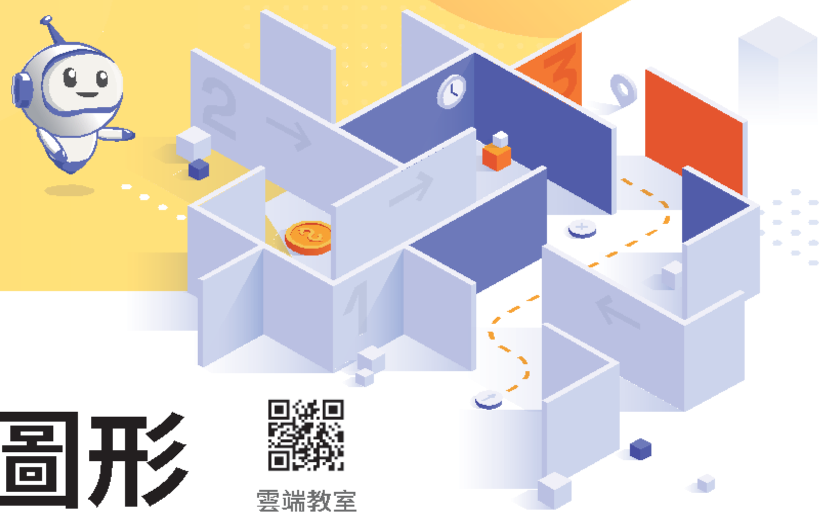


1 坐標系與函數圖形

雲端教室

1-1 實數與絕對值

課綱即時報	
新增	無理數運算、絕對值不等式、算幾不等式、二次函數利用配方法求極值
刪除	無

重點一 認識數系

1. **數系：**

(1) 正整數 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，又稱自然數。

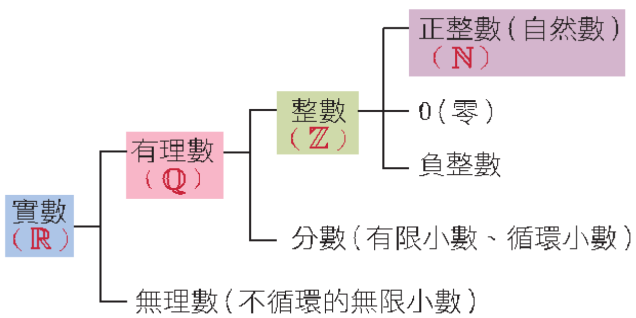
(2) 整數 $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots,\pm n,\cdots\}$，整數包含了正整數、零與負整數。

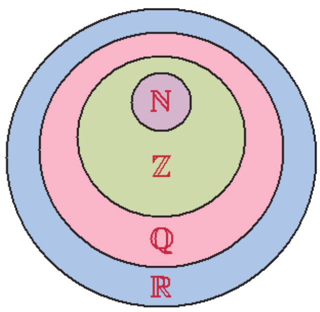
(3) 有理數 $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{q}{p}\,\middle|\,p、q\text{ 為整數，且 } p\neq 0\right\}$，能化成分數者稱為有理數，有理數包含了整數、有限小數與循環小數。

(4) 無理數 $=\{\,x\mid x$ 是不能化成分數的數 $\}$，例如：$\sqrt{2}$、π、$\log 2$。

(5) 實數 $\mathbb{R}=\{x\mid x$ 為有理數或無理數$\}$。

(6) 數系形成的包含關係如圖所示。





觀念補充 //

分母只含 2^m 或 5^n（m、n 為正整數）的最簡分數，必可化成有限小數，

例如：$\dfrac{3}{2}$、$\dfrac{7}{5}$、$\dfrac{11}{20}$ 等。

2. 循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{99\cdots9}$（分母有 n 個 9），

例如：$0.\overline{29}=\dfrac{29}{99}$。

(2) $0.a_1a_2\cdots a_n\overline{b_1b_2\cdots b_m}=\dfrac{(a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m)-(a_1a_2\cdots a_n)}{99\cdots900\cdots0}$（分母有 m 個 9，n 個 0），

例如：$0.2\overline{9}=\dfrac{29-2}{90}=\dfrac{27}{90}$。

3. 實數的性質：

設 a、b、$c\in\mathbb{R}$

(1)三一律：$a>b$，$a=b$，$a<b$ 三者之中恰有一式成立。

(2)遞移律：$a<b$ 且 $b<c \Rightarrow a<c$。

(3)乘法律：

①若 $c>0$ 且 $a<b \Leftrightarrow ac<bc$。

②若 $c<0$ 且 $a<b \Leftrightarrow ac>bc$。（要變號）

(4)若 $|a|<|b| \Leftrightarrow a^2<b^2$。

4. 絕對值概念：

a、$b\in\mathbb{R}$

(1) $\begin{cases}\text{若 } a\geq 0\text{，則 } |a|=a\text{。}\\ \text{若 } a<0\text{，則 } |a|=-a\text{。}\end{cases}$

