

ch01_坐標系與函數圖形

若 $3+2\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}-1} + b(\sqrt{2}-1)$ ，其中 $a、b$ 為有理數，則 $a^2 - b^2 = ?$

- (A) 6 (B) 5 (C) $\frac{49}{4}$ (D) $\frac{23}{4}$

【114C05】

Ans : (A)

$$(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = a + b(\sqrt{2}-1)^2$$

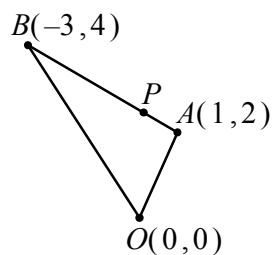
$$3\sqrt{2} - 3 + 4 - 2\sqrt{2} = a + b(3 - 2\sqrt{2})$$

$$1 + \sqrt{2} = (a + 3b) - 2b\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ -2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = 6 \quad \times$$

已知坐標平面上四點 $O, P, A(1, 2), B(-3, 4)$ ，其中 O 為原點，且點 P 在線段 $\overline{AB}$ 上，如圖所示。若 $\triangle OAP$ 的面積： $\triangle OBP$ 的面積 = 2：7，則點 P 的坐標為何？



【114C18】

(A) $(\frac{1}{9}, \frac{22}{9})$ (B) $(\frac{-19}{9}, \frac{32}{9})$

(B)(C) $(\frac{-23}{5}, \frac{24}{5})$ (D) $(\frac{13}{5}, \frac{6}{5})$

Ans : (A)

$\therefore \triangle OAP$ 面積： $\triangle OBP$ 面積

$$= \overline{AP} : \overline{BP}$$

$$= 2 : 7 \text{ (兩 } \triangle \text{ 等高)}$$

$$\therefore P\left(\frac{7 \times 1 + 2 \times (-3)}{2 + 7}, \frac{7 \times 2 + 2 \times 4}{2 + 7}\right) = P\left(\frac{1}{9}, \frac{22}{9}\right)$$

若點 (a, b) 落在第一象限且滿足 $b = -a^2 + 10$ ，則 a^2b 的最大值為何？

- (A) 10 (B) 21 (C) 23 (D) 25

【113C08】

Ans : (D)

$$a^2 + b = 10$$

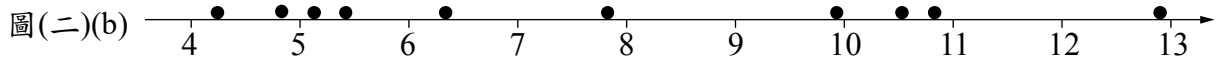
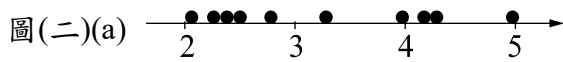
$$\frac{a^2 + b}{2} \geq \sqrt{a^2 b}$$

$$5 \geq \sqrt{a^2 b}$$

$$a^2 b \leq 25$$

在生成式人工智慧技術中，利用函數變換的概念可將資料的分布狀態作轉換。

在生成式人工智慧技術中，利用函數變換的概念可將資料的分布狀態作轉換。若有十筆原始資料 x (以 $\bullet$ 表示) 分布在區間 $[2, 5]$ ，如圖(二)(a)，現將此十筆資料經線型函數 $f(x)$ 變換後，其分布區間為 $[4, 13]$ ，如圖(二)(b)，則下列何者可為達成任務的 $f(x)$ ？



- (A) $f(x) = 2x + 4$ (B) $f(x) = 4x - 4$ (C) $f(x) = 3x - 2$ (D) $f(x) = 2x - 3$ 【113C10】

Ans : (C)

$$(c) f(x) = 3x - 2$$

$$\text{滿足 } f(2) = 3 \times 2 - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$f(5) = 3 \times 5 - 2 = 15 - 2 = 13$$

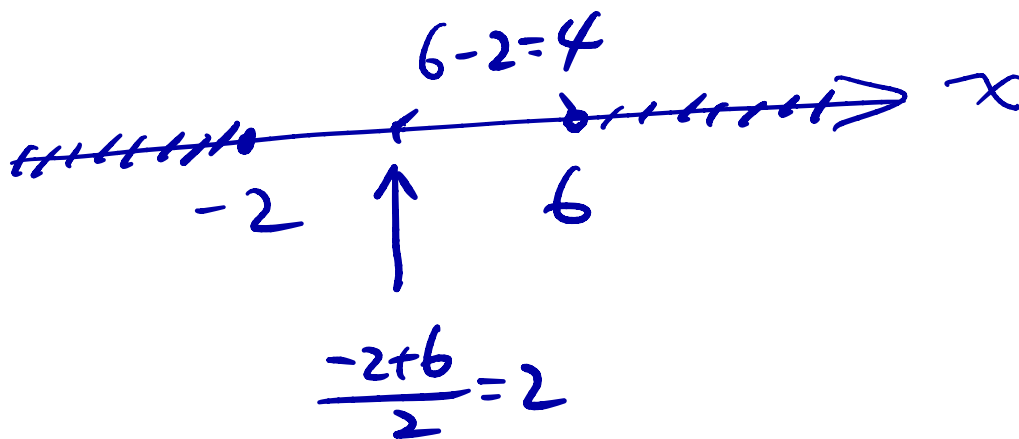
$$[2, 5] \xrightarrow{3x-2} [4, 13]$$

已知 A 、 B 為實數，若不等式 $|Ax+6| \geq B$ 的解為 $x \leq -2$ 或 $x \geq 6$ ，則 $2A+B=?$

(A) -12 (B) -6 (C) 6 (D) 12

【112CII】

Ans : (C)



$$|x-2| \geq 4$$

$$|x-2| \times |-3| \geq 4 \times |-3|$$

$$|-3x+6| \geq 12$$

$$A = -3, B = 12$$

$$2A+B = -6+12=6 \neq$$

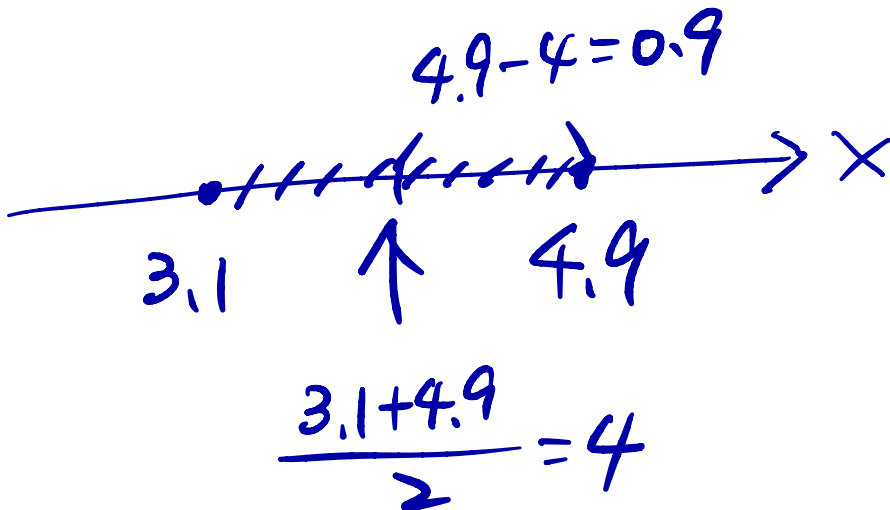
公益文教基金會調查技術型高中三年級學生每天手機使用時間介於 3.1 至 4.9 小時之間(含)。

若 x (單位：小時)為其中一位參與調查的技術型高中學生每天手機使用時間，且將上述使用時間範圍用 $|x-a| \leq b$ 來表示，則 $ab = ?$

- (A) 3.2 (B) 3.6 (C) 3.8 (D) 4.2

【111C03】

Ans : (B)



$$|x - 4| \leq 0.9$$

$$a = 4, b = 0.9$$

$$ab = 4 \times 0.9 = 3.6$$

不等式 $5x-4 < x^2 < x+2$ 的解為何？

- (A) $-1 < x < 1$ (B) $-1 < x < 2$ (C) $-2 < x < 1$ (D) $0 < x < 4$

【111C08】

Ans : (A)

$$5x-4 < x^2 \rightarrow x^2-5x+4 > 0$$

$\begin{array}{cc} 1 & -4 \\ | & - \\ \times & \end{array}$

$$\rightarrow (x-1)(x-4) > 0$$

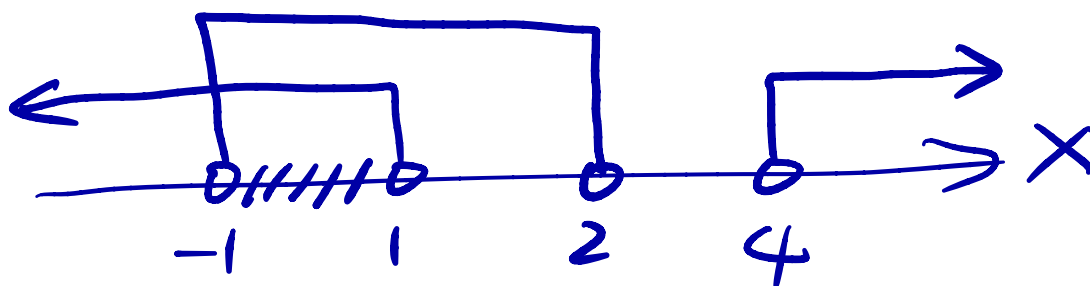
$$\rightarrow x < 1 \text{ 或 } x > 4$$

$$x^2 < x+2 \rightarrow x^2-x-2 < 0$$

$\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ | & + \\ \times & \end{array}$

