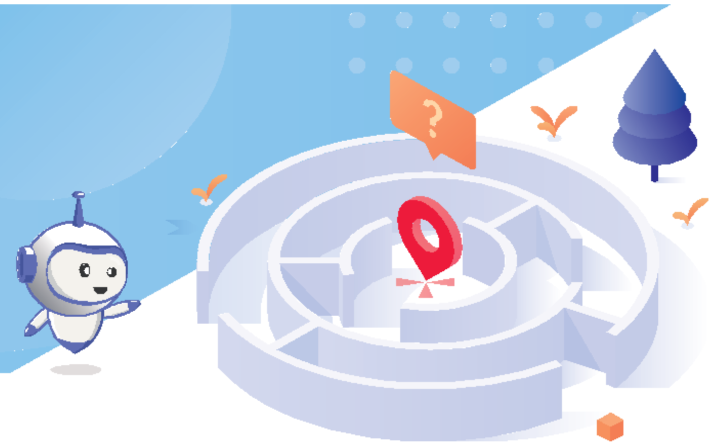
2



三角函數

雲端教室

2-1 有向角及其度量

課綱即時報	
新增	無
刪除	內切圓半徑、外接圓半徑與三角形面積之關係

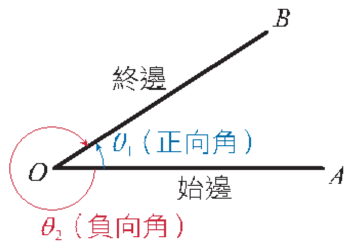
重點一　角度單位

1. 有向角：

在平面上固定一邊為始邊（平行 x 軸正向），另一邊為終邊自由旋轉，觀察始邊與終邊的夾角 θ，如圖，$\overline{OA}$ 為始邊，$\overline{OB}$ 為終邊。

(1) 當始邊至終邊的方向是逆時針旋轉為正向角（例如：θ_1）。

(2) 當始邊至終邊的方向是順時針旋轉為負向角（例如：θ_2）。



2. 角度的度量：

(1) 度度量（六十分制）：

將圓周切成 360 等分，每 1 等分所對之圓心角稱為 1 度，記做 1°；又 1 度 $=60$ 分，1 分 $=60$ 秒，記做 $1^\circ=60'$，$1'=60''$。

(2) 弳度量（弧度制）：

在圓周上取一弧，使其弧長恰等於半徑，此時圓弧所對之圓心角稱為 1 弳。

(3) 弳與度的換算：

$$1\text{ 弳}=\frac{180^\circ}{\pi}\doteqdot 57^\circ 17'\text{；}1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弳}\doteqdot 0.01745\text{弳。}$$

觀念補充 //

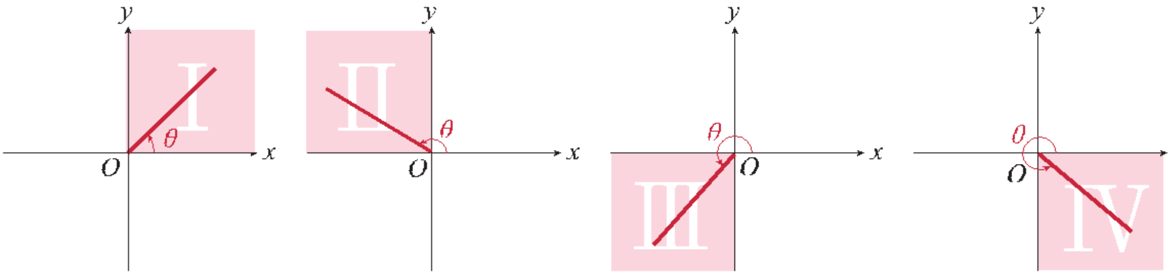
一平角 $1\pi=180^\circ$ $\Rightarrow$ 單位換算：度$\times\dfrac{\pi}{180^\circ}=$弳，弳$\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=$度。

3. 標準位置角：

(1) 坐標平面上以原點為頂點，x 軸正向為始邊的有向角 θ，稱為標準位置角。

(2) 當標準位置角 θ 的終邊恰好落在坐標軸上，則稱 θ 為象限角。

(3) 當標準位置角 θ 的終邊落在第一（二、三、四）象限，則稱 θ 為第一（二、三、四）象限角。



θ 終邊在第一象限　稱 θ 為第一象限角

θ 終邊在第二象限　稱 θ 為第二象限角

θ 終邊在第三象限　稱 θ 為第三象限角

θ 終邊在第四象限　稱 θ 為第四象限角

4. 同界角：

(1) 凡是具有相同始邊與終邊的有向角稱為同界角（例如：30° 與 390°）。

(2) 兩同界角必相差 360° 的整數倍。

(3) 同界角有無限多個，我們只找正同界角中最小者及負同界角中最大者，分別稱為最小正同界角及最大負同界角。

(4) 除 360° 的整數倍外，其餘角度之最小正同界角與最大負同界角恆相差 360°。

1　老師講解　角度換算　學生練習

老師講解

試完成下列各角度換算，度化為弧度，弧度化為度：

(1) 100°　(2) -315°　(3) $\dfrac{7\pi}{12}$　(4) 2

想法　度 $\times\dfrac{\pi}{180^\circ}=$ 弳，弳 $\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=$ 度。

