1-4 》一元二次不等式

重點一　一元二次不等式

1. 一元一次不等式：

設 $a \neq 0$，使 $ax - b > 0$（或 ≥ 0）成立之 x 值。

(1) 若 $a > 0$，則 $x > \dfrac{b}{a}$（或 $x \geq \dfrac{b}{a}$）。

(2) 若 $a < 0$，則 $x < \dfrac{b}{a}$（或 $x \leq \dfrac{b}{a}$）。

2. 一元二次不等式：

設 $a > 0$，使 $ax^2 + bx + c > 0$（或 ≥ 0）及 $ax^2 + bx + c < 0$（或 ≤ 0）成立之 x 值。

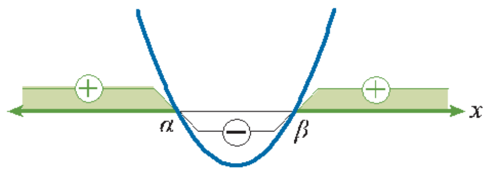
(1) 當判別式 $b^2 - 4ac > 0$：原二次不等式先因式分解化成下列形式（設 $\alpha < \beta$）。

① $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$ 的解為 $x > \beta$ 或 $x < \alpha$。

② $(x-\alpha)(x-\beta) \geq 0$ 的解為 $x \geq \beta$ 或 $x \leq \alpha$。

③ $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$ 的解為 $\alpha < x < \beta$。

④ $(x-\alpha)(x-\beta) \leq 0$ 的解為 $\alpha \leq x \leq \beta$。



(2) 當判別式 $b^2 - 4ac = 0$：原二次不等式可配方成完全平方式 $a(x-\alpha)^2$。

① $(x-\alpha)^2 > 0$，其解為任意實數，但 $x \neq \alpha$。

② $(x-\alpha)^2 \geq 0$，其解為任意實數。

③ $(x-\alpha)^2 < 0$，原不等式無解。

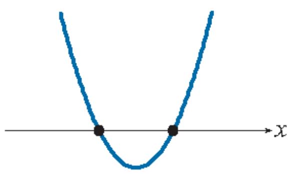
④ $(x-\alpha)^2 \leq 0$，其解為 $x = \alpha$。

(3) 當判別式 $b^2 - 4ac < 0$：原二次不等式無法因式分解，改採二次函數的恆正、恆負觀念處理。

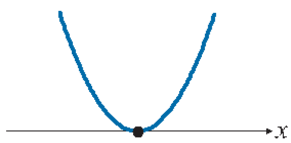
3. 二次函數的恆正、恆負：

二次函數 $ax^2 + bx + c$

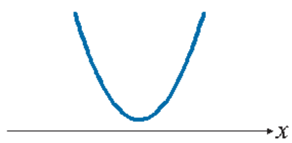
(1) 若 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$，則 $ax^2 + bx + c > 0$ 恆成立（恆正）。依圖形判斷：



$b^2 - 4ac > 0$

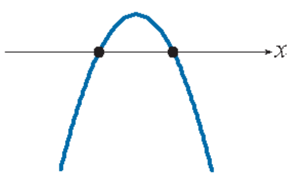


$b^2 - 4ac = 0$

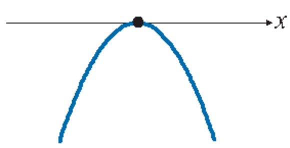


$b^2 - 4ac < 0$

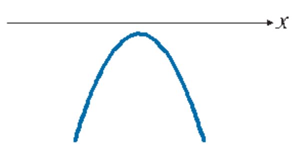
(2) 若 $a < 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$，則 $ax^2 + bx + c < 0$ 恆成立（恆負）。依圖形判斷：



$b^2 - 4ac > 0$



$b^2 - 4ac = 0$



$b^2 - 4ac < 0$

1 老師講解　解一元一次不等式　學生練習

試求不等式 $3\left(\frac{x}{2}+1\right) \le 4(x+2)$ 之解為何？

想法　$ax-b\le 0$ 成立之 x 值：
若 $a>0$，則 $x\le\frac{b}{a}$；若 $a<0$，則 $x\ge\frac{b}{a}$。

[答：$x\ge -2$]

解　原式 $\Rightarrow \frac{3x}{2}+3\le 4x+8$

$\Rightarrow 3-8\le 4x-\frac{3x}{2}$

$\Rightarrow -5\le\frac{5x}{2}$

$\Rightarrow x\ge -2$

試解不等式 $\frac{1}{3}(x-1) > \frac{1}{2}(x+4)+\frac{1}{6}$。

[答：$x<-15$]

