = \dfrac{1}{3}$，試求 $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta - \cos\theta}$ 之值。

想法　商數關係 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$。

[答：-4]

解 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \cos\theta = 3\sin\theta$

代入原式 $= \dfrac{\sin\theta + 3\sin\theta}{2\sin\theta - 3\sin\theta}$
$= \dfrac{4\sin\theta}{-\sin\theta}$
$= -4$

若 $\dfrac{\sin\theta - 3\cos\theta}{2\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{1}{3}$，試求 $\cot\theta$ 之值。

[答：$\dfrac{1}{10}$]

解 原式 $\Rightarrow 3\sin\theta - 9\cos\theta = 2\sin\theta + \cos\theta$
$\Rightarrow 10\cos\theta = \sin\theta$
$\Rightarrow \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{10}$

故 $\cot\theta = \dfrac{1}{10}$

5 老師講解　三角恆等式搭配乘法公式　學生練習

若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，試求：

(1) $\sin\theta\times\cos\theta$　(2) $\tan\theta+\cot\theta$

想法　$\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$。

[答：(1) $-\dfrac{5}{18}$　(2) $-\dfrac{18}{5}$]

解 (1) $\because\ \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ (\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

$\Rightarrow\ 1+2\sin\theta\times\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow\ \sin\theta\times\cos\theta=-\dfrac{5}{18}$

(2) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\times\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=-\dfrac{18}{5}$

已知 $0^\circ\le\theta\le45^\circ$，若 $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{5}{2}$，

試求：

(1) $\sin\theta+\cos\theta$　(2) $\sin^2\theta-\cos^2\theta$

[答：(1) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　(2) $-\dfrac{3}{5}$]

解 (1) $\because\ \tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{2}{5}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\ (\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{9}{5}$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$（取正）

(2) $\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

由 $(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow\ \sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$（取負）

$\therefore\ \sin^2\theta-\cos^2\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\dfrac{3}{5}$

6 老師講解　三角恆等式搭配根與係數關係　學生練習

若 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 為 $3x^2+4x+7k=0$ 之兩根，試求 k 之值。

想法　α、β 為 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則根與係數關係：$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。

[答：$\dfrac{1}{6}$]

解 由兩根和：$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{4}{3}$

兩根積：$\sin\theta\times\cos\theta=\dfrac{7k}{3}$

$\Rightarrow\ (\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\ \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2=1+2\times\dfrac{7k}{3}$

$\Rightarrow\ \dfrac{16}{9}=1+\dfrac{14k}{3}\ \Rightarrow\ k=\dfrac{1}{6}$

若 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 為 $5x^2-3x+k=0$ 之兩根，試求 k 之值。

[答：$-\dfrac{8}{5}$]

解 由兩根和：$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

兩根積：$\sin\theta\times\cos\theta=\dfrac{k}{5}$

$\Rightarrow\ (\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^2=1+2\times\dfrac{k}{5}$

$\Rightarrow\ \dfrac{9}{25}=1+\dfrac{2k}{5}$

$\Rightarrow\ k=-\dfrac{8}{5}$

7 老師講解 平方關係、餘角關係 學生練習

試求 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$ 之值。

[答：$\frac{89}{2}$]

解 利用 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ$

$= \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ$

$= 1$

$\therefore \left(\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ\right)$

$+\left(\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ\right) + \cdots$

$+\left(\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ\right) + \sin^2 45^\circ$

$= 1 \times 44 + \frac{1}{2}$

$= \frac{89}{2}$

試求 $\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ$ 之值。

[答：4]

解 利用 $\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ$

$= \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ$

$= 1$

$\therefore \left(\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ\right)$

$+\left(\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ\right)$

$+\left(\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ\right)$

$+\left(\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ\right)$

$= 1 + 1 + 1 + 1$

$= 4$

8 老師講解 三角恆等式搭配立方公式 學生練習

已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3}$，試求 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$。

[答：$\frac{13}{27}$]

解 將 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3}$ 兩邊平方

得 $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\Rightarrow \quad 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9}$

則 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

$= (\sin\theta - \cos\theta)\left(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right)$

$= \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{4}{9}\right)$

$= \frac{13}{27}$

已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，試求 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$。

[答：$\frac{9\sqrt{3}}{16}$]

解 將 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 兩邊平方

得 $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \quad 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{8}$

則 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

$= (\sin\theta - \cos\theta)\left(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{8}\right)$

$= \frac{9\sqrt{3}}{16}$

2-2 段落測驗

★表難題

★ 1. $\dfrac{1}{1+\sin 5^\circ}+\dfrac{1}{1+\tan 10^\circ}+\dfrac{1}{1+\cot 10^\circ}+\dfrac{1}{1+\csc 5^\circ}=$ __2__。

2. $\cos 30^\circ \times \cos 60^\circ + \sin 30^\circ \times \sin 60^\circ =$ __$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$__。

3. $\left(1+2\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\left(1-\sin\dfrac{\pi}{4}+2\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=$ __$\dfrac{7}{2}$__。

4. $1+\sin^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta=$ __2__。

5. 若 $\tan^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=k\sin 45^\circ\times\cos 45^\circ\times\tan 60^\circ$，則 $k=$ __$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$__。

★ 6. 已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta>\cos\theta$。若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$ __$\dfrac{1}{3}$__。

7. 設 θ 為實數，若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，則 $\tan\theta+\cot\theta=$ __$\dfrac{5}{2}$__。

★ 8. 設 t 是任意實數，若 $x=\dfrac{1-\sin^2 t}{1+\sin^2 t}$，$y=\dfrac{2\sin t}{1+\sin^2 t}$，則 $x^2+y^2=$ __1__。　【統測】

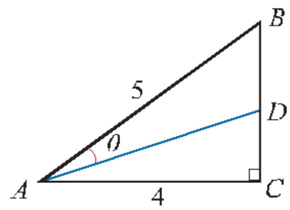
9. 在坐標平面上原點至點 $(\sin 15^\circ, \sin 75^\circ)$ 的距離為 __1__。　【統測】

10. 設 θ、k 為實數，若 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 為方程式 $3x^2+2x+k=0$ 之兩根，則 $k=$ __$-\dfrac{5}{6}$__。

【統測】

2-2 高手過招

1. 直角 $\triangle ABC$ 中，如圖，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，設 $\angle DAB=\theta$，試求 $\tan\theta=$ __$\dfrac{1}{3}$__。



2. 已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，試求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=$ __$\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$__。

3. 化簡 $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\csc\theta)=$ __2__。