[答：(1) $\dfrac{5\pi}{9}$　(2) $-\dfrac{7\pi}{4}$　(3) 105°　(4) $\dfrac{360^\circ}{\pi}$]

解

(1) $100^\circ=100\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{5\pi}{9}$

(2) $-315^\circ=-315\times\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{7\pi}{4}$

(3) $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{7}{12}\times180^\circ=105^\circ$

(4) $2=2\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=\dfrac{360^\circ}{\pi}$

學生練習

試完成下列各角度換算，度化為弧度，弧度化為度：

(1) 300°　(2) 3°　(3) 3π　(4) 3

[答：(1) $\dfrac{5\pi}{3}$　(2) $\dfrac{\pi}{60}$　(3) 540°　(4) $\dfrac{540^\circ}{\pi}$]

解

(1) $300^\circ=300\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{5\pi}{3}$

(2) $3^\circ=3\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{60}$

(3) $3\pi=3\times180^\circ=540^\circ$

(4) $3=3\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=\dfrac{540^\circ}{\pi}$

2 老師講解　最小正同界角與最大負同界角　學生練習

試判斷下列各角度為第幾象限角並求其最小正同界角與最大負同界角。

(1) $\theta=-1200^\circ$　(2) $\theta=\dfrac{31\pi}{7}$

想法　同界角必相差 360° 的整數倍，且除 360° 的整數倍外，最小正同界角與最大負同界角恆差 360°。

[答：(1) 第三象限角，最小正同界角為 240°，最大負同界角為 -120°

(2) 第一象限角，最小正同界角為 $\dfrac{3\pi}{7}$，最大負同界角為 $-\dfrac{11\pi}{7}$]

解 (1) 最小正同界角為 $360^\circ\times 4-1200^\circ=240^\circ$

而 240° 為第三象限角

其最大負同界角為 $240^\circ-360^\circ=-120^\circ$

(2) 最小正同界角為 $\dfrac{31}{7}\pi-4\pi=\dfrac{3\pi}{7}$

而 $\dfrac{3\pi}{7}$ 為第一象限角

其最大負同界角為 $\dfrac{3\pi}{7}-2\pi=-\dfrac{11\pi}{7}$

試判斷下列各角度為第幾象限角並求其最小正同界角與最大負同界角。

(1) $\theta=1000^\circ$　(2) $\theta=\dfrac{7\pi}{3}$

[答：(1) 第四象限角，最小正同界角為 280°，最大負同界角為 -80°

(2) 第一象限角，最小正同界角為 $\dfrac{\pi}{3}$，最大負同界角為 $-\dfrac{5\pi}{3}$]

解 (1) 最小正同界角為 $1000^\circ-360^\circ\times 2=280^\circ$

而 280° 為第四象限角

其最大負同界角為 $280^\circ-360^\circ=-80^\circ$

(2) 最小正同界角為 $\dfrac{7\pi}{3}-2\pi=\dfrac{\pi}{3}$

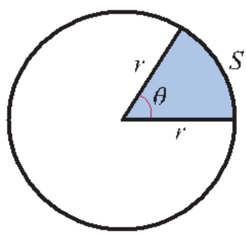
而 $\dfrac{\pi}{3}$ 為第一象限角

其最大負同界角為 $\dfrac{\pi}{3}-2\pi=-\dfrac{5\pi}{3}$

重點二　扇形的弧長與面積

1. 扇形弧長：

如圖所示，設一圓之半徑為 r，取圓上弧長 S，此弧所對之圓心角為 θ，則 $S=r\theta$（θ 代弧度）。



2. 扇形面積：

若扇形之圓心角為 θ（弧度），半徑為 r，則

(1) 扇形面積 $=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}Sr$。

(2) 扇形周長 $=2r+r\theta$。

3 扇形的周長與面積

老師講解

一扇形之周長等於其所在圓周長的一半，若此圓半徑為 4，試求：

(1) 此扇形之圓心角。

(2) 此扇形面積。

想法　扇形弧長 $S=r\theta$，扇形面積 $=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}Sr$。

