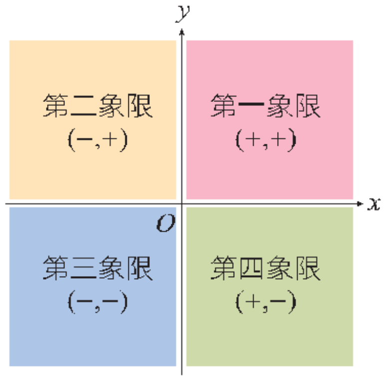
1-2 直角坐標系

重點一 坐標平面

1. 建立直角坐標系：

在平面上取兩條互相垂直的數線，讓兩線交於原點，其中水平數線為 x 軸，鉛直數線為 y 軸，x 軸方向（右正左負）及 y 軸方向（上正下負），如右圖，x 軸、y 軸將坐標平面切成四個象限。



2. 坐標符號：

(1) $P(x,y)$ 在第一象限　$\Leftrightarrow$　$x>0$，$y>0$，即 $(+,+)$。

(2) $P(x,y)$ 在第二象限　$\Leftrightarrow$　$x<0$，$y>0$，即 $(-,+)$。

(3) $P(x,y)$ 在第三象限　$\Leftrightarrow$　$x<0$，$y<0$，即 $(-,-)$。

(4) $P(x,y)$ 在第四象限　$\Leftrightarrow$　$x>0$，$y<0$，即 $(+,-)$。

3. 兩點的距離公式：

平面上兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，其距離 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

觀念補充 //

點 $P(a,b)$ 到 x 軸之距離為 $|b|$，到 y 軸之距離為 $|a|$，到原點之距離為 $\sqrt{a^2+b^2}$。

4. 中點公式：

平面上兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，其中點坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$。

5. 給三點求平行四邊形第四個頂點坐標：

已知三點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，

利用 $\overline{AC}$ 中點 $=$ $\overline{BD}$ 中點，則第四個頂點坐標 $D(x_4,y_4)$ 滿足：

$$x_4=x_1+x_3-x_2\text{，}y_4=y_1+y_3-y_2\text{。}$$

1 老師講解　判斷坐標符號　學生練習

已知 $A\left(\frac{a}{b}, a^3\right)$ 落在第三象限，試求 $B\left(ab^2, b-a\right)$ 落在哪個象限？

想法　(x, y) 在第三象限 $\Leftrightarrow$ $x<0$，$y<0$，即 $(-,-)$。

[答：第二象限]

解　$\because$ $A\left(\frac{a}{b}, a^3\right)$ 在第三象限

$\therefore$ $\frac{a}{b}<0$ 且 $a^3<0$，可得 $a<0$，$b>0$

故 $ab^2<0$ 且 $b-a>0$

$\therefore$ $B\left(ab^2, b-a\right)$ 坐標符號為 $(-,+)$

即 B 在第二象限

已知 $A(ab, a)$ 落在第三象限，試求 $B\left(a^2b, \frac{b^3}{a}\right)$ 落在哪個象限？

[答：第四象限]

解　$\because$ $A(ab, a)$ 在第三象限

$\therefore$ $ab<0$ 且 $a<0$，可得 $b>0$

故 $a^2b>0$ 且 $\frac{b^3}{a}<0$

$\therefore$ $B\left(a^2b, \frac{b^3}{a}\right)$ 的坐標符號為 $(+,-)$

即 B 在第四象限

2 老師講解　平面上兩點距離公式　學生練習

已知三角形三頂點坐標分別為 $A(1,2)$、$B(5,4)$、$C(3,-2)$，試求 $\triangle ABC$ 之周長。

想法　已知 $A\left(x_1, y_1\right)$、$B\left(x_2, y_2\right)$ 兩點，其距離 $\overline{AB}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$。

[答：$4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$]

解　$\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(2-4)^2}=\sqrt{16+4}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5-3)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}$

$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-3)^2+(2+2)^2}=\sqrt{4+16}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

則 $\triangle ABC$ 之周長

$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=2\sqrt{5}+2\sqrt{10}+2\sqrt{5}$

$=4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$

坐標平面上三點，$P(1,3)$、$Q(4,7)$、$R(10,15)$，試求 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{PR}$ 之值。

[答：30]

解　$\overline{PQ}=\sqrt{(1-4)^2+(3-7)^2}=5$

$\overline{QR}=\sqrt{(4-10)^2+(7-15)^2}=10$

$\overline{PR}=\sqrt{(1-10)^2+(3-15)^2}=15$

故 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{PR}$

$=5+10+15$

$=30$

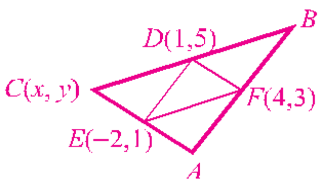
3 老師講解　中點應用　學生練習

$\triangle ABC$ 之三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ ，其中點坐標分別為 $(1,5)$ 、 $(-2,1)$ 、 $(4,3)$ ，試求位於第二象限之頂點坐標。