$$\rightarrow (x+1)(x-2) < 0$$

$$\rightarrow -1 < x < 2$$



$$-1 < x < 1 \quad \times$$

若 x 為實數，則 $x^2 - 2 + \frac{9}{x^2 + 2}$ 的最小值為何？

- (A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{13}{2}$ (D) 6

【110C20】

Ans : (A)

$$\therefore x^2 + 2 > 0, \quad \frac{9}{x^2 + 2} > 0$$

$$\therefore x^2 + 2 + \frac{9}{x^2 + 2} \geq 2 \cdot \sqrt{\cancel{(x^2 + 2)} \cdot \cancel{\left(\frac{9}{x^2 + 2}\right)}} = 6$$

$$\text{故 } x^2 + 2 + \frac{9}{x^2 + 2} - 4 \geq 6 - 4$$

$$x^2 - 2 + \frac{9}{x^2 + 2} \geq 2 \quad \#$$

設 a 、 b 為實數，且不等式 $-x^2 + 6x + b > 0$ 與不等式 $|x + a| < 5$ 的解完全相同，則 $a + b = ?$

(A) -13 (B) -7 (C) 7 (D) 13

【106C12】

Ans : (D)

$$|x + a| < 5 \rightarrow -5 < x + a < 5$$
$$\rightarrow -5 - a < x < 5 - a$$

$$-x^2 + 6x + b > 0 \rightarrow x^2 - \underline{6x} - \underline{b} < 0$$

$$\text{而 } [x - (-5 - a)][x - (5 - a)] < 0$$

$$x^2 - (5 - a)x - (-5 - a)x + (-5 - a)(5 - a) < 0$$

$$\rightarrow x^2 + \underline{2ax} - \underline{(25 - a^2)} < 0$$

$$\therefore 2a = -6 \rightarrow a = -3$$

$$b = 25 - (-3)^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\text{故 } a + b = (-3) + 16 = 13 \quad \times$$

已知 a 、 b 為實數，若不等式 $x^2 + ax \leq b$ 之解為 $-5 \leq x \leq 3$ ，則 $a+b = ?$

(A) -17 (B) -13 (C) 13 (D) 17

【104C01】

Ans : (D)

$$-5 \leq x \leq 3 \rightarrow (x+5)(x-3) \leq 0$$

$$\rightarrow x^2 + 2x - 15 \leq 0$$

$$\rightarrow x^2 + 2x \leq 15$$

$$\therefore a=2, b=15$$

$$\text{故 } a+b = 2+15 = 17 \quad \text{✗}$$

下列方程式所對應的圖形中，何者恆在 x 軸的上方？

(A) $y = 5x^2 - 3x + 1$ (B) $y = 3x^2 + 5x - 1$ (C) $y = x^2 - 5x + 3$ (D) $y = 3x^2 + x - 5$ 【104C02】

Ans : (A)

$$(A) (-3)^2 - 4 \times 5 \times 1 < 0 \text{ (合)}$$

$$(B) 5^2 - 4 \times 3 \times (-1) > 0 \text{ (不合)}$$

$$(C) (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 > 0 \text{ (不合)}$$

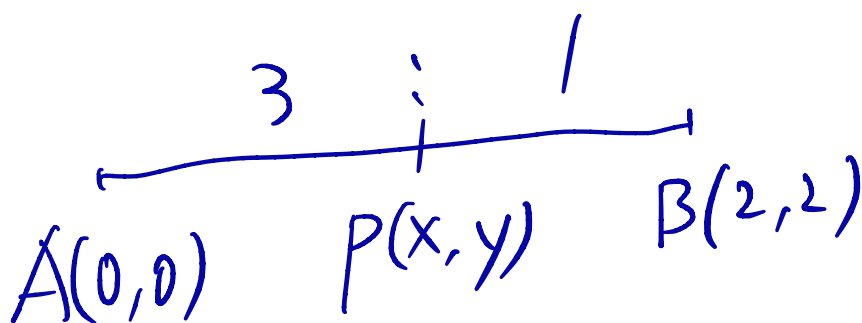
$$(D) 1^2 - 4 \times 3 \times (-5) > 0 \text{ (不合)}$$

設 $A(0,0)$ 、 $B(2,2)$ 為平面上二點，若 $P(m,n)$ 在線段 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$ ，則 $m+n$ 之值為何？

- (A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 3.5

【103C07】

Ans : (C)



$$x = \frac{0+6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{0+6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore m = \frac{3}{2}, n = \frac{3}{2} \rightarrow m+n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

設 $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 6$, 則 xy^2 之最大值為何?

(A) 16 (B) 18 (C) 25 (D) 32

【103C18】

Ans : (D)

$$x + y = 6 \rightarrow x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = 6$$

$$\text{由 } \frac{x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot \frac{1}{2}y \cdot \frac{1}{2}y} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}xy^2}$$

$$2 \geq \sqrt[3]{\frac{1}{4}xy^2} \rightarrow 8 \geq \frac{1}{4}xy^2$$

$$\rightarrow xy^2 \leq 32 \quad *$$

下列何者為不等式 $3x^2 - 3x \leq 6$ 之解？

- (A) $x \leq -2$ 或 $x \geq 1$ (B) $-2 \leq x \leq 1$ (C) $-1 \leq x \leq 2$ (D) $x \leq -1$ 或 $x \geq 2$ 【101C01】

Ans : (C)

$$3x^2 - 3x \leq 6$$

$$x^2 - x \leq 2$$

$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} x \begin{array}{c} +1 \\ -2 \end{array}$$

$$(x+1)(x-2) \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 2 \quad \text{✗}$$

在 xy 平面上， P 和 Q 為拋物線 $y = x^2$ 上的兩點，若 P 和 Q 的 x 坐標分別是 -1 和 2 ，則 P 和 Q 的距離為何？

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) $3\sqrt{2}$

【101C08】

Ans : (D)

$$y = (-1)^2 = 1 \rightarrow P(-1, 1)$$

$$y = 2^2 = 4 \rightarrow Q(2, 4)$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2+1)^2 + (4-1)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 9}$$

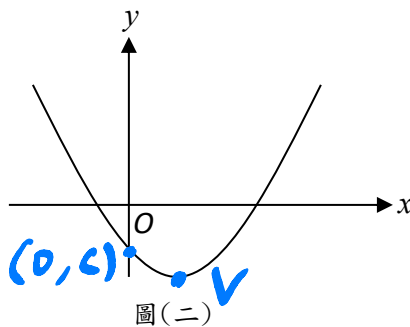
$$= \sqrt{18}$$

$$= 3\sqrt{2} *$$

設 a 、 b 、 c 為實數，且二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形如圖(二)所示，則點 $P(b^2 - 4ac, abc)$

在第幾象限？

- (A) 第一象限
- (B) 第二象限
- (C) 第三象限
- (D) 第四象限



【100C10】

Ans : (A)

開口向上 $\rightarrow a > 0$

在第四象限

$\checkmark \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) \rightarrow (+, -)$

$b < 0, b^2 - 4ac > 0$

$(0, c) \rightarrow c < 0$

故 $P(b^2 - 4ac, abc) \rightarrow (+, +)$

$\rightarrow$ 第一象限

*

設 a 、 b 為實數，若一元二次不等式 $ax^2 + x + b > 0$ 的解集合為 $\left\{x \mid -\frac{1}{5} < x < \frac{2}{3}, x \text{ 為實數} \right\}$ ，則

$$2a + b = ?$$

(A) -5 (B) -4 (C) 4 (D) 5

【100C23】

Ans : (B)

$$-\frac{1}{5} < x < \frac{2}{3} \rightarrow (5x+1)(3x-2) < 0$$

$$\rightarrow 15x^2 - 7x - 2 < 0$$

$$\xrightarrow{\times (-\frac{1}{15})} -\frac{15}{7}x^2 + x + \frac{2}{7} > 0$$

$$\therefore a = -\frac{15}{7}, b = \frac{2}{7}$$

$$\text{故 } 2a + b = -\frac{30}{7} + \frac{2}{7} = \frac{-28}{7} = -4$$

平面上兩點 $A(5, -1)$, $B(3, 4)$ 。若 C 點在 y 軸上，且滿足 $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，則 C 點坐標為何？

- (A) $(0, -\frac{1}{10})$ (B) $(0, -\frac{1}{15})$ (C) $(0, \frac{1}{15})$ (D) $(0, \frac{1}{10})$

【98C01】

Ans : (A)