解　原式

$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}(x-1)\right]\times 6 > \left[\frac{1}{2}(x+4)+\frac{1}{6}\right]\times 6$

$\Rightarrow 2x-2 > 3x+12+1$

$\Rightarrow x<-15$

2 老師講解　解一元二次不等式且判別式 $b^2-4ac>0$　學生練習

試求下列不等式之解：

(1) $x^2+x-20>0$

(2) $2x^2-5x+2\le 0$

想法　原式可因式分解，設 $\alpha<\beta$，則：
(1) 不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 的解為 $x>\beta$ 或 $x<\alpha$。
(2) 不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 的解為 $\alpha<x<\beta$。

[答：(1) $x>4$ 或 $x<-5$　(2) $\frac{1}{2}\le x\le 2$]

解　因判別式 $b^2-4ac>0$

(1) 因式分解 $x^2+x-20=(x+5)(x-4)$

$\Rightarrow (x+5)(x-4)>0$

$\Rightarrow x>4$ 或 $x<-5$

(2) 因式分解 $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

$\Rightarrow (2x-1)(x-2)\le 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\le x\le 2$

試求下列不等式之解：

(1) $15+x-2x^2<0$

(2) $-3x^2+2x+5>0$

[答：(1) $x>3$ 或 $x<-\frac{5}{2}$　(2) $-1<x<\frac{5}{3}$]

解　因判別式 $b^2-4ac>0$

(1) 原式變號再因式分解

$\Rightarrow 2x^2-x-15>0$

$\Rightarrow (x-3)(2x+5)>0$

$\Rightarrow x>3$ 或 $x<-\frac{5}{2}$

(2) 原式變號再因式分解

$\Rightarrow 3x^2-2x-5<0$

$\Rightarrow (3x-5)(x+1)<0$

$\Rightarrow -1<x<\frac{5}{3}$

3 老師講解 解一元二次不等式且判別式 $b^2-4ac>0$ 學生練習

解不等式 $x^2+x-1\le 0$。

想法 原式不能因式分解，需倚賴公式解抓零點。

[答：$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$]

解 此題不能因式分解

當 $x^2+x-1=0$ 時之公式解為

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

故原不等式可分解為

$$\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\le 0$$

$\therefore$ $x^2+x-1\le 0$ 其解為

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

試求不等式 $x^2-4x-1>0$ 之解。

[答：$x>2+\sqrt{5}$ 或 $x<2-\sqrt{5}$]

解 此題不能因式分解

當 $x^2-4x-1=0$ 時之公式解為

$x=2\pm\sqrt{5}$

故原不等式可分解為

$$\left[x-\left(2+\sqrt{5}\right)\right]\left[x-\left(2-\sqrt{5}\right)\right]>0$$

$\therefore$ $x^2-4x-1>0$ 之解為

$x>2+\sqrt{5}$ 或 $x<2-\sqrt{5}$

4 老師講解 解一元二次不等式且判別式 $b^2-4ac=0$ 學生練習

試解不等式 $x^2+4x+30\le 5-6x$。

想法 若判別式 $b^2-4ac=0$，則原式可配成完全平方式。

[答：$x=-5$]

解 原式移項整理得 $x^2+10x+25\le 0$

因 $x^2+10x+25=0$ 之判別式 $b^2-4ac=0$

則原式化成 $x^2+10x+25=(x+5)^2\le 0$

$\therefore$ 只有 $x=-5$ 成立

試解不等式 $9x^2+x+5>7x+4$。

[答：x 為所有實數但 $x\ne\dfrac{1}{3}$]

解 原式移項整理得 $9x^2-6x+1>0$

因 $9x^2-6x+1=0$ 之判別式 $b^2-4ac=0$

則原式化成 $9x^2-6x+1=(3x-1)^2>0$

$\therefore$ x 為所有實數但 $x\ne\dfrac{1}{3}$

5 老師講解　已知解回推一元二次不等式（$b^2-4ac>0$）　學生練習

設 a、b 為實數，若不等式 $ax^2+bx-5<0$ 的解為 $-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$，求 $a+b=$？

想法　若不等式的解為 $\alpha<x<\beta$，則反推原二次不等式滿足 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$。

[答：$\frac{5}{3}$]

