2-2 三角函數的定義與性質

重點一 銳角三角函數

1. 銳角三角函數：

定義：在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，且 $\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，如圖：

$\angle A$ 的正弦 $=\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$，

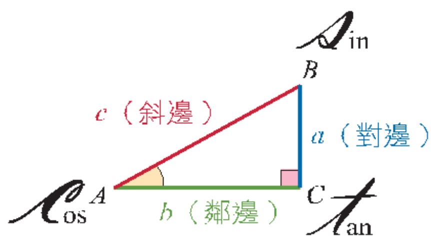
$\angle A$ 的餘弦 $=\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$，

$\angle A$ 的正切 $=\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 對邊}}{\angle A\text{ 鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$，

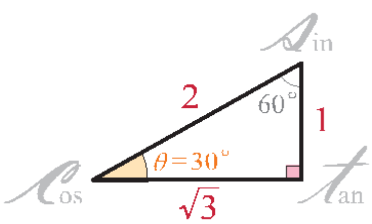
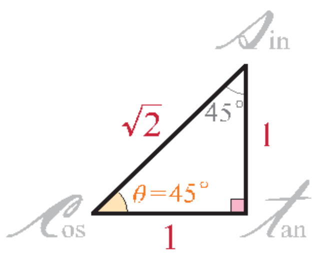
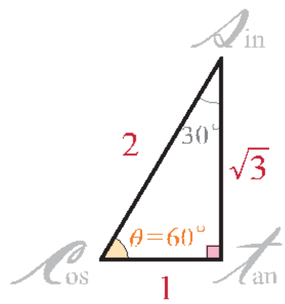
$\angle A$ 的餘切 $=\cot A=\dfrac{\angle A\text{ 鄰邊}}{\angle A\text{ 對邊}}=\dfrac{b}{a}$，

$\angle A$ 的正割 $=\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{ 鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$，

$\angle A$ 的餘割 $=\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{ 對邊}}=\dfrac{c}{a}$。



2. 特別角：

函數／角度	$30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$	$45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$	$60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$
圖示			
sin	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
tan	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
sec	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

1 老師講解　銳角三角函數的定義　學生練習

已知 θ 為銳角且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，試求 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 的值。

想法　銳角三角函數定義：

$\sin\theta=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$，$\cos\theta=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$，$\tan\theta=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$。

已知 θ 為銳角且 $\cot\theta=\dfrac{5}{12}$，試求 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{\sec\theta}{2-\tan\theta}$ 的值。

2 老師講解　特別角的三角函數值　學生練習

試求下列各式的值：

(1) $\sin30^\circ\times\cos45^\circ\times\sec60^\circ\times\csc45^\circ$

(2) $\sin^2 60^\circ+\tan30^\circ\times\cot60^\circ$

想法　熟記特別角之三角函數值。

試求下列各式的值：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}\times\tan\dfrac{\pi}{6}\times\sec\dfrac{\pi}{4}\times\cot\dfrac{\pi}{4}$

(2) $1-\tan^2\dfrac{\pi}{3}\times\sec^2\dfrac{\pi}{6}$

重點二　三角恆等式

1. 三角基本關係式：

(1) 平方關係：

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　② $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$　③ $\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$

(2) 倒數關係：

① $\sin\theta\times\csc\theta=1 \Leftrightarrow \csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

② $\cos\theta\times\sec\theta=1 \Leftrightarrow \sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$

③ $\tan\theta\times\cot\theta=1 \Leftrightarrow \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

(3) 商數關係：

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　② $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(4) 餘角關係：

① $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$，$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

② $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$，$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$

③ $\csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta$，$\sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta$

觀念補充 //

利用下圖之正六邊形來幫助記憶：

倒數關係：

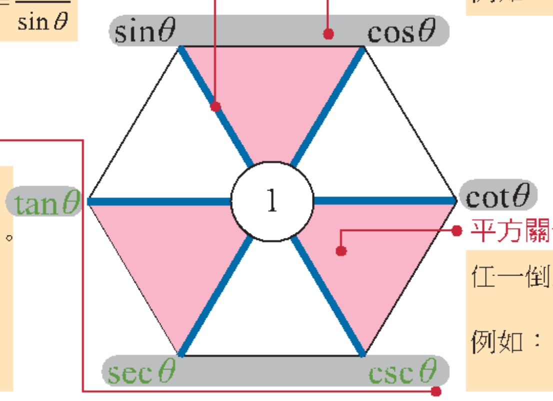
正對面的函數乘積＝1。例如：

$\sin\theta\times\csc\theta=1 \Rightarrow \csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