(2)① $|ab|=|a|\,|b|$；$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$（$b\neq0$）。

②設 $a\geq0$，$x\in\mathbb{R}$，則 $\begin{cases}\text{當 } |x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a\\ \text{當 } |x|\geq a \Leftrightarrow x\geq a \text{ 或 } x\leq -a\end{cases}$。

觀念補充 //

❶ 對任意實數 a、b 恆有 $|a|+|b|\geq|a\pm b|\geq|a|-|b|$。

❷ 絕對值具對稱性，即 $a\leq x\leq b \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|\leq\dfrac{b-a}{2}$，

例如：$1\leq x\leq 9$ 與 $|x-5|\leq4$ 的數學意義相同。

1 老師講解　認識數系　學生練習

判斷下列哪些是有理數：3.414，π，$\sqrt{4}$，$1.\overline{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$1-\sqrt{2}$，$\frac{6+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$。

想法　有理數包含了整數、有限小數與循環小數。

[答：3.414，$\sqrt{4}$，$1.\overline{3}$，$\frac{6+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$]

解　能化成分數的有：

$3.414=3\frac{414}{1000}$；$\sqrt{4}=2$；$1.\overline{3}=1\frac{1}{3}$

$\frac{6+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=3$

共 4 個有理數

判斷下列哪些是有理數：0.38，$\sqrt{5}$，$3.\overline{4}$，-1，$\frac{2}{7}$，$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$，$0$。

[答：0.38，$3.\overline{4}$，-1，$\frac{2}{7}$，0]

解　能化成分數的有：

$0.38=\frac{38}{100}$

$3.\overline{4}=3\frac{4}{9}$

-1；$\frac{2}{7}$；0

共 5 個有理數

2 老師講解　循環小數化成分數　學生練習

試求 $0.\overline{45}\times0.3\overline{6}$ 之值。

想法　循環小數化成分數公式：

$0.\overline{ab}=\frac{ab}{99}$，$0.a\overline{b}=\frac{ab-a}{90}$。

[答：$\frac{1}{6}$]

解　$0.\overline{45}=\frac{45}{99}$，$0.3\overline{6}=\frac{36-3}{90}=\frac{33}{90}$

$\therefore\ \frac{45}{99}\times\frac{33}{90}=\frac{1}{6}$

試求 $0.\overline{21}\times0.7\overline{3}$ 之值。

[答：$\frac{7}{45}$]

解　$0.\overline{21}=\frac{21}{99}$

$0.7\overline{3}=\frac{73-7}{90}=\frac{66}{90}$

$\therefore\ \frac{21}{99}\times\frac{66}{90}=\frac{7}{45}$

3 老師講解　絕對值方程式　學生練習

解絕對值方程式 $|3x+4|=10$。

想法　去絕對值首要注意正負符號，當 $|x|=a$，則 $x=\pm a$。

[答：$x=2$ 或 $x=-\frac{14}{3}$]

解　$|3x+4|=10$

$\Rightarrow\ 3x+4=10$ 或 $3x+4=-10$

$\Rightarrow\ 3x=6$ 或 $3x=-14$

$\Rightarrow\ x=2$ 或 $x=-\frac{14}{3}$

解絕對值方程式 $|-2x-5|=7$。

[答：$x=1$ 或 $x=-6$]

解　原式即 $|2x+5|=7$

$\Rightarrow\ 2x+5=7$ 或 $2x+5=-7$

$\Rightarrow\ 2x=2$ 或 $2x=-12$

$\Rightarrow\ x=1$ 或 $x=-6$

解不等式：

(1) $|x-3|<9$　(2) $|-2x-6|>9$

想法　絕對值不等式，
當 $|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a$；
當 $|x|\ge a \Leftrightarrow x\ge a$ 或 $x\le -a$。

[答：(1) $-6<x<12$　(2) $x>\frac{3}{2}$ 或 $x<-\frac{15}{2}$]

解 (1) $|x-3|<9$

$\Rightarrow -9<x-3<9$

$\Rightarrow -6<x<12$

(2) 原式即 $|2x+6|>9$

$\Rightarrow 2x+6>9$ 或 $2x+6<-9$

$\Rightarrow x>\frac{3}{2}$ 或 $x<-\frac{15}{2}$

解不等式：

(1) $|2x-1|<5$　(2) $|-x+4|>5$

[答：(1) $-2<x<3$　(2) $x>9$ 或 $x<-1$]