解　$\because\ -\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$

反推原二次不等式滿足

$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)<0$

$\Rightarrow\ (2x+3)(3x-5)<0$

$\Rightarrow\ 6x^2-x-15<0$

即 $2x^2-\frac{1}{3}x-5<0$

與 $ax^2+bx-5<0$ 比較係數

得 $a=2$，$b=-\frac{1}{3}$　$\therefore\ a+b=\frac{5}{3}$

已知二次不等式 $ax^2+bx+12\geq 0$ 的解為 $-\frac{4}{3}\leq x\leq\frac{3}{2}$，試求 a、b 的值。

[答：$a=-6$，$b=1$]

解　$\because\ -\frac{4}{3}\leq x\leq\frac{3}{2}$

反推原二次不等式滿足

$\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\leq 0$

$\Rightarrow\ (3x+4)(2x-3)\leq 0$

$\Rightarrow\ 6x^2-x-12\leq 0$

將不等式變號得 $-6x^2+x+12\geq 0$

與 $ax^2+bx+12\geq 0$ 比較係數

得 $a=-6$，$b=1$

6 老師講解　解一元二次不等式且判別式 $b^2-4ac<0$　學生練習

試求下列不等式之解：

(1) $x^2-x+1\geq 0$

(2) $x^2-2x+3<0$

想法　當判別式 $b^2-4ac<0$ 時，依恆正或恆負函數觀念判斷。

[答：(1) 所有實數　(2) 無實數解]

解　(1) 因 $x^2-x+1=0$ 之判別式 $b^2-4ac<0$

無法因式分解，改用配方法得

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}\geq\frac{3}{4}$

（原式恆正）

故 $x^2-x+1\geq 0$ 的解為所有實數

(2) 因 $x^2-2x+3=0$ 之判別式 $b^2-4ac<0$

無法因式分解，改用配方法得

$x^2-2x+3=(x-1)^2+3-1\geq 2$

（原式恆正）

故 $x^2-2x+3<0$ 無實數解

試求下列不等式之解：

(1) $2x^2-x+3\leq 0$

(2) $x^2+3x+9>0$

[答：(1) 無實數解　(2) 所有實數]

解　(1) 因 $2x^2-x+3=0$ 之判別式 $b^2-4ac<0$

無法因式分解，改用配方法得

$2x^2-x+3$

$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+3-2\times\frac{1}{16}\geq\frac{23}{8}$

（原式恆正）

故 $2x^2-x+3\leq 0$ 無實數解

(2) 因 $x^2+3x+9=0$ 之判別式 $b^2-4ac<0$

無法因式分解，改用配方法得

x^2+3x+9

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+9-\frac{9}{4}\geq\frac{27}{4}$

（原式恆正）

故 $x^2+3x+9>0$ 的解為所有實數

7　老師講解　二次函數的恆正性質　學生練習

老師講解

若 k 為實數，對所有 x 均使 $kx^2+4x+(k+3)$ 恆正，試求 k 的範圍。

想法　二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$，則函數恆正。

[答：$k>1$]

解　$\because$ 原式恆正

$\therefore$ $k>0$

且 $b^2-4ac=4^2-4k(k+3)<0$

$\Rightarrow$ $16-4k^2-12k<0$

$\Rightarrow$ $k^2+3k-4>0$

$\Rightarrow$ $(k+4)(k-1)>0$

$\Rightarrow$ $k>1$ 或 $k<-4$（不合）

故取 $k>1$

學生練習

若 k 為實數，對所有 x 均使 kx^2+5x+k 之值恆正，則 k 的範圍為何？

[答：$k>\frac{5}{2}$]

解　$\because$ 原式恆正

$\therefore$ $k>0$

且判別式 $b^2-4ac<0$

$\Rightarrow$ $5^2-4k\times k<0$

$\Rightarrow$ $4k^2-25>0$

$\Rightarrow$ $(2k+5)(2k-5)>0$

$\Rightarrow$ $k>\frac{5}{2}$ 或 $k<-\frac{5}{2}$（不合）

故取 $k>\frac{5}{2}$

重點二　絕對值不等式與分式不等式

1. 絕對值不等式的解法：

(1) 設 $a>0$，則 $|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$。

(2) 設 $k\geq 0$，則 $|f(x)|\geq k \Leftrightarrow f(x)\geq k$ 或 $f(x)\leq -k$。

(3) 兩邊含絕對值，則兩邊平方去絕對值：$|f(x)|\geq|g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2\geq[g(x)]^2$。