設 $C(0, y)$

$$\because \overline{AC} = \overline{BC}$$

$$\therefore \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$25 + (y+1)^2 = 9 + (y-4)^2$$

$$25 + \cancel{y^2} + 2y + 1 = 9 + \cancel{y^2} - 8y + 16$$

$$10y = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{10}$$

故得 $C(0, -\frac{1}{10})$ ~~✗~~

ch02_三角函數

試求 $\tan 2025^\circ + \sec 2025^\circ = ?$

- (A) $-1-\sqrt{2}$ (B) $1-\sqrt{2}$ (C) $-1+\sqrt{2}$ (D) $1+\sqrt{2}$

【114C04】

Ans : (B)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \tan 225^\circ + \sec 225^\circ \\ &= \tan(180^\circ + 45^\circ) + \sec(180^\circ + 45^\circ) \\ &= \tan 45^\circ - \sec 45^\circ \\ &= 1 - \sqrt{2} \quad \text{✕}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 360^\circ \\ 720^\circ \\ 1080^\circ \\ 1440^\circ \\ 1800^\circ \leftarrow 2025^\circ \\ 2160^\circ \\ \hline 2025^\circ \\ - 1800^\circ \\ \hline 225^\circ \end{array}$$

試問點 $(\sin 155^\circ - \sin 55^\circ, \cos 222^\circ - \cos 122^\circ)$ 在第幾象限？

(A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

【114C08】

Ans : (C)

$$\therefore \sin 155^\circ = \sin(180^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ < \sin 55^\circ$$

$$\therefore \sin 155^\circ - \sin 55^\circ < 0$$

$$\therefore \cos 222^\circ = \cos(180^\circ + 42^\circ) = -\cos 42^\circ$$

$$\cos 122^\circ = \cos(180^\circ - 58^\circ) = -\cos 58^\circ$$

$$\text{而 } \cos 42^\circ > \cos 58^\circ \rightarrow -\cos 42^\circ < -\cos 58^\circ$$

$$\therefore \cos 222^\circ < \cos 122^\circ \rightarrow \cos 222^\circ - \cos 122^\circ < 0$$

故 $(-, -) \rightarrow$ 在第三象限 $\times$

已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=2$ 且 $\angle C=60^\circ$ 。若 $\overline{AC}:\overline{BC}=1:3$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？

- (A) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{7}$ (C) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ (D) $\frac{5\sqrt{3}}{7}$

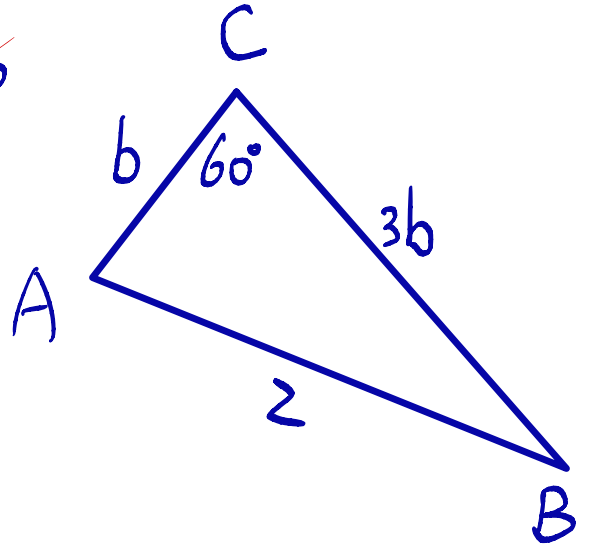
【114C19】

Ans : (B)

$$2^2 = b^2 + (3b)^2 - 2 \times b \times (3b) \times \cos 60^\circ$$

$$4 = b^2 + 9b^2 - 3b^2$$

$$4 = 7b^2 \rightarrow b^2 = \frac{4}{7}$$



$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times b \times (3b) \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

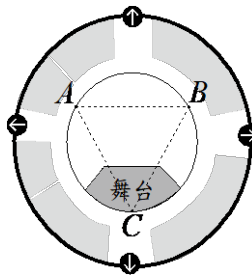
$$= \frac{3\sqrt{3}}{7} \quad \#$$

某攝影師參觀一棟圓樓建築，從地面上兩個不同位置點 A 、 B 拍攝一樓圓型展演劇場舞台上位於 C 點的擺飾，如圖所示。已知 A 、 B 、 C 三點所在之圓的半徑為 10 公尺，且

$\angle ACB = 60^\circ$ ，則 A 、 B 兩點的距離為多少公尺？

- (A) $5\sqrt{3}$ (B) 10 (C) $10\sqrt{3}$ (D) 20

【114C20】



$$\frac{c}{\sin 60^\circ} = 2 \times 10$$

$$c = 2 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \quad \times$$

若 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 且 $\sin \theta = \sin 2024^\circ$ ，則 $\theta = ?$

- (A) 204° (B) 214° (C) 224° (D) 234°

【113C03】

Ans : (C)

$$\begin{array}{r} 2024 \\ -1800 \\ \hline 224 \end{array}$$

224° 為 2024° 的最小正同界角

$$180^\circ < 224^\circ < 270^\circ$$

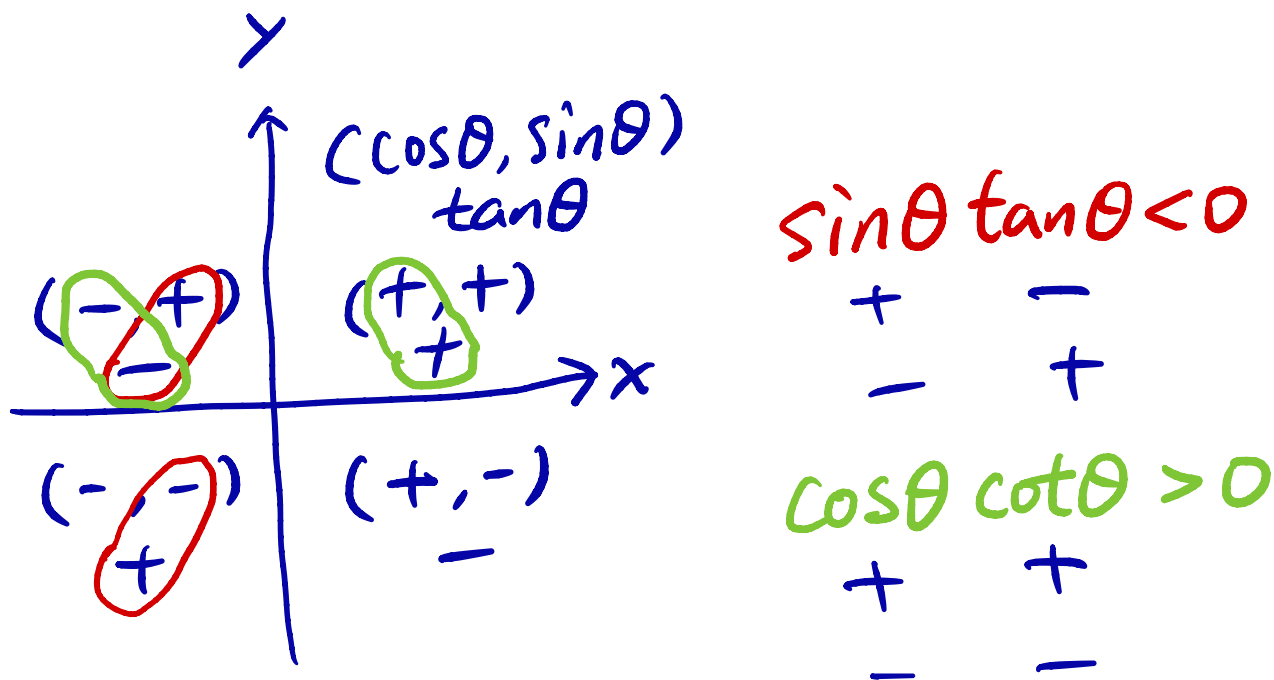
$$\therefore \theta = 224^\circ$$

已知 $\sin \theta \tan \theta < 0$ 且 $\cos \theta \cot \theta > 0$ ，則 θ 為第幾象限角？

- (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

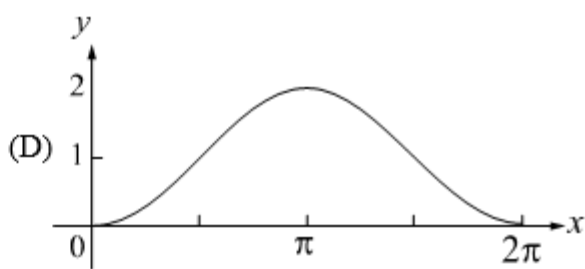
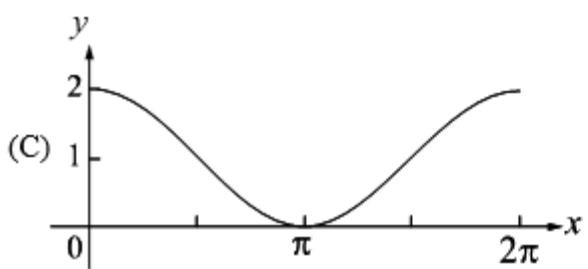
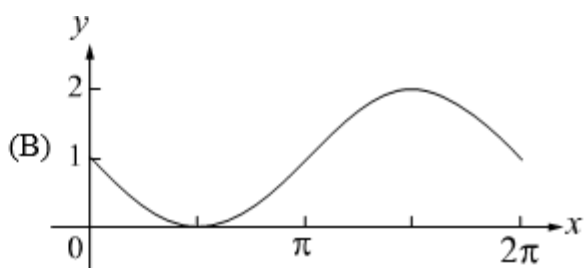
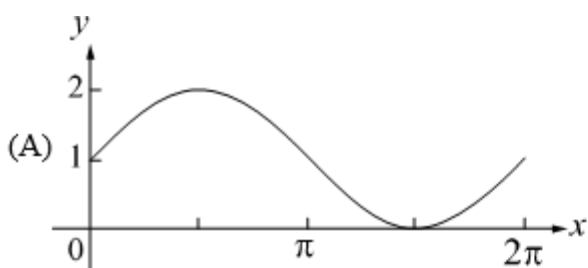
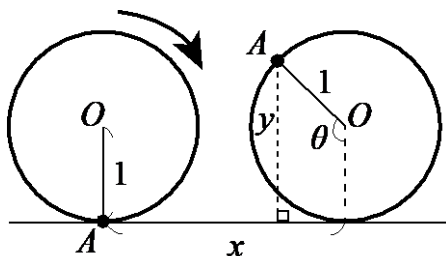
【113C06】