解 (1) $|2x-1|<5$

$\Rightarrow -5<2x-1<5$

$\Rightarrow -4<2x<6$

$\Rightarrow -2<x<3$

(2) 原式即 $|x-4|>5$

$\Rightarrow x-4>5$ 或 $x-4<-5$

$\Rightarrow x>9$ 或 $x<-1$

重點二 根式運算與算幾不等式

1. 根式的運算：

設 $a\ge 0$，$b\ge 0$

(1) $\sqrt{a^2}=|a|$

(2) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(3) $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ （$b\ne 0$）。

2. 算幾不等式：（算術平均數大於或等於幾何平均數）

當 $a\ge 0$，$b\ge 0$，則 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$。等號成立條件 $\Leftrightarrow$ 當 $a=b$ 時。

觀念補充 //

算幾不等式之推廣：$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$。等號成立條件 $\Leftrightarrow$ 當 $a=b=c$。

5 老師講解　根式的四則運算　學生練習

化簡下列根式：

(1) $\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{75}+\sqrt{243}$

(2) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^2$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

想法　根式運算性質：

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$。

[答：(1) $12\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{2}-1$　(3) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$]

解 (1) 原式化為最簡根式

$=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+5\sqrt{3}+9\sqrt{3}$

$=(2-4+5+9)\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

(2) 原式 $=[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)](\sqrt{2}-1)$

$=1\times(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1$

(3) 原式有理化 $=\dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

化簡下列根式：

(1) $\sqrt{20}+2\sqrt{45}-3\sqrt{80}$

(2) $(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})$

(3) $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}$

[答：(1) $-4\sqrt{5}$　(2) $2+\sqrt{3}$　(3) $3+\sqrt{2}$]

解 (1) 原式化為最簡根式

$=2\sqrt{5}+6\sqrt{5}-12\sqrt{5}$

$=-4\sqrt{5}$

(2) 原式 $=[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})](2+\sqrt{3})$

$=1\times(2+\sqrt{3})$

$=2+\sqrt{3}$

(3) 原式有理化 $=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{7}$

$=3+\sqrt{2}$

6 老師講解　根式運算　學生練習

設 $2+\sqrt{3}$ 的小數部分為 x，則 $x+\dfrac{2}{x}=$?

想法　若無理數 $\sqrt{a}$ 的整數部分 $=n$，則 $\sqrt{a}$ 之小數部分表成 $\sqrt{a}-n$。

[答：$2\sqrt{3}$]

解 $\because$ $1<\sqrt{3}<2$ $\Rightarrow$ $3<2+\sqrt{3}<4$

$\therefore$ $2+\sqrt{3}$ 整數部分為 3

故小數部分 $x=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

$x+\dfrac{2}{x}=(\sqrt{3}-1)+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

$=(\sqrt{3}-1)+\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}$

若 $\sqrt{3}+1$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，試求 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}=$?

[答：1]

解 $\because$ $1<\sqrt{3}<2$ $\Rightarrow$ $2<\sqrt{3}+1<3$

$\therefore$ $\sqrt{3}+1$ 整數部分為 $a=2$

故小數部分 $b=(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1$

$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=1$

7 算幾不等式

老師講解

設 $x>0$，$y>0$，且 $2x+5y=20$，試求 xy 的最大值，並求此時的 x、y 之值。

想法 設 $a\geq 0$，$b\geq 0$，算幾不等式：$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，且當 $a=b$ 時等號成立。

[答：xy 最大值為 10，此時 $x=5$，$y=2$]

解 由算幾不等式：

$$\frac{2x+5y}{2}\geq\sqrt{(2x)(5y)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{20}{2}\geq\sqrt{10xy}$$

$$\Rightarrow\ 100\geq 10xy$$

$$\Rightarrow\ xy\leq 10$$

$\therefore$ xy 最大值為 10

且此時 $2x=5y=10$，即 $x=5$，$y=2$

學生練習

已知矩形的周長固定為 12，試求矩形的最大面積。

[答：9 平方單位]

解 設矩形邊長為 x、y，則周長 $=2(x+y)$

題意即 $x+y=6$，求 xy 之最大值

由算幾不等式：

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow\ 3\geq\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow\ 9\geq xy$$

故最大面積為 9 平方單位

8 算幾不等式

老師講解

面積為 400 平方單位的任意矩形中，試求矩形的最短對角線。

想法 設 $a\geq 0$，$b\geq 0$，算幾不等式：$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，且當 $a=b$ 時等號成立。

[答：$20\sqrt{2}$]

解 設矩形邊長為 x、y，面積 $xy=400$

其對角線長度為 $\sqrt{x^2+y^2}$，則

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^2}$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2\geq 800$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{800}$$

由算幾不等式可知

當 $x=y$，即 $x=y=20$ 時之對角線最短

此時對角線長度為

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{20^2+20^2}=\sqrt{800}=20\sqrt{2}$$

