

1-4 一元二次不等式

重點一 一元二次不等式

1. 一元一次不等式：

設 $a \neq 0$ ，使 $ax - b > 0$ （或 ≥ 0 ）成立之 x 值。

(1) 若 $a > 0$ ，則 $x > \frac{b}{a}$ （或 $x \geq \frac{b}{a}$ ）。

(2) 若 $a < 0$ ，則 $x < \frac{b}{a}$ （或 $x \leq \frac{b}{a}$ ）。

2. 一元二次不等式：

設 $a > 0$ ，使 $ax^2 + bx + c > 0$ （或 ≥ 0 ）及 $ax^2 + bx + c < 0$ （或 ≤ 0 ）成立之 x 值。

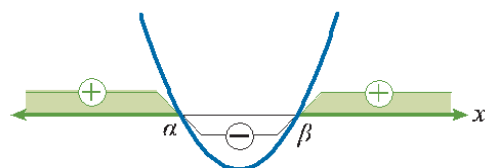
(1) 當判別式 $b^2 - 4ac > 0$ ：原二次不等式先因式分解化成下列形式（設 $\alpha < \beta$ ）。

① $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ 的解為 $x > \beta$ 或 $x < \alpha$ 。

② $(x - \alpha)(x - \beta) \geq 0$ 的解為 $x \geq \beta$ 或 $x \leq \alpha$ 。

③ $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ 的解為 $\alpha < x < \beta$ 。

④ $(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0$ 的解為 $\alpha \leq x \leq \beta$ 。



(2) 當判別式 $b^2 - 4ac = 0$ ：原二次不等式可配方成完全平方式 $a(x - \alpha)^2$ 。

① $(x - \alpha)^2 > 0$ ，其解為任意實數，但 $x \neq \alpha$ 。

② $(x - \alpha)^2 \geq 0$ ，其解為任意實數。

③ $(x - \alpha)^2 < 0$ ，原不等式無解。

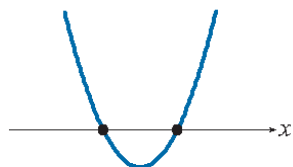
④ $(x - \alpha)^2 \leq 0$ ，其解為 $x = \alpha$ 。

(3) 當判別式 $b^2 - 4ac < 0$ ：原二次不等式無法因式分解，改採二次函數的恆正、恆負觀念處理。

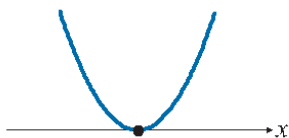
3. 二次函數的恆正、恆負：

二次函數 $ax^2 + bx + c$

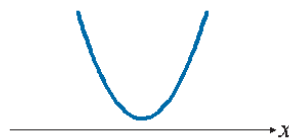
(1) 若 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ ，則 $ax^2 + bx + c > 0$ 恆成立（恆正）。依圖形判斷：



$$b^2 - 4ac > 0$$

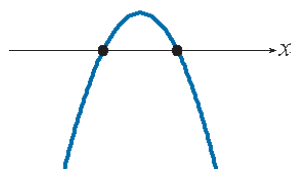


$$b^2 - 4ac = 0$$

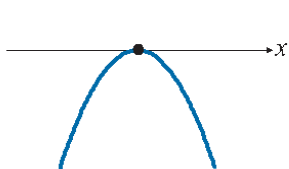


$$b^2 - 4ac < 0$$

(2) 若 $a < 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ ，則 $ax^2 + bx + c < 0$ 恆成立（恆負）。依圖形判斷：



$$b^2 - 4ac > 0$$



$$b^2 - 4ac = 0$$



$$b^2 - 4ac < 0$$

試求不等式 $3\left(\frac{x}{2}+1\right) \leq 4(x+2)$ 之解為何？

$ax - b \leq 0$ 成立之 x 值：

想法 若 $a > 0$ ，則 $x \leq \frac{b}{a}$ ；若 $a < 0$ ，則 $x \geq \frac{b}{a}$ 。

試解不等式 $\frac{1}{3}(x-1) > \frac{1}{2}(x+4) + \frac{1}{6}$ 。

試求下列不等式之解：

(1) $x^2 + x - 20 > 0$

(2) $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$

原式可因式分解，設 $\alpha < \beta$ ，則：

(1) 不等式 $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ 的解為 $x > \beta$

或 $x < \alpha$ 。

(2) 不等式 $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ 的解為 $\alpha < x < \beta$ 。

試求下列不等式之解：

(1) $15 + x - 2x^2 < 0$

(2) $-3x^2 + 2x + 5 > 0$

3

老師講解

解一元二次不等式且判別式 $b^2 - 4ac > 0$

學生練習

解不等式 $x^2 + x - 1 \leq 0$ 。

想法 原式不能因式分解，需倚賴公式解抓零點。

試求不等式 $x^2 - 4x - 1 > 0$ 之解。

4

老師講解

解一元二次不等式且判別式 $b^2 - 4ac = 0$

學生練習

試解不等式 $x^2 + 4x + 30 \leq 5 - 6x$ 。

想法 若判別式 $b^2 - 4ac = 0$ ，則原式可配成完全平方式。

試解不等式 $9x^2 + x + 5 > 7x + 4$ 。

C

1

5

老師講解

已知解回推一元二次不等式 ($b^2 - 4ac > 0$)