Ans : (B)



$\therefore \theta$ 為第二象限角

有一個在水平地面上的圓形輪子，其半徑為 1 單位長。輪子上 A 點與地面接觸，如圖所示，當輪子向右滾動，相對於圓心 O 而言， A 點以順時針轉動 θ 角，且輪子中心 O 前進 x 單位長的時候， A 點距離地面的高度為 y 單位長。在坐標平面上，若在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍中， y 可以表示為 x 的函數 $f(x)$ ，則下列圖形何者為 $y=f(x)$ 的圖形？



Ans : (D)

【113CI7】

$$x=0 \rightarrow y=0$$

$$x=r \cdot \pi = 1 \times \pi = \pi \rightarrow y=2r=2$$

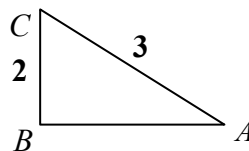
$$x=2\pi r = 2 \times \pi \times 1 = 2\pi \rightarrow y=0$$

故選 (D)

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，如圖所示，且 $\overline{AC} = 3$ 、 $\overline{BC} = 2$ ，則 $\tan A = ?$

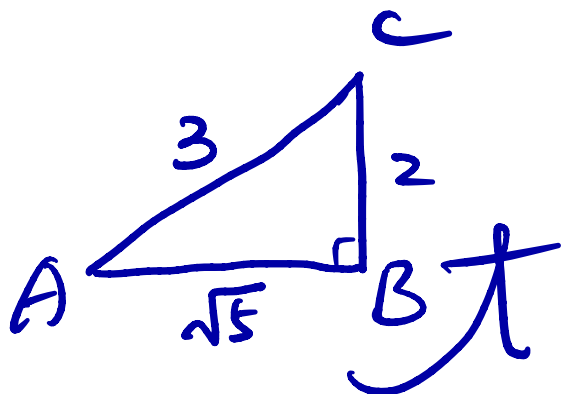
- (A) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$

Ans : (B)



【112C03】

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$



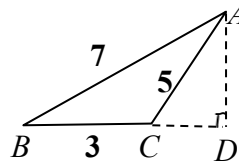
$$\tan A = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \#$$

已知 $\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{AB}=7$ ， $\overline{BC}=3$ ， $\overline{CA}=5$ ，如圖所示，試求 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}=?$

- (A) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

【112C06】

Ans : (D)



$$S = \frac{1}{2}(3+5+7) = \frac{15}{2}$$

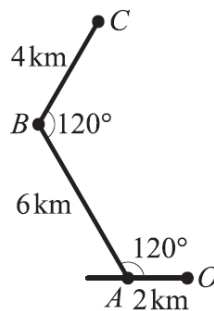
$$\Delta = \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \times 3 \times \overline{AD}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad \times$$

一公路依水平地形迂迴而建，如圖所示。從 O 地到 A 地、 A 地到 B 地、 B 地到 C 地的距離分別為 2、6、4 公里(km)，而 $\overline{OA}$ 與 $\overline{AB}$ 的夾角及 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的夾角均為 120° ，則 C 地到 O 地的直線距離為多少公里？

- (A) $2\sqrt{11}$ (B) $2\sqrt{21}$ (C) $2\sqrt{31}$ (D) $2\sqrt{41}$

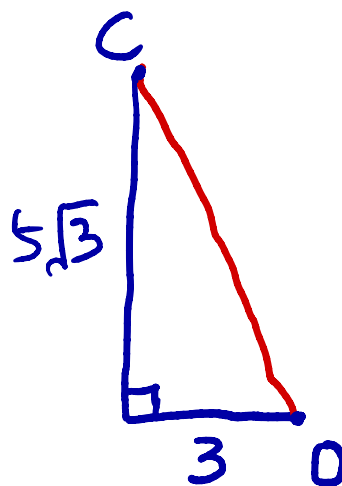
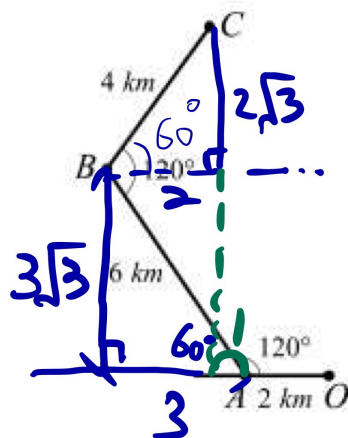
Ans : (B)



【112C18】

如圖

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \sqrt{3^2 + (5\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{9 + 75} \\ &= \sqrt{84} \\ &= 2\sqrt{21} \quad \# \end{aligned}$$



假設風力發電的風車旋轉軸平行於地面，且有三葉片，T 點為某葉片的頂端，如圖所示，我們想了解 T 點在風車旋轉過程中距離地面的高度變化。已知風車逆時針方向等速旋轉一圈需時 4 秒，且每個葉片長度皆為 40 公尺，其旋轉中心離地面 70 公尺。若風車開始運轉時，T 點恰在離地面最高的位置上，且 x 秒後可用 $f(x) = 40\sin(ax + \frac{\pi}{2}) + 70$ (其中常數 $a > 0$ 且 $0 \leq x \leq 4$) 來描述 T 點離地面的高度(單位：公尺)，則 a 可為下列何者？ 【112C25】

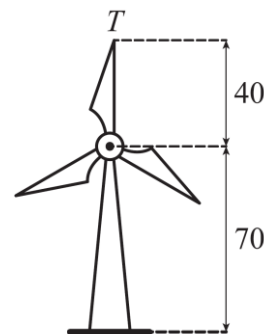
(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) π

(D) $\frac{4\pi}{3}$

Ans : (B)



$$T = \frac{2\pi}{a} = 4 \rightarrow a = \frac{\pi}{2} \quad \times$$

下列何者錯誤？

(A) $y = |\sin 2x|$ 之週期為 $\frac{\pi}{2}$ (B) $y = 3\sin x$ 之週期為 2π

(C) $y = \cos 2x$ 之週期為 $\frac{\pi}{2}$ (D) $y = 4\cos x$ 之週期為 2π

【111C04】

Ans : (C)

$$(A) \because y = \sin 2x \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\therefore y = |\sin 2x| \rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

$$(B) y = 3\sin x \rightarrow T = 2\pi$$

$$(C) y = \cos 2x \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$(D) y = 4\cos x \rightarrow T = 2\pi$$

若 $\triangle ABC$ 之三邊長為 4、5、6，則其外接圓直徑為何

- (A) $\frac{8}{\sqrt{7}}$ (B) $\frac{12}{\sqrt{7}}$ (C) $\frac{16}{\sqrt{7}}$ (D) $\frac{20}{\sqrt{7}}$

【111C22】

Ans : (C)

$$S = \frac{1}{2}(4+5+6) = \frac{15}{2}$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2}} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{4 \times \cancel{5} \times \cancel{6}^2}{4 \times \cancel{15\sqrt{7}}^2 / 4} = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

$$\text{直徑 } 2R = \frac{16}{\sqrt{7}} \quad \times$$

已知 $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，其中 $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{AC}=2$ ，且 $\angle BAC$ 為鈍角。若 $\overline{BC}$ 的長度為 a ，則

$$a^2 = ?$$

- (A) $13-6\sqrt{2}$ (B) $13-2\sqrt{6}$ (C) $13+2\sqrt{6}$ (D) $13+6\sqrt{2}$

【111C23】

Ans : (D)

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin A = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \angle A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\because \angle A \text{ 為鈍角} \therefore \angle A = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 135^\circ$$

$$= 4 + 9 - 12 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 13 + 6\sqrt{2} \quad \times$$

若 $\tan \theta + \sec \theta = 5$ ，則 $\tan \theta - \sec \theta = ?$

- (A) $-\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

【110C02】

Ans : (B)

$$\tan \theta + \sec \theta = 5$$

$$(\sec \theta)^2 = (5 - \tan \theta)^2$$

$$\sec^2 \theta = 25 - 10 \tan \theta + \tan^2 \theta$$

$$1 + \cancel{\tan^2 \theta} = 25 - 10 \tan \theta + \cancel{\tan^2 \theta}$$

$$10 \tan \theta = 24 \rightarrow \tan \theta = \frac{12}{5}$$

$$\rightarrow \sec \theta = 5 - \frac{12}{5} = \frac{13}{5}$$

$$\text{故 } \tan \theta - \sec \theta = \frac{12}{5} - \frac{13}{5}$$

$$= -\frac{1}{5} \quad \times$$

已知 $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對邊長。若 $ab:bc:ca=3:4:6$ ，則

