

ch03_平面向量

已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 為直角，試問下列敘述何者正確？

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ (B) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (D) $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 0$ **【114C02】**

Ans：(C)

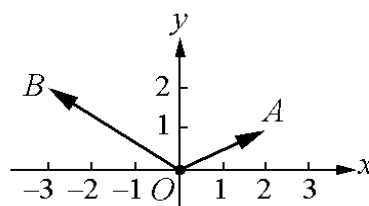
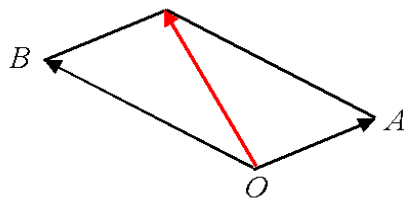
key： $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (兩向量互相垂直 $\Leftrightarrow$ 內積為 0)

在坐標平面上，已知 O 為原點， $A(2, 1)$ ， $B(-3, 2)$ ，如圖所示，若 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$ ，其中 $-1 \leq t \leq 1$ ，則所有滿足 P 點所形成的線段長為多少？

- (A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{2}$

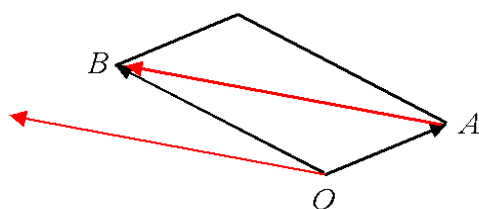
Ans : (B)

key : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$



【113C25】

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



兩向量相加 $\rightarrow$ x 分量相加、 y 分量相加；兩向量相減 $\rightarrow$ x 分量相減、 y 分量相減

平面上 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 兩點間距離公式 $\rightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

在坐標平面上，已知 $\triangle ABC$ 的三個頂點坐標為 $A(x, y)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(0, 0)$ ，線段 $\overline{AB}$ 的中點為 D ，線段 $\overline{BC}$ 的中點為 E ，線段 $\overline{AC}$ 的中點為 F 。若內積 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ ，則下列何者為真？

(A) $\triangle ABC$ 為銳角三角形 (B) $\triangle ABC$ 為鈍角三角形 (C) $\angle BCA$ 為直角 (D) $\angle BAC$ 為直角

Ans : (C)

【112C04】

key : $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{DF}$ (兩向量互相垂直 $\Leftrightarrow$ 內積為 0)

三角形兩腰中點連線會平行底邊(且其長度為底邊長的一半)

已知平面上兩向量 $\vec{a} = (2x+1, -3)$ 、 $\vec{b} = (3, x-2)$ ，滿足 $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ ，則 $x = ?$

- (A) 3 (B) 1 (C) -1 (D) -3

【111C16】

Ans : (D)

$$\text{key : } |p\vec{a} + q\vec{b}|^2 = p^2 |\vec{a}|^2 + 2pq(\vec{a} \cdot \vec{b}) + q^2 |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a} = (x_1, y_1)、\vec{b} = (x_2, y_2) \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 為平面上的三向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ， $|\vec{a}| = 5$ ， $|\vec{b}| = 12$ ， $|\vec{c}| = 13$ 。若

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

(A) -30 (B) -60 (C) -65 (D) -156

【110C16】

Ans : (B)

key : $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$ (兩向量互相垂直 $\Leftrightarrow$ 內積為 0)

$\vec{a} // \vec{b} \rightarrow \vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 同向或 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 反向

設平面上三點 $A(1, 1)$ 、 $B(5, -2)$ 、 $C(5, 2)$ ，且 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影為 $\overrightarrow{AD}$ ，若 $\overrightarrow{DC} = (x, y)$ ，則 $x + y = ?$

- (A) $\frac{34}{25}$ (B) $\frac{89}{25}$ (C) $\frac{104}{25}$ (D) $\frac{112}{25}$

【109C21】

Ans : (D)

key : $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影為 $(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2})\overrightarrow{AB}$