2. 分式不等式：

型如 $\frac{g(x)}{f(x)}>0$（或 <0）成立之 x 值。

滿足 $\frac{g(x)}{f(x)}>0 \Leftrightarrow g(x)\cdot f(x)>0$ 或 $\frac{g(x)}{f(x)}<0 \Leftrightarrow g(x)\cdot f(x)<0$。（但答案不能使分母為 0）

例如：$\frac{x-1}{x-2}<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)<0$。

觀念補充 //

求 $\frac{g(x)}{f(x)}<1$ 時不可交叉相乘變 $g(x)<f(x)$，要移項解之 $\Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)}-1<0$，再通分。

8 老師講解　解絕對值不等式　學生練習

解$|2x-5|\le|x+4|$。

想法　兩邊平方去絕對值，化成一元二次不等式。

［答：$\frac{1}{3}\le x\le 9$］

解　兩邊平方去絕對值

$\Rightarrow (2x-5)^2\le(x+4)^2$

$\Rightarrow 4x^2-20x+25\le x^2+8x+16$

$\Rightarrow 3x^2-28x+9\le 0$

$\Rightarrow (3x-1)(x-9)\le 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\le x\le 9$

解$|4x-3|>|3x+1|$。

［答：$x>4$或$x<\frac{2}{7}$］

解　兩邊平方去絕對值

$\Rightarrow (4x-3)^2>(3x+1)^2$

$\Rightarrow 16x^2-24x+9>9x^2+6x+1$

$\Rightarrow 7x^2-30x+8>0$

$\Rightarrow (7x-2)(x-4)>0$

$\Rightarrow x>4$或$x<\frac{2}{7}$

9 老師講解　解分式不等式　學生練習

試求分式不等式$\frac{2x-3}{x+2}\le 0$之解。

想法　$\frac{g(x)}{f(x)}<0 \Leftrightarrow g(x)f(x)<0$（但答案不可使分母為 0）。

［答：$-2<x\le\frac{3}{2}$］

解　原式

$\Rightarrow (2x-3)(x+2)\le 0$

$\Rightarrow -2\le x\le\frac{3}{2}$

但$x=-2$不合（使分母為 0）

故$-2<x\le\frac{3}{2}$

試求分式不等式$\frac{3x+7}{x-1}\ge 0$之解。

［答：$x>1$或$x\le-\frac{7}{3}$］

解　原式

$\Rightarrow (3x+7)(x-1)\ge 0$

$\Rightarrow x\ge 1$或$x\le-\frac{7}{3}$

但$x=1$不合（使分母為 0）

故$x>1$或$x\le-\frac{7}{3}$

1-4 段落測驗

★表難題

1. 滿足一次不等式 $2x-\frac{x+1}{2}\geq\frac{7}{3}+\frac{3x-1}{6}$ 的最小整數 $x=$ ___3___。

2. 一次不等式 $x>3x-4\geq-2x+1$ 之解為 ___$1\leq x<2$___。

3. 不等式 $-6x^2-x+2\geq0$ 之解為 ___$-\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{1}{2}$___。

4. 不等式 $x^2-x-3\leq0$ 的解為 ___$\frac{1-\sqrt{13}}{2}\leq x\leq\frac{1+\sqrt{13}}{2}$___。

5. 設 x、a 均為實數，若 x 的二次不等式 $ax^2-2ax+2a-3<0$ 之解為 $-1<x<3$，則 $a=$ ___$\frac{3}{5}$___。

6. $|x-1|>|3x+2|$ 之解為 ___$-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{4}$___。

7. 分式不等式 $\frac{2x+5}{x+4}\leq1$ 之解為 ___$-4<x\leq-1$___。

8. 不等式 $3x^2-3x\leq6$ 之解為 ___$-1\leq x\leq2$___。【統測】

9. 不等式 $|x+5|\geq|2-x|$ 的解為 ___$x\geq-\frac{3}{2}$___。【統測】

10. 設 a、b 為實數，若不等式 $ax^2-4x+b<0$ 之解為 $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$，則 $a+b=$ ___$-\frac{1}{2}$___。【統測】

1-4 高手過招

1. 已知函數 $f(x)=(x^2+4x+5)(x^2-2x-3)$，若 $f(x)<0$，則 x 之範圍為 ___$-1<x<3$___。

2. 滿足不等式 $\frac{(x-1)^2(x+3)}{x-2}<0$ 的整數解共有 ___3___ 個。【統測】