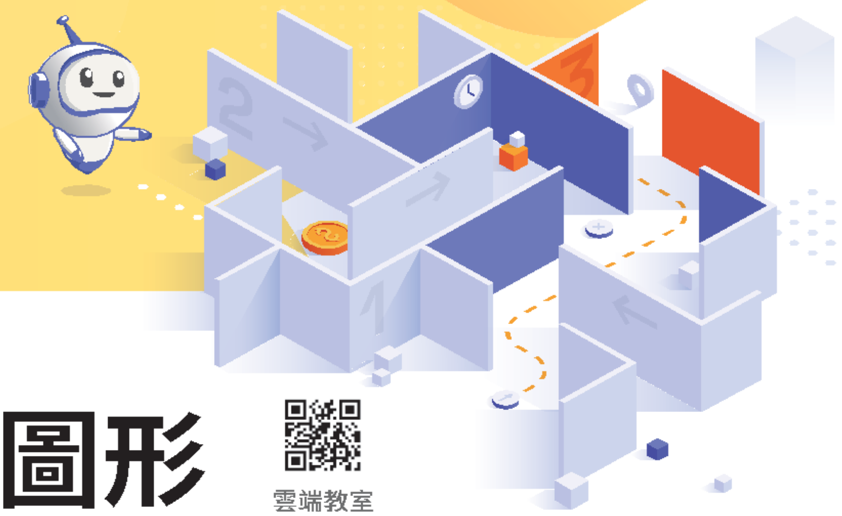


1 坐標系與函數圖形

雲端教室

1-1 》實數與絕對值

重點一 認識數系

1. **數系：**

(1) 正整數 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，又稱自然數。

(2) 整數 $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots,\pm n,\cdots\}$，整數包含了正整數、零與負整數。

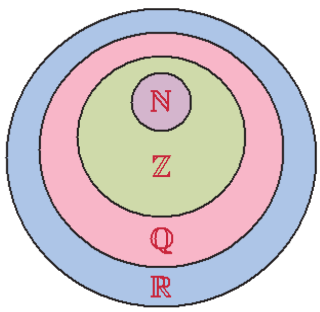
(3) 有理數 $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{q}{p}\,\middle|\, p、q\text{ 為整數，且 } p\neq 0\right\}$，能化成分數者稱為有理數，有理數包含了整數、有限小數與循環小數。

(4) 無理數 $=\{\,x\mid x$ 是不能化成分數的數$\,\}$，例如：$\sqrt{2}$、π、$\log 2$。

(5) 實數 $\mathbb{R}=\{x\mid x$ 為有理數或無理數$\}$。

(6) 數系形成的包含關係如圖所示。

- 實數（$\mathbb{R}$）
  - 有理數（$\mathbb{Q}$）
    - 整數（$\mathbb{Z}$）
      - 正整數（自然數）（$\mathbb{N}$）
      - 0（零）
      - 負整數
    - 分數（有限小數、循環小數）
  - 無理數（不循環的無限小數）



觀念補充 //

分母只含 2^m 或 5^n（m、n 為正整數）的最簡分數，必可化成有限小數，

例如：$\dfrac{3}{2}$、$\dfrac{7}{5}$、$\dfrac{11}{20}$ 等。

2. 循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{99\cdots9}$（分母有 n 個 9），

例如：$0.\overline{29}=\dfrac{29}{99}$。

(2) $0.a_1a_2\cdots a_n\overline{b_1b_2\cdots b_m}=\dfrac{(a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m)-(a_1a_2\cdots a_n)}{99\cdots900\cdots0}$（分母有 m 個 9，n 個 0），

例如：$0.2\overline{9}=\dfrac{29-2}{90}=\dfrac{27}{90}$。

3. 實數的性質：

設 a、b、$c\in\mathbb{R}$

(1)三一律：$a>b$，$a=b$，$a<b$三者之中恰有一式成立。

(2)遞移律：$a<b$且$b<c \Rightarrow a<c$。

(3)乘法律：

①若$c>0$且$a<b \Leftrightarrow ac<bc$。

②若$c<0$且$a<b \Leftrightarrow ac>bc$。（要變號）

(4)若$|a|<|b| \Leftrightarrow a^2<b^2$。

4. 絕對值概念：

a、$b\in\mathbb{R}$

(1) $\begin{cases}\text{若 } a\ge 0\text{，則 }|a|=a\text{。}\\ \text{若 } a<0\text{，則 }|a|=-a\text{。}\end{cases}$

(2)① $|ab|=|a|\,|b|$；$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$（$b\ne0$）。

② 設 $a\ge0$，$x\in\mathbb{R}$，則$\begin{cases}\text{當 }|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a\\ \text{當 }|x|\ge a \Leftrightarrow x\ge a \text{ 或 } x\le -a\end{cases}$。

觀念補充 //

❶ 對任意實數 a、b 恆有$|a|+|b|\ge|a\pm b|\ge|a|-|b|$。

❷ 絕對值具對稱性，即$a\le x\le b \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|\le\dfrac{b-a}{2}$，

例如：$1\le x\le 9$與$|x-5|\le 4$的數學意義相同。

1　認識數系

老師講解

判斷下列哪些是有理數：3.414，π，$\sqrt{4}$，$1.\overline{3}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$1-\sqrt{2}$，$\dfrac{6+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$。