已知 $\vec{u} = (1, 1)$ ， $\vec{v} = (x + 4, y - 1)$ 及 $\vec{w} = (2x, y)$ 。若 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 垂直且 $\vec{u}$ 與 $\vec{w}$ 平行，則下列何者正確？

- (A) $x = 1$ (B) $y = -2$ (C) $y = 1$ (D) $x = -2$

【108C01】

Ans：(B)

key： $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 垂直 $\rightarrow$ 內積為 0

$\vec{u}$ 與 $\vec{w}$ 平行 $\rightarrow$ 分量成比例

已知 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ 。若 $t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ 和 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，其中 t 為實數，則 $t=?$

- (A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【106C06】

Ans : (A)

key : $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

已知向量 $\vec{a}=(-6, 8)$ 且與 $\vec{b}$ 之夾角為 60° ，則向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長為何？

- (A) 5 (B) 7 (C) $5\sqrt{3}$ (D) 10

【105C06】

Ans : (A)

key : $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的正射影為 $(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b} \rightarrow$ 正射影長 = $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

已知平面上四點坐標為 $A(57, 23)$ 、 $B(7, -2)$ 、 $C(5, 12)$ 、 $D(x, y)$ 。

若向量 $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ ，則 $x + y = ?$

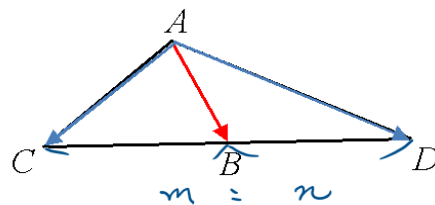
(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4

【104C08】

Ans : (A)

key : 向量的分點公式 $\rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD}$

※ 比例相加當分母，交叉相乘再相加當分子



已知平面三向量 $\vec{a} = (3, 4)$ ， $\vec{b} = (x, -9)$ ， $\vec{c} = (-8, y)$ 。設 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ， $\vec{b} \parallel \vec{c}$ ，則 $y - x = ?$

(A) -18 (B) -6 (C) 6 (D) 18

【103C01】

Ans：(B)

key：兩向量互相垂直 $\rightarrow$ 內積為 0

兩向量互相平行 $\rightarrow$ 分量成比例

設平面二向量 $\vec{u} = (2\cos\theta, \sin\theta)$ ， $\vec{v} = (\sin\theta, 2\cos\theta)$ 且其內積 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ ，若 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，則 θ 之值

可能為何？

- (A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

【103C20】

Ans：(A)

$$\text{key: } \vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\text{二倍角公式} \rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

$$180^\circ = \pi \rightarrow 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

設向量 $\vec{a} = (3, 4)$ ，向量 $\vec{b} // \vec{a}$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -50$ ，則 $|2\vec{a} + 3\vec{b}| = ?$

- (A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80

【102C09】

Ans : (A)

key : $\vec{a} // \vec{b} \rightarrow$ 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 同向，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ；若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 反向，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$

$$|p\vec{a} + q\vec{b}|^2 = p^2 |\vec{a}|^2 + 2pq(\vec{a} \cdot \vec{b}) + q^2 |\vec{b}|^2$$

設向量 $\vec{u} = (a, 2)$ ， $\vec{v} = (3, 2a)$ ， $\vec{w} = (-1, 2)$ ，則下列敘述何者正確？

(A) 若 $2\vec{u} + \vec{v}$ 與 $\vec{w}$ 平行，則 $a = -3$ (B) 若 $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$ ，則 $a = -\frac{5}{2}$

(C) 若 $|2\vec{u} + \vec{v}| = 5$ ，則 $a = -\frac{1}{2}$ (D) 若 $|2\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{w}|$ ，則 $a = 0$

【101C09】

Ans：(B)

key：兩向量互相垂直 $\rightarrow$ 內積為 0

$$|p\vec{u} + q\vec{v}|^2 = p^2 |\vec{u}|^2 + 2pq(\vec{u} \cdot \vec{v}) + q^2 |\vec{v}|^2$$