學生練習

設 a 、 b 為實數，若不等式 $ax^2 + bx - 5 < 0$ 的解為 $-\frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$ ，求 $a + b = ?$

想法

若不等式的解為 $\alpha < x < \beta$ ，則反推原二次不等式滿足 $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ 。

已知二次不等式 $ax^2 + bx + 12 \geq 0$ 的解為 $-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$ ，試求 a 、 b 的值。

6

老師講解

解一元二次不等式且判別式 $b^2 - 4ac < 0$

學生練習

試求下列不等式之解：

(1) $x^2 - x + 1 \geq 0$

(2) $x^2 - 2x + 3 < 0$

想法

當判別式 $b^2 - 4ac < 0$ 時，依恆正或恆負函數觀念判斷。

試求下列不等式之解：

(1) $2x^2 - x + 3 \leq 0$

(2) $x^2 + 3x + 9 > 0$

7

老師講解

二次函數的恆正性質

學生練習

若 k 為實數，對所有 x 均使 $kx^2 + 4x + (k + 3)$ 恆正，試求 k 的範圍。

想法

二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，
若 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ ，則函數恆正。

若 k 為實數，對所有 x 均使 $kx^2 + 5x + k$ 之值恆正，則 k 的範圍為何？

重點二 絕對值不等式與分式不等式

1. 絕對值不等式的解法：

(1) 設 $a > 0$ ，則 $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$ 。

(2) 設 $k \geq 0$ ，則 $|f(x)| \geq k \Leftrightarrow f(x) \geq k$ 或 $f(x) \leq -k$ 。

(3) 兩邊含絕對值，則兩邊平方去絕對值： $|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 \geq [g(x)]^2$ 。

2. 分式不等式：

型如 $\frac{g(x)}{f(x)} > 0$ (或 < 0) 成立之 x 值。

滿足 $\frac{g(x)}{f(x)} > 0 \Leftrightarrow g(x) \cdot f(x) > 0$ 或 $\frac{g(x)}{f(x)} < 0 \Leftrightarrow g(x) \cdot f(x) < 0$ 。(但答案不能使分母為 0)

例如： $\frac{x-1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) < 0$ 。



觀念補充 //

求 $\frac{g(x)}{f(x)} < 1$ 時不可交叉相乘變 $g(x) < f(x)$ ，要移項解之 $\Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)} - 1 < 0$ ，再通分。

C

1

8

老師講解

解絕對值不等式

學生練習

解 $|2x - 5| \leq |x + 4|$ 。

想法 兩邊平方去絕對值，化成一元二次不等式。

解 $|4x - 3| > |3x + 1|$ 。

9

老師講解

解分式不等式

學生練習

試求分式不等式 $\frac{2x - 3}{x + 2} \leq 0$ 之解。

想法 $\frac{g(x)}{f(x)} < 0 \Leftrightarrow g(x)f(x) < 0$ (但答案不可使分母為 0)。

試求分式不等式 $\frac{3x + 7}{x - 1} \geq 0$ 之解。

1-4 段落測驗

★ 必難題

1. 滿足一次不等式 $2x - \frac{x+1}{2} \geq \frac{7}{3} + \frac{3x-1}{6}$ 的最小整數 $x =$ _____。
2. 一次不等式 $x > 3x - 4 \geq -2x + 1$ 之解為 _____。
3. 不等式 $-6x^2 - x + 2 \geq 0$ 之解為 _____。
4. 不等式 $x^2 - x - 3 \leq 0$ 之解為 _____。
5. 設 x 、 a 均為實數，若 x 的二次不等式 $ax^2 - 2ax + 2a - 3 < 0$ 之解為 $-1 < x < 3$ ，則 $a =$ _____。
6. $|x - 1| > |3x + 2|$ 之解為 _____。
7. 分式不等式 $\frac{2x+5}{x+4} \leq 1$ 之解為 _____。
8. 不等式 $3x^2 - 3x \leq 6$ 之解為 _____。 【統測】
9. 不等式 $|x + 5| \geq |2 - x|$ 之解為 _____。 【統測】
10. 設 a 、 b 為實數，若不等式 $ax^2 - 4x + b < 0$ 之解為 $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$ ，則 $a + b =$ _____。 【統測】

1-4 高手過招

1. 已知函數 $f(x) = (x^2 + 4x + 5)(x^2 - 2x - 3)$ ，若 $f(x) < 0$ ，則 x 之範圍為 _____。
2. 滿足不等式 $\frac{(x-1)^2(x+3)}{x-2} < 0$ 的整數解共有 _____ 個。 【統測】