學生練習

設 a、b 為正數，且 $ab=3$，試求當 a、b 為何值時 $3a+4b$ 為最小，並求此最小值。

[答：當 $a=2$，$b=\dfrac{3}{2}$ 時產生最小值 12]

解 由算幾不等式：

$$\frac{3a+4b}{2}\geq\sqrt{3a\times 4b}$$

$$\Rightarrow\ \frac{3a+4b}{2}\geq\sqrt{12ab}=\sqrt{36}=6$$

$$\Rightarrow\ 3a+4b\geq 12$$

$\therefore$ $3a+4b$ 的最小值為 12

且當 $3a=4b=6$

即 $a=2$，$b=\dfrac{3}{2}$ 時產生最小值

進階例題

9 老師講解 算幾不等式 學生練習

設 a、b、c 為正數，若 $a+2b+3c=18$，試求 abc 的最大值。

[答：36]

解 算幾不等式推廣

$\because \dfrac{a+2b+3c}{3}\geq\sqrt[3]{a\times 2b\times 3c}$

$\Rightarrow \dfrac{18}{3}\geq\sqrt[3]{6abc}$

$\Rightarrow 6abc\leq\left(\dfrac{18}{3}\right)^3=216$

$\Rightarrow abc\leq 36$

$\therefore abc$ 的最大值為 36

設 x、y 均為正數，若 $x^2y=500$，試求 $x+y$ 的最小值。

[答：15]

解 算幾不等式推廣

$\because \dfrac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y}{3}\geq\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}\times\dfrac{x}{2}\times y}$

$\Rightarrow \dfrac{x+y}{3}\geq\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{4}}=\sqrt[3]{\dfrac{500}{4}}=\sqrt[3]{125}=5$

$\Rightarrow x+y\geq 15$

$\therefore x+y$ 的最小值為 15

10 老師講解 算幾不等式 學生練習

若 $x>-2$，$g(x)=x+4+\dfrac{1}{x+2}$，試求 $g(x)$ 的最小值。

[答：4]

解 算幾不等式變化

$\because x>-2 \quad \therefore x+2>0$

由算幾不等式：

$\dfrac{(x+2)+\left(\dfrac{1}{x+2}\right)}{2}\geq\sqrt{(x+2)\times\left(\dfrac{1}{x+2}\right)}=1$

$\Rightarrow x+2+\dfrac{1}{x+2}\geq 2$

因 $g(x)=x+2+\dfrac{1}{x+2}+2\geq 2+2$

故 $g(x)\geq 4$，即最小值為 4

若 $x>1$，$g(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$，試求 $g(x)$ 的最小值。

[答：4]

解 算幾不等式變化

$\because x>1 \quad \therefore x-1>0$

由算幾不等式：

$\dfrac{(x-1)+\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}{2}\geq\sqrt{(x-1)\times\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}=1$

$\Rightarrow x-1+\dfrac{1}{x-1}\geq 2$

因 $g(x)=x-1+\dfrac{1}{x-1}+2\geq 2+2$

故 $g(x)\geq 4$，即最小值為 4

1-1 段落測驗

★表難題

1. 已知 $a=\frac{101}{103}$，$b=\frac{105}{107}$，$c=\frac{109}{111}$，則 a、b、c 之大小為 $a<b<c$。

2. $\frac{0.\overline{12}}{0.1\overline{3}}=$ $\frac{10}{11}$。

3. $\sqrt{27}+2\sqrt{75}-2\sqrt{108}=$ $\sqrt{3}$。

4. $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=$ $2\sqrt{2}$。

5. $\frac{1}{4-\sqrt{15}}+\frac{1}{4+\sqrt{15}}=$ 8。

6. 若 $x>0$ 且 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{3}$，則 $x+\frac{1}{x}=$ 5。 【104(B)】

7. 有一長方形的長與寬分別為 a、b，若 $2a+b=12$，則此長方形的最大面積為 18 平方單位。

8. 已知 x、y 為正數，若 $xy=27$，則 $4x+3y$ 的最小值為 36。

9. 滿足不等式 $|2x+3|>7$ 之解為 $x>2$ 或 $x<-5$。

10. 不等式 $|3x-5|<9$ 的解為整數者共有 6 個。 【統測】

1-1 高手過招

1. 設 $x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，則 x^2+y^2 之值為 62。

2. 已知 x、y、z 均為正實數。若 x、y、z 滿足 $2x+3y+z=12$，試求：

   (1) xyz 的最大值為 $\frac{32}{3}$。

   (2) x^2y^3z 的最大值為 64。

   (3) xyz^2 最大值為 54。

   (4) xy^2z 的最大值為 18。 【統測】

3. 若 $|2x-a|\le b$ 之解為 $-6\le x\le 5$，則 $a+b=$ 10。