[答：(1) $\pi-2$　(2) $8(\pi-2)$ 平方單位]

解　設扇形圓心角為 θ

(1) $r\theta+2r=\frac{1}{2}\times 2\pi r$

$\Rightarrow\ \theta+2=\pi$

$\Rightarrow\ \theta=\pi-2$

(2) 扇形面積 $A=\frac{1}{2}\times 4^2(\pi-2)$

$=8(\pi-2)$（平方單位）

學生練習

一扇形之弧長為 8，且其周長值等於其面積值，試求：

(1) 此扇形之圓心角。

(2) 此扇形面積。

[答：(1) 2　(2) 16 平方單位]

解　設扇形圓心角為 θ

(1) $r\theta+2r=\frac{1}{2}r^2\theta$

$\Rightarrow\ \theta+2=\frac{1}{2}r\theta$

$\Rightarrow\ 2+\theta=\frac{1}{2}\times 8$

$\Rightarrow\ \theta=2$

(2) $\because\ r\theta=8$

$\Rightarrow\ r\times 2=8\ \Rightarrow\ r=4$

扇形面積 $A=\frac{1}{2}\times 4^2\times 2$

$=16$（平方單位）

4 扇形面積

老師講解

設鐘面上時針與分針的長度分別為 1 公分、2 公分，試求從上午 4:15 到上午 5:00 這段時間內，分針和時針所掃過的面積比。

想法　分針 1 分鐘走 6°，且扇形面積 $=\frac{1}{2}r^2\theta$。

[答：48：1]

解　分針走 45 分鐘之圓心角

$=45\times 6^\circ=270^\circ=\frac{3\pi}{2}$

面積 $A_1=\frac{1}{2}r_1^2\theta_1=\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{3\pi}{2}=3\pi$

時針走 45 分鐘之圓心角

$=\frac{1}{12}\times 45\times 6^\circ=\frac{\pi}{8}$

面積 $A_2=\frac{1}{2}r_2^2\theta_2=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{16}$

$\therefore\ A_1:A_2=3\pi:\frac{\pi}{16}=48:1$

學生練習

一鐘面上分針的長度為 6 公分，試求從上午 6:20 到上午 7:00 這段時間內，鐘面上分針所掃過的面積為多少平方公分？

[答：24π 平方公分]

解　分針 1 分鐘走 6°

從 6:20 ～ 7:00 的 40 分鐘內

分針所掃過之區域的圓心角

$=6^\circ\times 40=240^\circ=\frac{4\pi}{3}$

故所求面積

$=\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{4\pi}{3}=24\pi$（平方公分）

2-1 段落測驗

★表難題

1. 試完成下列角度換算：

(1) $-960^\circ=$ $-\dfrac{16\pi}{3}$ 弧度。

(2) $\dfrac{23\pi}{6}$ 弧度 $=$ 690 度。

2. 若 $-\dfrac{25\pi}{6}$ 之最大負同界角為 α 弧度，最小正同界角為 β 弧度，則 $(\alpha,\beta)=$ $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right)$ 。

3. 若三角形三內角度數的比為 5：6：7，則此三角形的最大內角為 $\dfrac{7\pi}{18}$ 弧度。

4. 在 9 點 30 分時，時鐘的時針與分針所夾的較小角為 $\dfrac{7\pi}{12}$ 弧度。

5. 10 弳為第 三 象限角。

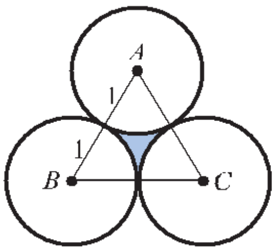
6. 半徑為 2 的扇形區域，其面積為 5 平方單位，則此扇形之周長為 9 。

7. 已知一扇形之面積與其圓心角所對應之弧長相等，則此扇形半徑為 2 。

8. 長 20 公分之單擺下端在弧長為 5 公分之圓弧上擺動，則此單擺所掃過的區域面積為 50 平方公分。

★ 9. 某人在圓形跑道上作等速率運動，每分鐘經過弧長所對之圓心角為 3 弳，若跑 1760 公尺共需 4 分 $53\dfrac{1}{3}$ 秒，則此圓形軌道半徑長為 120 公尺。

★10. 如圖，設半徑為 1 的三個圓互相外切，則此三個圓間所圍成的區域面積為 $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}$ 平方單位。



2-1 高手過招

1. 如圖，將一頂聖誕帽（直圓錐狀）沿斜高截開張成一扇形，已知底圓半徑為 5 公分，圓錐的高為 12 公分，則扇形的圓心角 $\theta=$ $\dfrac{10\pi}{13}$ 。