想法　設平行四邊形 $ABCD$ 之第四個頂點坐標 $D(x_4, y_4)$ ⇒ 滿足 $\begin{cases} x_4 = x_1 + x_3 - x_2 \\ y_4 = y_1 + y_3 - y_2 \end{cases}$ 。

[答： $(-5,3)$]

解　如圖所示



判斷位於第二象限之頂點坐標為 C

令 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 之中點坐標為

$D(1,5)$ 、 $E(-2,1)$ 、 $F(4,3)$

且設 $C(x,y)$

由平行四邊形 $CDFE$

利用 $\overline{DE}$ 中點 $=$ $\overline{CF}$ 中點找頂點 C，得

$x = 1 - 2 - 4 = -5$

$y = 5 + 1 - 3 = 3$

故所求頂點坐標為 $(-5,3)$

已知平行四邊形 $ABCD$ 之三頂點為 $A(5,-4)$ 、 $B(-3,2)$ 、 $C(4,1)$ ，試求 D 點坐標。

[答： $(12,-5)$]

解　令 $D(x,y)$ ，則

$x = 5 + 4 - (-3) = 12$

$y = (-4) + 1 - 2 = -5$

故 $D(12,-5)$

C

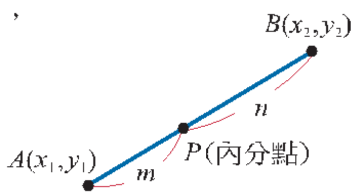
1

重點二　分點公式

1. 內分點公式：

已知兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，若 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$ ，

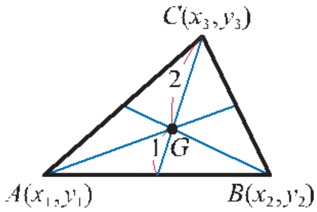
如圖所示，則 P 點坐標為 $\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$ 。



2. **三角形重心：**

如圖所示，$\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，則

$\triangle ABC$ 重心 G 的坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。



觀念補充 //

❶ 三角形重心為三中線交點，且重心到頂點的距離為中線長的 $\dfrac{2}{3}$。

❷ 三角形重心 G 與三頂點的連線會將 $\triangle ABC$ 面積 3 等分

$\Rightarrow \quad \triangle ABG=\triangle ACG=\triangle BCG=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$。

4 老師講解　內分點坐標　學生練習

老師講解

已知 $A(1,-12)$、$B(-7,4)$，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$，試求下列情形之 P 點坐標：

(1) P 在 $\overline{AB}$ 上。

(2) P 不在 $\overline{AB}$ 上。（A、B、P 三點共線）

想法

內分點公式：

P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

則 P 坐標 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$。

[答：(1) $(-5,0)$　(2) $(-11,12)$]

解 (1) P 為內分點且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$

則依內分點公式得

$P\left(\dfrac{3\times(-7)+1\times1}{3+1},\dfrac{3\times4+1\times(-12)}{3+1}\right)$

$=(-5,0)$

(2) 設 $P(x,y)$，因 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$

得 $\overline{AB}:\overline{BP}=2:1$

將 B 視為內分點

則 $B\left(\dfrac{2\times x+1\times1}{2+1},\dfrac{2\times y+1\times(-12)}{2+1}\right)$

$=(-7,4)$

$\therefore\ 2x+1=-21$，$2y-12=12$

解得 $x=-11$，$y=12$

故 P 點坐標為 $(-11,12)$

學生練習

平面上兩定點 $A(-1,7)$、$B(10,-5)$，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，試求下列情形之 P 點坐標：

(1) P 在 $\overline{AB}$ 上。

(2) P 不在 $\overline{AB}$ 上。（A、B、P 三點共線）

[答：(1) $\left(\dfrac{28}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$　(2) $(32,-29)$]

解 (1) P 為內分點且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$

則依內分點公式得

$P\left(\dfrac{3\times10+2\times(-1)}{3+2},\dfrac{3\times(-5)+2\times7}{3+2}\right)$

$=\left(\dfrac{28}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$

(2) 設 $P(x,y)$，因 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$

得 $\overline{AB}:\overline{BP}=1:2$

將 B 視為內分點

則 $B\left(\dfrac{1\times x+2\times(-1)}{1+2},\dfrac{1\times y+2\times7}{1+2}\right)$

$=(10,-5)$

$\therefore\ x-2=30$，$y+14=-15$

解得 $x=32$，$y=-29$

故 P 點坐標為 $(32,-29)$

5 老師講解　三角形的重心坐標　學生練習

$\triangle ABC$ 中，$A(1,-1)$、$B(m,2)$、$C(-1,n)$，若 $\triangle ABC$ 之重心 $G(2,-1)$，則 $m-n$ 之值為何？