餘角關係：

同一水平線兩端函數互為餘角關係。

例如：$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$



商數關係：

相鄰三個函數，

中間函數＝兩邊函數乘積。

例如：$\sec\theta=\tan\theta\times\csc\theta$

$\Rightarrow \csc\theta=\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta}$

平方關係：

任一倒三角形ABC，恆有 $A^2+B^2=C^2$。

例如：$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

2. 常見公式：

(1) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$　(2) $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta$

3 老師講解 三角恆等式 學生練習

試求：

(1) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ + \sec^2 50^\circ - \cot^2 40^\circ$

(2) $(\sin 3^\circ - \csc 3^\circ)^2 + (\cos 3^\circ - \sec 3^\circ)^2$

$-(\tan 3^\circ)^2 - (\cot 3^\circ)^2$

想法 平方關係、倒數關係與餘角關係之綜合應用。

試求：

(1) $\cos^2 57^\circ + \cos^2 33^\circ - \csc^2 27^\circ + \cot^2 27^\circ$

(2) $(\sin 83^\circ + \cos 83^\circ)^2 + (\sin 7^\circ - \cos 7^\circ)^2$

4 老師講解 商數關係的應用 學生練習

若 $\tan\theta = \dfrac{1}{3}$，試求 $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta - \cos\theta}$ 之值。

想法 商數關係 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$。

若 $\dfrac{\sin\theta - 3\cos\theta}{2\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{1}{3}$，試求 $\cot\theta$ 之值。

5 老師講解 三角恆等式搭配乘法公式 學生練習

若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，試求：

(1) $\sin\theta\times\cos\theta$ (2) $\tan\theta+\cot\theta$

想法 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$。

已知 $0^\circ\le\theta\le45^\circ$，若 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{5}{2}$，試求：

(1) $\sin\theta+\cos\theta$ (2) $\sin^2\theta-\cos^2\theta$

6 老師講解 三角恆等式搭配根與係數關係 學生練習

若 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 為 $3x^2+4x+7k=0$ 之兩根，試求 k 之值。

想法 α、β 為 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則根與係數關係：$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$。

若 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 為 $5x^2-3x+k=0$ 之兩根，試求 k 之值。

進階例題

7 老師講解 平方關係、餘角關係 學生練習

試求 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$ 之值。

試求 $\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ$ 之值。

8 老師講解 三角恆等式搭配立方公式 學生練習

已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{3}$，試求 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$。

已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，試求 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$。

2-2 段落測驗

★表難題

★ 1. $\dfrac{1}{1+\sin 5^\circ}+\dfrac{1}{1+\tan 10^\circ}+\dfrac{1}{1+\cot 10^\circ}+\dfrac{1}{1+\csc 5^\circ}=$ ＿＿＿＿＿＿。

2. $\cos 30^\circ \times \cos 60^\circ+\sin 30^\circ \times \sin 60^\circ=$ ＿＿＿＿＿＿。

3. $\left(1+2\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\left(1-\sin\dfrac{\pi}{4}+2\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=$ ＿＿＿＿＿＿。

4. $1+\sin^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。

5. 若 $\tan^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=k\sin 45^\circ\times\cos 45^\circ\times\tan 60^\circ$，則 $k=$ ＿＿＿＿＿＿。

★ 6. 已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta>\cos\theta$。若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。

7. 設 θ 為實數，若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，則 $\tan\theta+\cot\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。

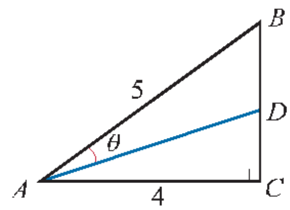
★ 8. 設 t 是任意實數，若 $x=\dfrac{1-\sin^2 t}{1+\sin^2 t}$，$y=\dfrac{2\sin t}{1+\sin^2 t}$，則 $x^2+y^2=$ ＿＿＿＿＿＿。【統測】

9. 在坐標平面上原點至點 $(\sin 15^\circ, \sin 75^\circ)$ 的距離為＿＿＿＿＿＿。【統測】

10. 設 θ、k 為實數，若 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 為方程式 $3x^2+2x+k=0$ 之兩根，則 $k=$ ＿＿＿＿＿＿。【統測】

2-2 高手過招

1. 直角 $\triangle ABC$ 中，如圖，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，設 $\angle DAB=\theta$，試求 $\tan\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。



2. 已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，試求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。

3. 化簡 $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\csc\theta)=$ ＿＿＿＿＿＿。