

1-3 函數及其圖形

重點一 函數的定義和圖形

1. 函數的定義：

f 是某種運算，關於兩個變量 x 、 y ，當變數 x 經由 f 運算後，所得的 y 值會被唯一確定，則稱 y 是 x 的函數，記為 $y = f(x)$ ，其中 x 為自變數， y 為應變數。討論 x 能代入運算的範圍稱為定義域，代入運算後所得 y 值的範圍稱為值域。



觀念補充 //

- ① 函數視為一種對應關係，把定義域 A 中的變數 x 經由 f 對應到對應域 B 中的某數 y ，則稱 f 是一個從 A 對應到 B 的函數，記為 $f: A \rightarrow B$ ；而 B 中真的被對應到的 $f(A)$ 稱為值域。
- ② 函數對應關係可以是一對一、多對一，但絕不可以是一對多或一對無。

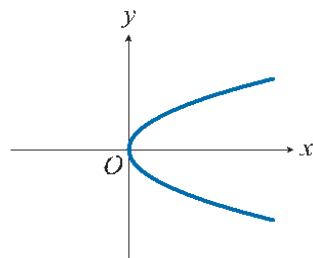
2. 函數圖形：

函數 $f(x)$ ，將定義域中所有 x 值與其函數值 $f(x)$ 形成的點坐標 $(x, f(x))$ 描繪在坐標平面上，便可得到 $y = f(x)$ 的圖形。



觀念補充 //

垂直 x 軸的任意直線與函數圖形至多只能交於一點，所以形如右圖是方程式圖形，非函數圖形。



3. 線型函數及其圖形：

形如 $f(x) = ax + b$ (a 、 b 是實數) 的圖形為一直線，稱為線型函數，說明如下：

- (1) 若 $a \neq 0$ ，稱為一次函數 (例如 $y = f(x) = 2x + 1$)，其圖形為一直線。
- (2) 若 $a = 0$ ，稱為常數函數，其圖形為一水平線，又分以下兩種情形：
 - ① $b \neq 0$ ，稱為零次函數 (例如 $y = f(x) = 3$)，其圖形是平行 x 軸的直線。
 - ② $b = 0$ ，稱為零函數 (即 $y = f(x) = 0$)，其圖形就是 x 軸。

4. 二次函數及其圖形：

設 $a \neq 0$ ， $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 為二次函數（例如 $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$ ），其圖形為拋物線。

經配方後得 $y = a(x - h)^2 + k$ ，其中頂點坐標 $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ 。



觀念補充 //

配方法：

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + c$$

x^2 係數 a 強迫提出來後，補上 x 項係數一半的平方

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

5. 二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 之重要性質：

(1) 對稱軸為 $x = -\frac{b}{2a}$ 。

(2) $|a|$ 愈大，開口愈小。

① $a > 0$ 時，開口向上。

當 $x = -\frac{b}{2a}$ 時， y 有最小值 $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ 。

② $a < 0$ 時，開口向下。

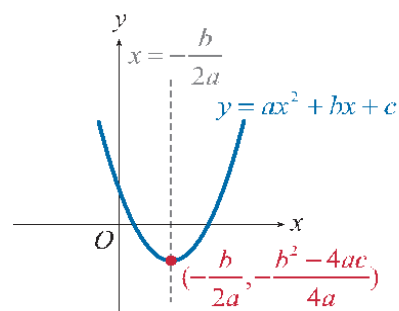
當 $x = -\frac{b}{2a}$ 時， y 有最大值 $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ 。

(3) 令判別式 $D = b^2 - 4ac$

① 當 $D > 0$ 時，圖形與 x 軸有兩個交點。

② 當 $D = 0$ 時，圖形與 x 軸交於一點。

③ 當 $D < 0$ 時，圖形與 x 軸不相交。



將上述歸納如下表：

| | $b^2 - 4ac > 0$ | $b^2 - 4ac = 0$ | $b^2 - 4ac < 0$ |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $a > 0$ | | | |
| $a < 0$ | | | |

6. 函數的平移：

- (1) $y - k = f(x - h)$ 的圖形是將 $y = f(x)$ 的圖形右移 h 單位，上移 k 單位。
 (2) $y + k = f(x + h)$ 的圖形是將 $y = f(x)$ 的圖形左移 h 單位，下移 k 單位。

1

老師講解

分段函數求值

學生練習

$$\text{設分段函數 } f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x > 3 \\ 4x^2 - 1, & x \leq 3 \end{cases},$$