$\sin A:\sin B:\sin C=?$

- (A) $4:3:2$ (B) $4:2:3$ (C) $2:3:4$ (D) $3:2:4$

【110C14】

Ans: (D)

$$\frac{ab}{abc} : \frac{bc}{abc} : \frac{ca}{abc} = 3:4:6$$

$$\frac{1}{c} : \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = 3:4:6$$

$$c:a:b = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 4:3:2$$

$$\text{故 } a:b:c = 3:2:4$$

$$\text{即 } \sin A : \sin B : \sin C = 3:2:4$$

✖

若 $a = \tan 480^\circ$ ， $b = \sec 135^\circ$ ， $c = \cos(-60^\circ)$ ，則下列有序數對何者在第二象限？

- (A) (b, c) (B) (a, b) (C) (c, a) (D) (c, b)

【109C02】

Ans : (A)

$$a = \tan 480^\circ = \tan 120^\circ < 0$$

$$b = \sec 135^\circ < 0$$

$$c = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ > 0$$

$$(A) (b, c) \rightarrow (-, +) \rightarrow \text{II}$$

$$(B) (a, b) \rightarrow (-, -) \rightarrow \text{III}$$

$$(C) (c, a) \rightarrow (+, -) \rightarrow \text{IV}$$

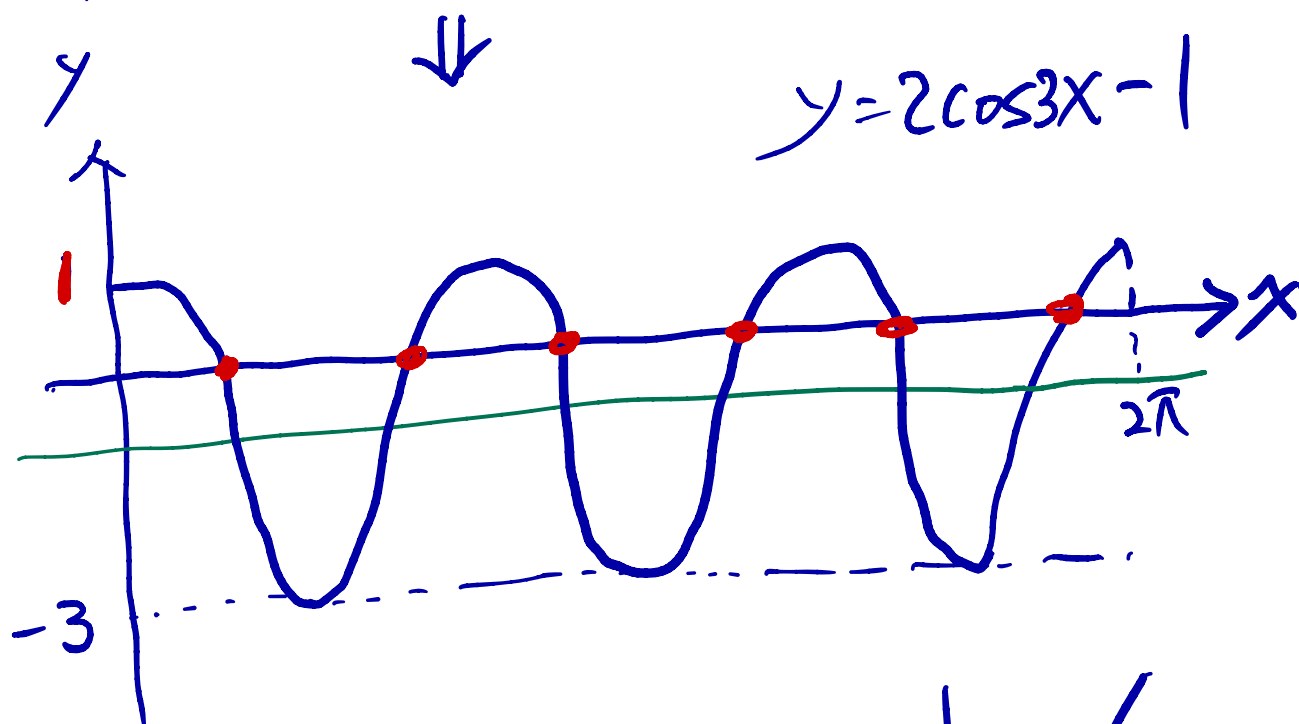
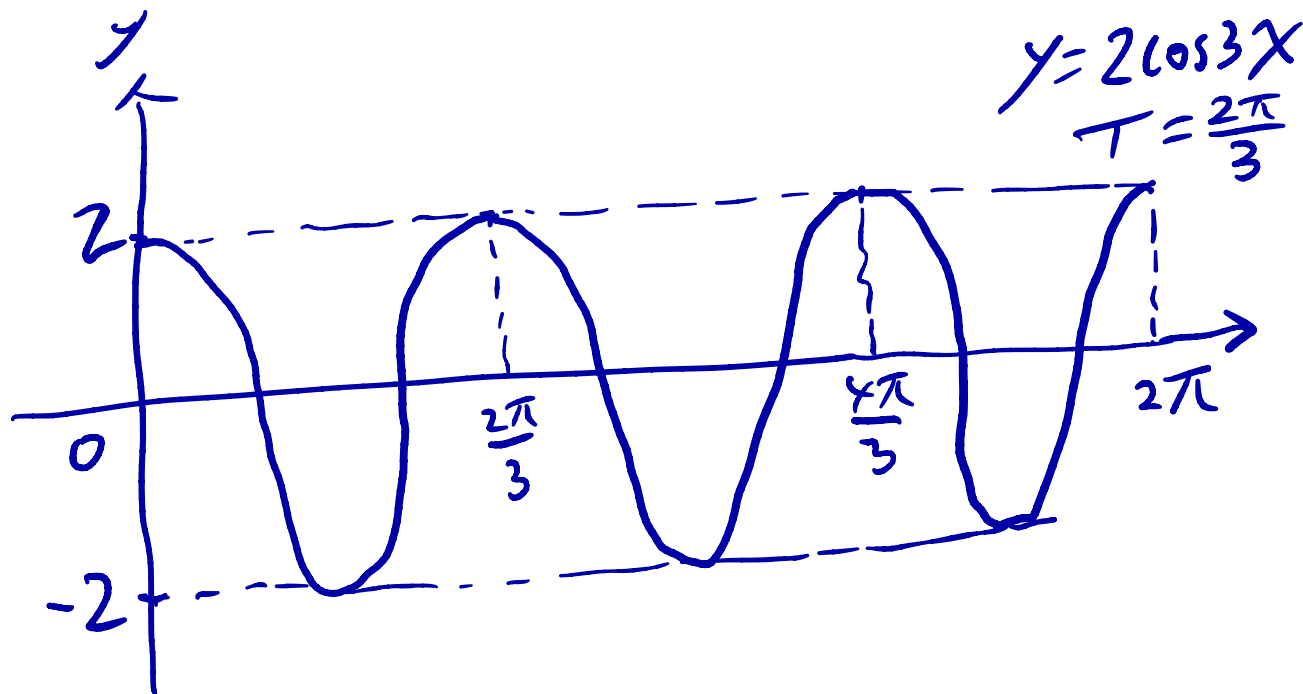
$$(D) (c, b) \rightarrow (+, -) \rightarrow \text{IV}$$

設函數 $f(x) = 2\cos 3x - 1$ ， $x \in [0, 2\pi]$ ，若其圖形和 x 軸的交點個數與函數的最大值分別為 a 、 b ，則 $ab = ?$

- (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18

【109CII】

Ans : (A)

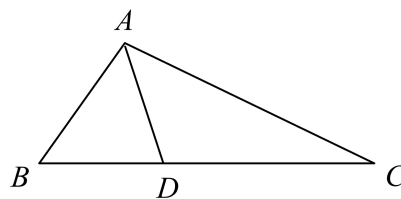


$$a = 6, b = 1 \rightarrow ab = 6$$

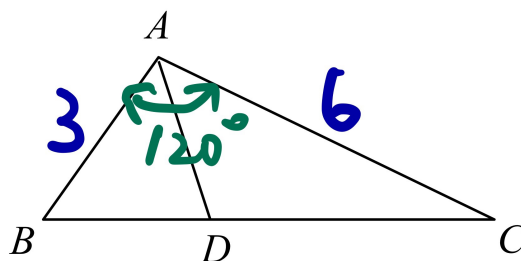
在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D ，其中 $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{AC}=6$ ，且 $\angle A=120^\circ$ ，如圖，則 $\overline{CD}=?$

- (A) $\sqrt{26}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{7}$

Ans : (C)



【109C23】



$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 6 = 1 : 2$$

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 120^\circ \\ &= 9 + 36 - 36 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= 63$$

$$\overline{BC} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

$$\overline{CD} = \overline{BC} \times \frac{2}{3} = 3\sqrt{7} \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{7} \quad \#$$

已知扇形的面積為 1 且其周長為 5，試問此扇形的半徑為何？

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

【108C05】

Ans : (D)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}r^2\theta = 1 & \text{--- ①} \\ r\theta + 2r = 5 & \text{--- ②} \end{cases}$$