想法　有理數包含了整數、有限小數與循環小數。

學生練習

判斷下列哪些是有理數：0.38，$\sqrt{5}$，$3.\overline{4}$，-1，$\dfrac{2}{7}$，$\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$，$0$。

2　循環小數化成分數

老師講解

試求$0.\overline{45}\times 0.3\overline{6}$之值。

想法　循環小數化成分數公式：

$0.\overline{ab}=\dfrac{ab}{99}$，$0.a\overline{b}=\dfrac{ab-a}{90}$。

學生練習

試求$0.\overline{21}\times 0.7\overline{3}$之值。

3　絕對值方程式

老師講解

解絕對值方程式$|3x+4|=10$。

想法　去絕對值首要注意正負符號，

當$|x|=a$，則$x=\pm a$。

學生練習

解絕對值方程式$|-2x-5|=7$。

4 老師講解 **絕對值不等式** 學生練習

解不等式：

(1) $|x-3|<9$　(2) $|-2x-6|>9$

想法 絕對值不等式，
當 $|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a$；
當 $|x|\ge a \Leftrightarrow x\ge a$ 或 $x\le -a$。

解不等式：

(1) $|2x-1|<5$　(2) $|-x+4|>5$

重點二 根式運算與算幾不等式

1. 根式的運算：

設 $a\ge 0$，$b\ge 0$

(1) $\sqrt{a^2}=|a|$

(2) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(3) $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$（$b\ne 0$）。

2. 算幾不等式：（算術平均數大於或等於幾何平均數）

當 $a\ge 0$，$b\ge 0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$。等號成立條件 $\Leftrightarrow$ 當 $a=b$ 時。

觀念補充 //

算幾不等式之推廣：$\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$。等號成立條件 $\Leftrightarrow$ 當 $a=b=c$。

5 老師講解　根式的四則運算　學生練習

化簡下列根式：

(1) $\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{75}+\sqrt{243}$

(2) $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

想法　根式運算性質：

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$。

化簡下列根式：

(1) $\sqrt{20}+2\sqrt{45}-3\sqrt{80}$

(2) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2\left(2-\sqrt{3}\right)$

(3) $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}$

6 老師講解　根式運算　學生練習

設 $2+\sqrt{3}$ 的小數部分為 x，則 $x+\dfrac{2}{x}=$？

想法　若無理數 $\sqrt{a}$ 的整數部分 $=n$，則 $\sqrt{a}$ 之小數部分表成 $\sqrt{a}-n$。

若 $\sqrt{3}+1$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，試求 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}=$？

7 算幾不等式

老師講解

設 $x>0$， $y>0$，且 $2x+5y=20$，試求 xy 的最大值，並求此時的 x、y 之值。

想法 設 $a\geq 0$，$b\geq 0$，算幾不等式：
$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，且當 $a=b$ 時等號成立。

學生練習

已知矩形的周長固定為 12，試求矩形的最大面積。

8 算幾不等式

老師講解

面積為 400 平方單位的任意矩形中，試求矩形的最短對角線。

想法 設 $a\geq 0$，$b\geq 0$，算幾不等式：
$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，且當 $a=b$ 時等號成立。

學生練習

設 a、b 為正數，且 $ab=3$，試求當 a、b 為何值時 $3a+4b$ 為最小，並求此最小值。

進階例題

9 老師講解　算幾不等式　學生練習

設 a、b、c 為正數，若 $a+2b+3c=18$，試求 abc 的最大值。

設 x、y 均為正數，若 $x^2y=500$，試求 $x+y$ 的最小值。

10 老師講解　算幾不等式　學生練習

若 $x>-2$，$g(x)=x+4+\dfrac{1}{x+2}$，試求 $g(x)$ 的最小值。

若 $x>1$，$g(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$，試求 $g(x)$ 的最小值。

1-1 段落測驗

★表難題

1. 已知 $a=\dfrac{101}{103}$，$b=\dfrac{105}{107}$，$c=\dfrac{109}{111}$，則 a、b、c 之大小為__________。

2. $\dfrac{0.1\overline{2}}{0.1\overline{3}}=$__________。

3. $\sqrt{27}+2\sqrt{75}-2\sqrt{108}=$__________。

4. $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=$__________。

5. $\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}+\dfrac{1}{4+\sqrt{15}}=$__________。

6. 若 $x>0$ 且 $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{3}$，則 $x+\dfrac{1}{x}=$__________。 【104(B)】

7. 有一長方形的長與寬分別為 a、b，若 $2a+b=12$，則此長方形的最大面積為__________平方單位。

8. 已知 x、y 為正數，若 $xy=27$，則 $4x+3y$ 的最小值為__________。

9. 滿足不等式 $|2x+3|>7$ 之解為__________。

10. 不等式 $|3x-5|<9$ 的解為整數者共有__________個。 【統測】

1-1 高手過招

1. 設 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，則 x^2+y^2 之值為__________。

2. 已知 x、y、z 均為正實數。若 x、y、z 滿足 $2x+3y+z=12$，試求：

   (1) xyz 的最大值為__________。

   (2) x^2y^3z 的最大值為__________。

   (3) xyz^2 最大值為__________。

   (4) xy^2z 的最大值為__________。 【統測】

3. 若 $|2x-a|\le b$ 之解為 $-6\le x\le 5$，則 $a+b=$__________。