試求 $f(5) + f(0) = ?$

想法

分段函數求值，選擇定義域中不同範圍的 x 值，代入所相應之函數。

[答：16]

$$\begin{aligned} \text{解 } f(5) &= 3 \times 5 + 2 = 17 \\ f(0) &= 0 - 1 = -1 \\ \Rightarrow f(5) + f(0) &= 16 \end{aligned}$$

$$\text{設分段函數 } f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases},$$

試求 $f(4) + f(1) = ?$

[答：7]

$$\begin{aligned} \text{解 } f(4) &= 5 \\ f(1) &= 1 + 1^2 = 2 \\ \Rightarrow f(4) + f(1) &= 5 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

2

老師講解

一次函數求值

學生練習

設線型函數 $f(x)$ ，若 $f(1) = 5$ ，
 $f(6) = 20$ ， $f(k) = 14$ ，則 k 之值為何？

想法

依條件求出一一次函數 $f(x) = ax + b$ 。

[答：4]

$$\begin{aligned} \text{解 } \text{令 } f(x) &= ax + b \\ \begin{cases} f(1) = a + b = 5 \\ f(6) = 6a + b = 20 \end{cases} \\ \text{解得 } a &= 3, b = 2 \\ \therefore f(x) &= 3x + 2 \\ \text{又 } f(k) &= 3k + 2 = 14 \\ \text{故 } k &= 4 \end{aligned}$$

已知一次函數 $y = f(x)$ 之圖形過 $(0, 3)$ 、
 $(3, 9)$ ，則 $f(1) = ?$

[答：5]

$$\begin{aligned} \text{解 } \text{令 } f(x) &= ax + b \\ \begin{cases} f(0) = 3 \Rightarrow b = 3 \\ f(3) = 9 \Rightarrow 3a + b = 9 \end{cases} \\ \text{解得 } a &= 2 \\ \therefore f(x) &= 2x + 3 \\ \text{故 } f(1) &= 2 \times 1 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

C

1

設 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，若 $f(1) = 6$ ，
 $f(0) = 3$ ，則 $f(2) = ?$

想法 依條件求出二次函數 $f(x) = x^2 + ax + b$ 。

[答：11]

解
$$\begin{cases} f(1) = 1 + a + b = 6 \\ f(0) = b = 3 \end{cases}$$
 解得 $a = 2, b = 3$
 $\therefore f(x) = x^2 + 2x + 3$
 故 $f(2) = 2^2 + 2 \times 2 + 3$
 $= 11$

已知二次函數 $f(x) = x^2 + mx + n$ 之圖形通過 $(0, 2)$ 、 $(-1, 0)$ ，則 $f(-2)$ 之值為何？

[答：0]

解
$$\begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow n = 2 \\ f(-1) = 0 \Rightarrow 1 - m + n = 0 \end{cases}$$
 解得 $m = 3, n = 2$
 $\therefore f(x) = x^2 + 3x + 2$
 故 $f(-2) = (-2)^2 + 3 \times (-2) + 2$
 $= 0$

二次函數 $y = f(x)$ 其圖形通過 $(3, 4)$ ，且
 $y = f(2) = 3$ 為最小值，試求 $f(x) = ?$

想法 二次函數之最大值或最小值發生在頂點。

[答： $f(x) = x^2 - 4x + 7$]

解 由 $f(2) = 3$ 為最小值
 令 $f(x) = a(x-2)^2 + 3$
 因圖形通過 $(3, 4)$ ，則
 $f(3) = 4 \Rightarrow a(3-2)^2 + 3 = 4$
 $\Rightarrow a = 1$
 故 $f(x) = (x-2)^2 + 3$
 $= x^2 - 4x + 4 + 3$
 $= x^2 - 4x + 7$

二次函數以 $(-1, -8)$ 為頂點，且與 y 軸交於 $(0, -6)$ ，試求此二次函數。

[答： $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$]

解 由 $(-1, -8)$ 為頂點
 令 $f(x) = a(x+1)^2 - 8$
 因圖形通過 $(0, -6)$ ，則
 $f(0) = -6 \Rightarrow a - 8 = -6$
 $\Rightarrow a = 2$
 故 $f(x) = 2(x+1)^2 - 8$
 $= 2(x^2 + 2x + 1) - 8$
 $= 2x^2 + 4x - 6$

5

老師講解

二次函數圖形與 x 軸交點數

學生練習

若函數 $y = x^2 + kx + 4$ 之圖形與 x 軸相交於一點，則 k 之值為何？

想法 函數圖形與 x 軸相交於一點，代表圖形與 x 軸相切。

[答：±4]

解 依題意知 $x^2 + kx + 4 = 0$ 只有一解
故判別式 $b^2 - 4ac = 0$
 $\Rightarrow k^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$
 $\Rightarrow k = \pm 4$