注意!
扇形之 $0 < \theta < 2\pi$

由①得 $\theta = \frac{2}{r^2}$ 代入②

~~$\frac{2}{r^2} + 2r = 5 \rightarrow 2 + 2r^2 = 5r$~~

$$2r^2 - 5r + 2 = 0 \rightarrow (r-2)(2r-1) = 0$$

$\frac{1}{2} \times \frac{-2}{-1} \rightarrow r = 2 \text{ 或 } r = \frac{1}{2}$

當 $r = 2$ 時, $\theta = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} < 2\pi \div 6.28$ (合)

當 $r = \frac{1}{2}$ 時, $\theta = \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 8 > 2\pi \div 6.28$ (不合)

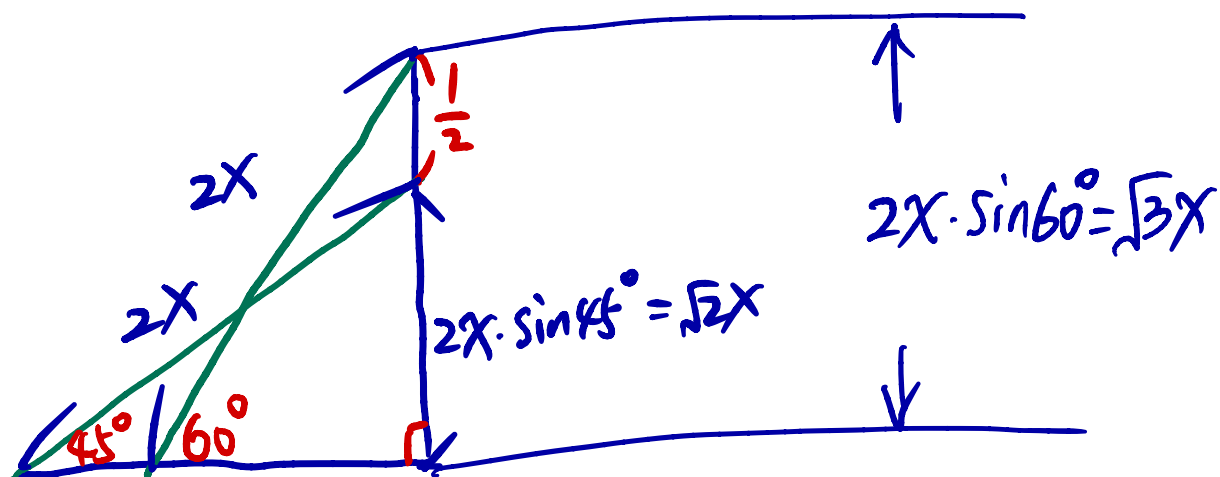
故 $r = 2$ *

有一梯子斜靠於牆上，且梯子、地面及牆面構成一個 30° 、 60° 、 90° 的直角三角形。若梯子沿牆面下滑 $\frac{1}{2}$ 公尺時，則梯子、地面及牆面構成一個 45° 、 45° 、 90° 的直角三角形。試問梯長為多少公尺？

- (A) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

【108C06】

Ans : (C)



$$\text{故 } \sqrt{3}X - \sqrt{2}X = \frac{1}{2}$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})X = \frac{1}{2}$$

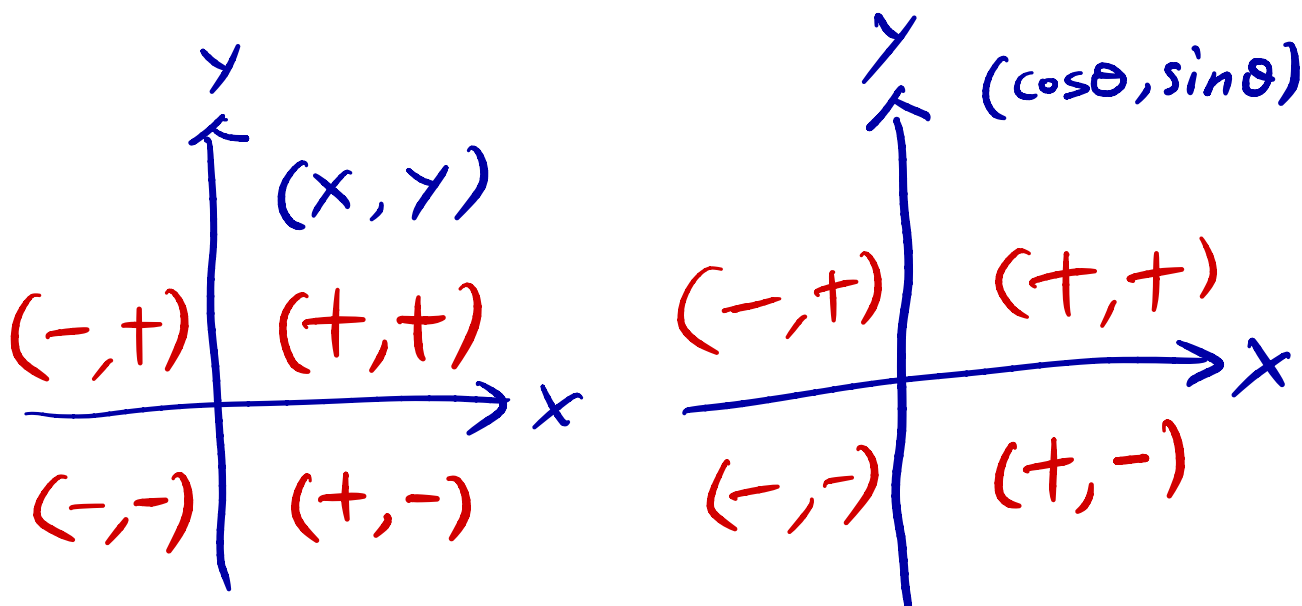
$$2X = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \#$$

若點 $P(x, y)$ 為有向角 θ 終邊上一點且 $xy \neq 0$ ，則下列何者正確？

- (A) $x \sin \theta > 0$ (B) $y \cos \theta > 0$ (C) $x \cot \theta > 0$ (D) $y \csc \theta > 0$

【108C16】

Ans : (D)



即取 $r=1$ 時 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$

(A) $x \sin \theta = xy \begin{cases} \nearrow \text{一、三為} + \\ \searrow \text{二、四為} - \end{cases}$

(B) $y \cos \theta = yx \begin{cases} \nearrow \text{一、三為} + \\ \searrow \text{二、四為} - \end{cases}$

(C) $x \cdot \cot \theta = x \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{x^2}{y} \begin{cases} \nearrow \text{一、三為} + \\ \searrow \text{二、四為} - \end{cases}$

(D) $y \csc \theta = y \cdot \frac{1}{\sin \theta} = y \cdot \frac{1}{y} = 1 > 0$ *

設三角形三邊長分別為 5、6、7，若三角形面積為 A ，內切圓半徑為 r ，則 $A \cdot r = ?$

- (A) 24 (B) 35 (C) 105 (D) 210

【107C07】

Ans : (A)

$$S = \frac{1}{2}(5+6+7) = 9$$

$$A = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

$$r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore Ar = \cancel{6\sqrt{6}}^2 \times \frac{2\sqrt{6}}{\cancel{3}} = 24 \quad \#$$

$$\cos 0^\circ + \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \cdots + \cos 350^\circ + \cos 360^\circ = ?$$

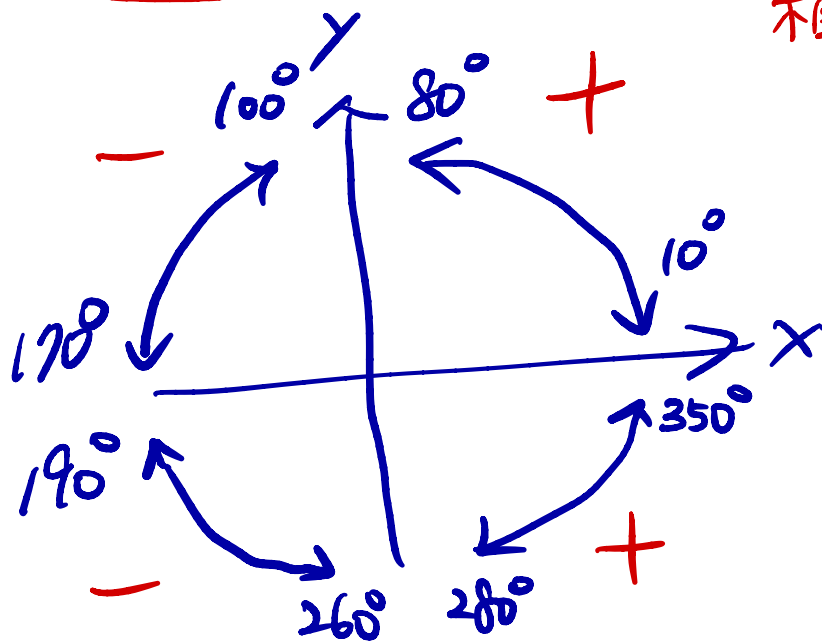
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【107C08】

Ans : (B)

$\cos 0^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0, \cos 180^\circ = -1, \cos 270^\circ = 0, \cos 360^\circ = 1$

相加會消掉 留下



相加會消掉

故原式 = 1 *

若 $\tan \theta \csc \theta = -1 + 6 \cos \theta$ ，其中 θ 為第三象限角時，則 $\tan \theta = ?$