平面上四點 $A(1,1)$ 、 $B(a,2)$ 、 $C(b,-1)$ 、 $D(0,-2)$ ，其中 b 為正數，若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 互相平行， $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 互相垂直，求 $a+2b$ 之值為何？

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

【101C16】

Ans：(D)

key：兩向量互相垂直 $\rightarrow$ 內積為 0

兩向量互相平行 $\rightarrow$ 分量成比例

已知兩向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 互相垂直。若 $|\vec{a}| = 4\sqrt{5}$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{5}$ ，則 $|\vec{b}| = ?$

- (A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{5}$

【100C03】

Ans：(C)

key：兩向量互相垂直 $\rightarrow$ 內積為 0

$$|p\vec{a} + q\vec{b}|^2 = p^2 |\vec{a}|^2 + 2pq(\vec{a} \cdot \vec{b}) + q^2 |\vec{b}|^2$$

設 $A(-13, -19)$ 、 $B(x, y)$ 為平面上相異兩點。若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\vec{u} = (5, 12)$ 同方向且

$|\overrightarrow{AB}| = 26$ ，則 $3x - 4y = ?$

(A) -103 (B) -29 (C) 29 (D) 103

【100C16】

Ans : (B)

key : $\overrightarrow{AB}$ 與 $\vec{u}$ 同向且長度為其 t 倍 $\rightarrow \overrightarrow{AB} = t\vec{u} (t > 0)$

$\overrightarrow{AB}$ 與 $\vec{u}$ 反向且長度為其 t 倍 $\rightarrow \overrightarrow{AB} = -t\vec{u} (t > 0)$

在坐標平面上的平行四邊形 $ABCD$ (按順序) 中，若 $\overrightarrow{AB} = (4, 8)$ 、 $\overrightarrow{AD} = (1, 4)$ ，則

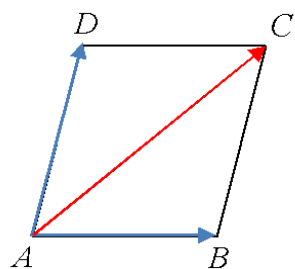
$$|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}| = ?$$

- (A) $4\sqrt{5} + \sqrt{17}$ (B) 18 (C) $8\sqrt{5} + 2\sqrt{17}$ (D) 36

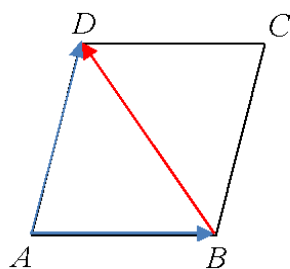
【99C04】

Ans : (B)

key :



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$$

在 $\triangle ABC$ 中，若 D 為線段 $\overline{BC}$ 的中點，且 $\overline{AB} = 9$ 、 $\overline{AC} = 5$ ，則向量內積 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = ?$

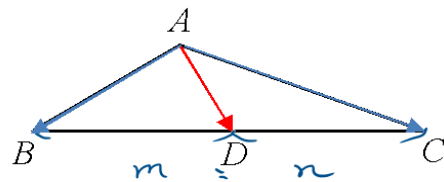
(A) -28 (B) -14 (C) 14 (D) 28

【99C23】

Ans : (A)

key : 向量的分點公式 $\rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (記得向量是用終點減始點)



設 $\vec{a} = (4, 3)$ ， $\vec{b} = (x, y)$ 為平面上兩向量，且 $x^2 + y^2 = 40$ ，則此兩向量的內積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值為何？

- (A) $10\sqrt{10}$ (B) $12\sqrt{10}$ (C) $14\sqrt{10}$ (D) $16\sqrt{10}$

【98C14】

Ans : (A)

$$\text{key : } \vec{a} = (x, y) \rightarrow |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2$$

$$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2) \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\text{柯西不等式} \rightarrow |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \geq (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \rightarrow (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \geq (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2$$

$$\vec{a} // \vec{b} \text{ 時等號成立} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \text{ 時等號成立}$$