想法 三角形重心 G 的坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

[答：10]

解 代重心公式

$\triangle ABC$ 重心坐標

$G\left(\dfrac{1+m-1}{3},\dfrac{-1+2+n}{3}\right)=(2,-1)$

$\Rightarrow \dfrac{m}{3}=2$，$\dfrac{1+n}{3}=-1$

$\Rightarrow m=6$，$n=-4$

故 $m-n=10$

已知三角形三頂點的坐標分別為 $A(3,-5)$、$B(-1,8)$、$C(7,6)$，則此三角形重心 G 的坐標為何？

[答：$(3,3)$]

解 代重心公式

$\triangle ABC$ 重心 G 的坐標為

$\left(\dfrac{3-1+7}{3},\dfrac{-5+8+6}{3}\right)=(3,3)$

進階例題

6 老師講解　內分點之應用　學生練習

已知 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(1,-14)$、$B(8,10)$、$C(5,-11)$，若 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，試求 D 坐標。

[答：$\left(\dfrac{11}{2},-\dfrac{15}{2}\right)$]

解 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D

由內分比性質知 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$

$\overline{AB}=\sqrt{7^2+24^2}=25$

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

得 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=5:1$

代入分點公式

$D\left(\dfrac{1\times 8+5\times 5}{5+1},\dfrac{1\times 10+5\times(-11)}{5+1}\right)$

$=\left(\dfrac{11}{2},-\dfrac{15}{2}\right)$

已知 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(3,-7)$、$B(-5,-1)$、$C(6,-3)$，若 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，試求 D 坐標。

[答：$\left(\dfrac{7}{3},-\dfrac{7}{3}\right)$]

解 $\overline{AB}=\sqrt{[3-(-5)]^2+[-7-(-1)]^2}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{(3-6)^2+[-7-(-3)]^2}=5$

由內分比性質知

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$

代入分點公式

$D\left(\dfrac{2\times 6+1\times(-5)}{2+1},\dfrac{2\times(-3)+1\times(-1)}{2+1}\right)$

$=\left(\dfrac{7}{3},-\dfrac{7}{3}\right)$

1-2 段落測驗

★表難題

1. 點 $A(a+b,a)$在第二象限，則點 $P(ab,2a-3b)$在第__二__象限。

2. 已知坐標平面上平行四邊形 $ABCD$ 中，點 A、B、C 的坐標分別為$(5,2)$、$(1,3)$、$(-4,3)$，則 D 點坐標為__$(0,2)$__。

3. 在坐標平面上，點 A、B 之坐標分別為$(1,-2)$、$(6,13)$，若 C 點在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{BC}=4\overline{AC}$，則 C 點的坐標為__$(2,1)$__。

4. 設 $A(4,1)$、$B(11,8)$，點 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=5:2$，則 P 點坐標為__$(9,6)$__。

5. 已知平行四邊形 $ABCD$ 之三頂點：$A(3,5)$、$B(4,7)$、$C(-4,0)$，則 $\triangle ACD$ 之重心坐標為__$(-2,1)$__。

6. 平面上 $A(-2,1)$、$B(b_1,b_2)$、$C(c_1,c_2)$、$D(4,3)$在同一直線上，依序為 A–B–C–D，且 B、C 兩點將 $\overline{AD}$ 三等分，則$C(c_1,c_2)$為__$\left(2,\frac{7}{3}\right)$__。【統測】

7. 在 xy 平面上，P 和 Q 為拋物線 $y=x^2$ 上的兩點，若 P 和 Q 的 x 坐標分別是 -1 和 2，則 P 和 Q 的距離為__$3\sqrt{2}$__。【統測】

8. 設 $A(5,8)$、$B(7,0)$、$C(-3,-2)$是三角形 ABC 的三頂點，若 D、E、F 分別是 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的中點，則三角形 DEF 的重心坐標為__$(3,2)$__。【統測】

9. 已知 $A(a,0)$與 $B(3,b)$兩點，若線段 $\overline{AB}$ 的中點為 $M(-1,2)$，則點 A 到 y 軸的距離與點 B 到 x 軸的距離之和為__9__。【統測】

10. 已知 $A(1.38,0.4162)$與 $B(1.39,0.4177)$兩點，若點 P 落在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$，則 P 點之 y 坐標為__0.4168__。【統測】

1-2 高手過招

1. 已知 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(1,2)$、$B(-3,1)$、$C(2,6)$，D 在 $\overline{BC}$ 上，若 $\triangle ABD$ 面積是 $\triangle ABC$ 面積的$\frac{2}{5}$倍，則 D 坐標為__$(-1,3)$__。

2. 已知 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(2,-8)$、$B(-6,-2)$、$C(6,-5)$，若 $\angle A$ 之外角平分線交 $\overline{BC}$ 延長線於 E，則 E 坐標為__$(18,-8)$__。