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $-\sqrt{3}$ (D) $-2\sqrt{2}$

【106C02】

Ans : (A)

$$\frac{\cancel{\sin \theta}}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cancel{\sin \theta}} = -1 + 6 \cos \theta$$

$$1 = -\cos \theta + 6 \cos^2 \theta$$

$$6 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$$

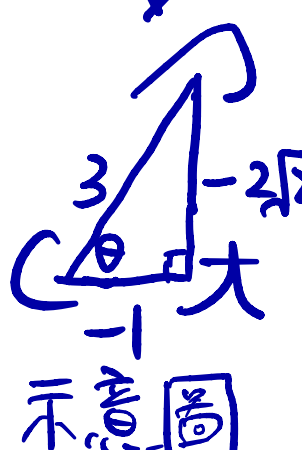
$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ +1 \end{array}$$

$$(2 \cos \theta - 1)(3 \cos \theta + 1) = 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ 或 } \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

(不合)

↓


$$\rightarrow \tan \theta = \frac{-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2} *$$

求 $\sin^2 18^\circ + \sin^2 36^\circ + \sin^2 54^\circ + \sin^2 72^\circ + \sin^2 90^\circ = ?$

(A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 3.5

【106C03】

Ans : (C)

$$\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ = \sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ = 1$$

$$\sin^2 36^\circ + \sin^2 54^\circ = \sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ = 1$$

$$\sin^2 90^\circ = 1$$

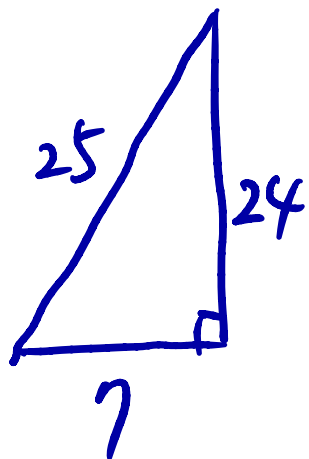
$$\text{故原式} = 1 + 1 + 1 = 3 \quad \#$$

設三角形的三邊長為 7、24、25，其內切圓半徑為 r ，外接圓半徑為 R ，求 $\frac{r}{R} = ?$

- (A) 0.12 (B) 0.24 (C) 0.25 (D) 0.48

【106C05】

Ans : (B)



$$\Delta = \frac{1}{2} \times 7 \times 24 = 84$$

$$S = \frac{1}{2}(7 + 24 + 25) = 28$$

$$r = \frac{\Delta}{S} = \frac{84}{28} = 3$$

直角三角形 $\rightarrow R = \frac{25}{2}$

$R = \text{斜邊長的一半}$

$$\text{故 } \frac{r}{R} = \frac{3}{\frac{25}{2}} = \frac{6}{25} = 0.24 \quad \times$$

設 $\triangle ABC$ 三內角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對應邊分別為 a 、 b 、 c ，且 $\sqrt{a^2 - 3bc} = b - c$ ，求 $\angle A$ 之值。

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

【105C03】

Ans : (B)

$$\begin{aligned} a^2 - 3bc &= (b - c)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \end{aligned}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\text{故 } \cos A = -\frac{1}{2} \rightarrow \angle A = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \quad \times$$

設 $\sec \theta + \csc \theta = 1$ ，求 $\sec \theta \csc \theta$ 之值。

(A) $\sqrt{2}+1$ (B) $\sqrt{2}-1$ (C) $-\sqrt{2}-1$ (D) $-\sqrt{2}+1$

【105C04】

Ans : (C)

$$\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = 1$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \sin \theta \cos \theta$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = (\sin \theta \cos \theta)^2$$

$$1 + 2(\sin \theta \cos \theta) = (\sin \theta \cos \theta)^2$$

$$\text{令 } \sin \theta \cos \theta = t < 1$$

$$\text{則 } 1 + 2t = t^2 \rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

而 $1 + \sqrt{2} > 1$ 不合，故 $t = 1 - \sqrt{2}$

$$\sec \theta \csc \theta = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{t} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = -(\sqrt{2} + 1) = -\sqrt{2} - 1$$

✱

已知 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ，則 $\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} = ?$

- (A) $2(\sqrt{3}-1)$ (B) $4(\sqrt{3}-1)$ (C) $2(\sqrt{3}+1)$ (D) $4(\sqrt{3}+1)$

【104C06】

Ans : (C)

$$\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}$$

$$= \sin \theta \left[\frac{\cancel{1-\cos \theta} + \cancel{1+\cos \theta}}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)} \right]$$

$$= \sin \theta \left(\frac{2}{1-\cos^2 \theta} \right)$$

$$= \cancel{\sin \theta} \cdot \frac{2}{\cancel{\sin^2 \theta}}$$

$$= \frac{2}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\cancel{4}(\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}} = 2(\sqrt{3}+1) \quad \times$$

已知三角形的三邊長分別為 3 公分、3 公分、4 公分，則此三角形之外接圓半徑為何？

- (A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{7\sqrt{5}}{10}$ (D) $\frac{9\sqrt{5}}{10}$

【104C24】

Ans : (D)

$$S = \frac{1}{2}(3+3+4) = 5$$

$$\Delta = \sqrt{5 \times 2 \times 2 \times 1} = 2\sqrt{5}$$

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{3 \times 3 \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times 2\sqrt{5}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10} \quad \#$$

在 $\triangle ABC$ 中，設三邊長之比 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=7:5:3$ ，則 $\triangle ABC$ 之最大內角為何？

- (A) 75° (B) 90° (C) 120° (D) 135°

【103C09】

Ans : (C)

$$c:a:b=7:5:3 \rightarrow a:b:c=5:3:7$$
$$\rightarrow \angle C \text{ 為最大內角}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3}$$

$$= \frac{-15}{30}$$

$$= -\frac{1}{2} \rightarrow \angle C = 120^\circ$$

若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{BC}=9$ 、 $\overline{CA}=10$ ，則 $\cos(\angle A + \angle B) = ?$

- (A) $-\frac{13}{15}$ (B) $-\frac{7}{15}$ (C) $\frac{7}{15}$ (D) $\frac{13}{15}$

【102C06】

Ans : (A)

$$\triangle ABC \text{ 中}, A+B+C=180^\circ \rightarrow A+B=180^\circ-C$$

$$\cos(A+B) = \cos(180^\circ-C) = -\cos C$$

$$\begin{aligned}\text{而 } \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ &= \frac{9^2+10^2-5^2}{2 \times 9 \times 10} \\ &= \frac{156}{180} \\ &= \frac{13}{15}\end{aligned}$$

$$\text{故所求} = -\frac{13}{15} \quad \times$$

已知 θ 為第三象限角，且 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ，則 $\frac{2\sin \theta - 1}{3 + 4\cos \theta} = ?$

- (A) $\frac{1}{31}$ (B) $\frac{13}{7}$ (C) 11 (D) 31

【102C12】

Ans : (C)

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4} = \frac{-3}{-4} \rightarrow \begin{array}{c} \text{示意圖} \end{array}$$

$$\frac{2\sin \theta - 1}{3 + 4\cos \theta} = \frac{2 \times \frac{-3}{5} - 1}{3 + 4 \times (\frac{-4}{5})}$$

$$= \frac{(-6) - 5}{15 - 16}$$

$$= \frac{-11}{-1}$$

$$= 11$$

試問下列哪一個三角函數值與 $\sec 250^\circ$ 相等？

- (A) $-\csc 70^\circ$ (B) $-\sec 110^\circ$ (C) $-\sec 340^\circ$ (D) $-\csc 160^\circ$

【101C14】

Ans : (D)

$$\sec 250^\circ = \sec(180^\circ + 70^\circ) = -\sec 70^\circ$$

$$(A) -\csc 70^\circ \neq -\sec 70^\circ$$

$$(B) -\sec 110^\circ = -\sec(180^\circ - 70^\circ) \\ = -(-\sec 70^\circ)$$

$$= \sec 70^\circ \neq -\sec 70^\circ$$

$$(C) -\sec 340^\circ = -\sec(360^\circ - 20^\circ) \\ = -\sec 20^\circ \neq -\sec 70^\circ$$

$$(D) -\csc 160^\circ = -\csc(90^\circ + 70^\circ) \\ = -\sec 70^\circ$$

$$\sin^2 210^\circ + \cos^2 570^\circ + \sec^2 930^\circ - \tan^2 1290^\circ + \csc^2 1650^\circ - \cot^2 2010^\circ = ?$$

- (A) -1 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3

【101C21】

Ans : (D)

210° 為 570°、930°、1290°、1650°、2010° 的
最小正同界角

∴ 令 $\theta = 210^\circ$

$$\text{則原式} = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sec^2 \theta - \tan^2 \theta \\ + \csc^2 \theta - \cot^2 \theta$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$= 3 \quad \times \times$$

$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BC} = \sqrt{13}$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，則 $\cos C$ 之值為何？

- (A) $-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ (B) $-\frac{1}{\sqrt{13}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

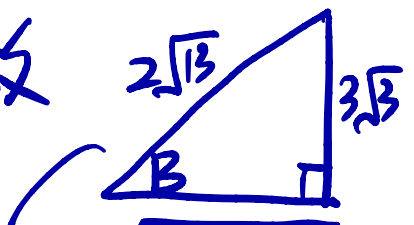
【101C22】

Ans : (C)

$$\frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin B} \rightarrow \sin B = \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