若拋物線 $y = x^2 + 4x - 5$ 與 x 軸相交於 A 與 B 兩點，則 $\overline{AB} = ?$

[答：6]

解 依題意 $y = x^2 + 4x - 5$ 與 x 軸相交於 A 、 B
故 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 有二解
 $\Rightarrow (x+5)(x-1) = 0$
 $\Rightarrow x = -5$ 或 1
令 $A(-5, 0)$ 、 $B(1, 0)$
 $\therefore \overline{AB} = |-5 - 1| = 6$

6

老師講解

函數圖形的平移

學生練習

將 $y = 2x^2 + 3x - 5$ 的圖形向右移 h 單位，再向上移 k 單位後，與 $y = 2x^2 - x + 4$ 的圖形重疊，試求 $h + k = ?$

想法 將 $y = f(x)$ 圖形右移 h 單位，上移 k 單位的新函數是 $y - k = f(x - h)$ 。

[答：11]

解 原圖形右移 h 單位，上移 k 單位得
 $y - k = 2(x - h)^2 + 3(x - h) - 5$
 $\Rightarrow y = 2x^2 + (3 - 4h)x + 2h^2 - 3h + k - 5$
與 $y = 2x^2 - x + 4$ 重疊
 $\therefore \begin{cases} 3 - 4h = -1 \\ 2h^2 - 3h + k - 5 = 4 \end{cases}$
解得 $h = 1$ 、 $k = 10$
 $\Rightarrow h + k = 11$

試求將函數 $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 的圖形向右移 1 單位，再向下移 2 單位後的新函數為何？

[答： $f(x) = 3x^2 - 8x + 4$]

解 新函數為
 $f(x) = [3(x-1)^2 - 2(x-1) + 1] - 2$
 $= 3(x^2 - 2x + 1) - 2x + 2 + 1 - 2$
 $= 3x^2 - 8x + 4$

C

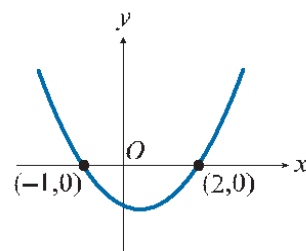
1

1-3 段落測驗

★ 云難題

1. 設 $f(x)$ 為一次函數，已知 $f(-1) = 2$ ， $f(3) = -6$ ，則 $f(-2) = \underline{4}$ 。
2. 設函數 $f(x) = ax + b$ 之圖形通過第一、二、四象限，則點 $P(ab, a - b)$ 在第 三 象限。
3. 小為參加馬拉松長跑比賽，已知平均每分鐘可跑兩百公尺，假若小為 x 分鐘跑了 y 公尺，且滿足 $y = f(x)$ ，則 $f(20) = \underline{4000}$ 。
- ★ 4. 若 $y = f(x)$ 為一次函數，已知 x 值增加 3 時，所對應的 y 值卻減少 6，且 $f(0) = 6$ ，則 $f(x) = \underline{-2x + 6}$ 。
5. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 處有最大值 5，且 $f(0) = 1$ ，則 $a + b + c = \underline{4}$ 。
6. 函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{當 } |x| \leq 4 \\ 2x + 7, & \text{當 } |x| > 4 \end{cases}$ ，則 $f(-8) + f(-4) = \underline{10}$ 。
7. 將函數 $y = x^2 + 2x + 1$ 的圖形向右移 2 單位，再向下移 3 單位所得新函數圖形的頂點為 (a, b) ，則 $a^2 + b^2 = \underline{10}$ 。
- ★ 8. 函數 $f(x) = a(x + 1)^2 - 2$ 的圖形不會經過第四象限，則 a 之值可能為下列哪一數？
D
(A) -1 (B) 0.4 (C) 1.8 (D) 3.2。 【統測】

9. 設 a 為實數，若函數 $f(x) = a(x + 3)^2 - 9a + 2$ 在 $x = -3$ 時有最大值 20，則 $a = \underline{-2}$ 。 【統測】
10. 設 a, b 為實數，若二次函數 $y = x^2 + ax + b$ 的圖形與 x 軸的交點為 $(-1, 0)$ 、 $(2, 0)$ ，如圖所示，則 $a + b = \underline{-3}$ 。



【統測】

1-3 高手過招

1. 二次函數 $f(x) = x^2 - (k + 1)x + 2k$ 的圖形不過原點且與 x 軸交於 A, B 兩點，若 $\overline{AB} = 1$ ，則 $k = \underline{6}$ 。
2. 某地區因輻射冷卻效應導致日夜溫差大，假設該地區某一時段的溫度函數為 $f(t) = -t^2 + 8t + 11$ ，其中 $1 \leq t \leq 10$ ，則這段時間內該地區的最大溫差為 36。