$\because \sqrt{13} > 3 = \sqrt{9} \quad \therefore \angle B$ 必為銳角

故


$$\sqrt{(2\sqrt{13})^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{52 - 27} = \sqrt{25} = 5$$

得 $\cos B = \frac{5}{2\sqrt{13}}$

$$\begin{aligned}\cos C &= \cos[180^\circ - (A+B)] \\ &= -\cos(A+B)\end{aligned}$$

而 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{-4}{4\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

故 $\cos C = \frac{1}{\sqrt{13}}$

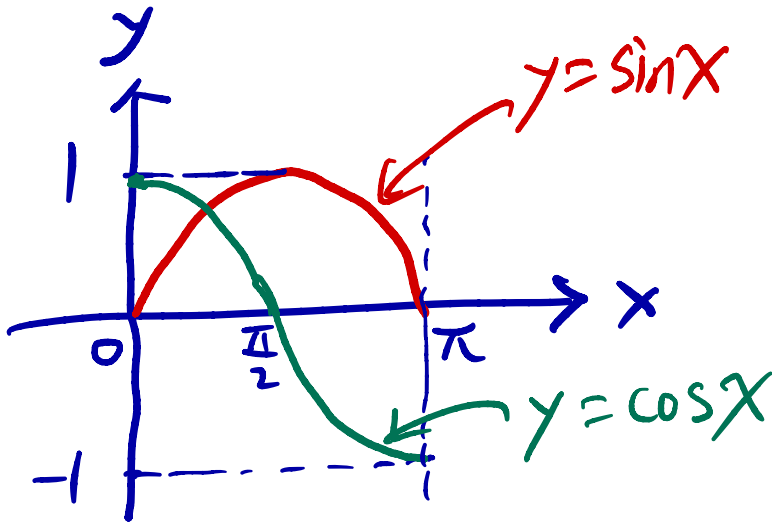
已知 $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ 。下列個選項中，何者恆為正確？

(A) 若 $\cos \alpha = \cos \beta$ ，則 $\alpha = \beta$ (B) 若 $\cos(\alpha - \beta) = 0$ ，則 $\alpha = \beta$

(C) 若 $\sin \alpha = \sin \beta$ ，則 $\alpha = \beta$ (D) 若 $\sin(\alpha - \beta) = 0$ ，則 $\alpha = \beta$

【100C08】

Ans : (A)



(A) 由 $y = \cos x$ 的圖形可知
若 $\cos \alpha = \cos \beta$ ，則 $\alpha = \beta$

(B) $\cos(\alpha - \beta) = 0 \rightarrow$ 取 $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0 \rightarrow \alpha \neq \beta$

(C) 由 $y = \sin x$ 的圖形可知

$$\sin 0 = \sin \pi = 0 \rightarrow 0 \neq \pi$$

(D) $\sin(\alpha - \beta) = 0 \rightarrow$ 可取 $\alpha = \pi, \beta = 0 \rightarrow \alpha \neq \beta$

下列各三角函數值，何者數值最小？

- (A) $\sin 885^\circ$ (B) $\cos(-430^\circ)$ (C) $\tan 131^\circ$ (D) $\sin(-2010^\circ)$

【99C03】

Ans : (C)

$$(A) \sin 885^\circ = \sin \underline{165}^\circ > 0$$

$$\begin{array}{r} 885 \\ - 720 \\ \hline 165 \end{array}$$

$$(B) \cos(-430^\circ) = \cos \underline{290}^\circ > 0$$

$$\begin{array}{r} -430 \\ + 720 \\ \hline 290 \end{array}$$

$$(C) \tan \underline{131}^\circ < 0$$

$$\begin{array}{r} 2160 \\ - 2010 \\ \hline 150 \end{array}$$

$$(D) \sin(-2010^\circ) = \sin \underline{150}^\circ > 0$$

設 A 、 B 、 C 為一圓之圓周上三點，若 $\overline{AB}=4$ 、 $\overline{BC}=6$ 、 $\overline{CA}=8$ ，則該圓之面積為何？

- (A) $\frac{256}{15}\pi$ (B) $\frac{256}{13}\pi$ (C) $\frac{81}{4}\pi$ (D) $\frac{81}{2}\pi$

【99C14】

Ans : (A)

$$S = \frac{1}{2}(6+8+4) = 9$$

$$\Delta = \sqrt{9 \times 3 \times 1 \times 5} = 3\sqrt{15}$$

$$R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \times 8 \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times 3\sqrt{15}} = \frac{16}{\sqrt{15}}$$

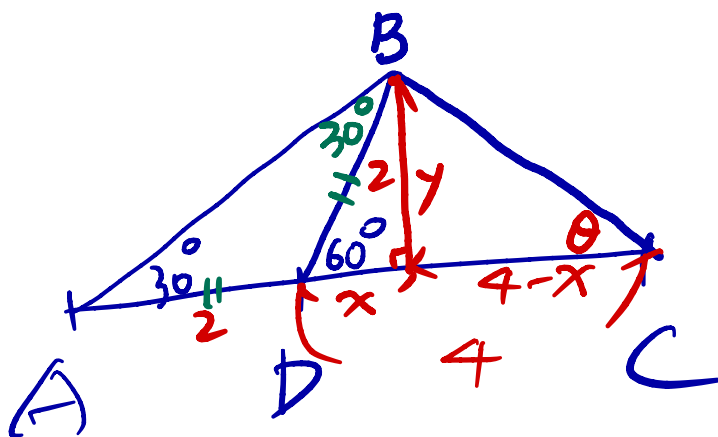
$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{16}{\sqrt{15}}\right)^2 = \frac{256}{15}\pi \quad \#$$

在 $\triangle ABC$ 中，若 D 點在線段 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD}:\overline{DC}=1:2$ ，又 $\angle BAD=30^\circ$ ， $\angle BDC=60^\circ$ ，則 $\angle DCB$ 的角度為何？

- (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°

【99C22】

Ans : (A)



取 $\overline{AD} = \overline{BD} = 2$ ，則 $\overline{CD} = 4$

圖中， $x = 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$
 $y = 2 \cdot \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

而 $4 - x = 4 - 1 = 3$

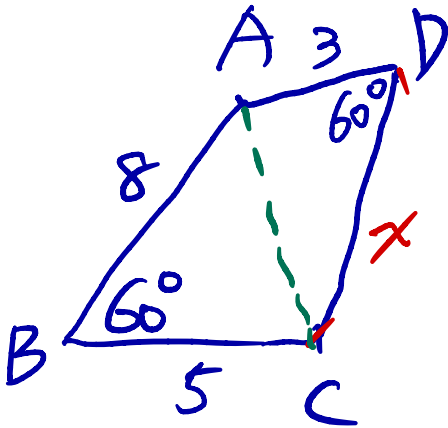
故 $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \theta = 30^\circ$

已知四邊形 $ABCD$ (按順序) 中, $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=5$, $\overline{AD}=3$, 且 $\angle ABC = \angle ADC = 60^\circ$, 則 $\overline{CD}$ 之長為多少?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

【98C04】

Ans : (D)



$$\overline{AC}^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos 60^\circ = 49$$

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + x^2 - 2 \times 3 \times x \times \cos 60^\circ = 9 + x^2 - 3x$$

$$\therefore 9 + x^2 - 3x = 49 \rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0$$
$$\begin{array}{l} x^2 - 3x - 40 = 0 \\ | + 5 \\ | - 8 \end{array}$$

$$(x+5)(x-8) = 0 \rightarrow x = 8 \quad \#$$

ch03_平面向量

已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 為直角，試問下列敘述何者正確？

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ (B) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (D) $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = 0$ 【114C02】

Ans : (C)

$$\because \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

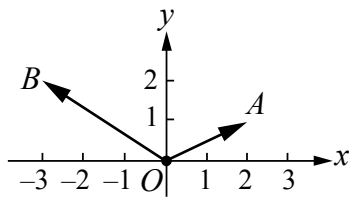
$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad \times$$

在坐標平面上，已知 O 為原點， $A(2, 1)$ ， $B(-3, 2)$ ，如圖所示，若 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$ ，其中 $-1 \leq t \leq 1$ ，則所有滿足 P 點所形成的線段長為多少？

- (A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{2}$

【113C25】

Ans : (B)



$$t = -1 \rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3 - 2, 2 - 1) = (-5, 1)$$

$$t = 1 \rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = (-3 + 2, 2 + 1) = (-1, 3)$$

所求線段之兩端點為 $(-5, 1)$ 、 $(-1, 3)$

$$\begin{aligned} \text{故線段長} &= \sqrt{(-5 + 1)^2 + (1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{16 + 4} \\ &= \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

在坐標平面上，已知 $\triangle ABC$ 的三個頂點坐標為 $A(x, y)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(0, 0)$ ，線段 $\overline{AB}$ 的中點為 D ，線段 $\overline{BC}$ 的中點為 E ，線段 $\overline{AC}$ 的中點為 F 。若內積 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ ，則下列何者為真？

(A) $\triangle ABC$ 為銳角三角形 (B) $\triangle ABC$ 為鈍角三角形 (C) $\angle BCA$ 為直角 (D) $\angle BAC$ 為直角

Ans : (C)

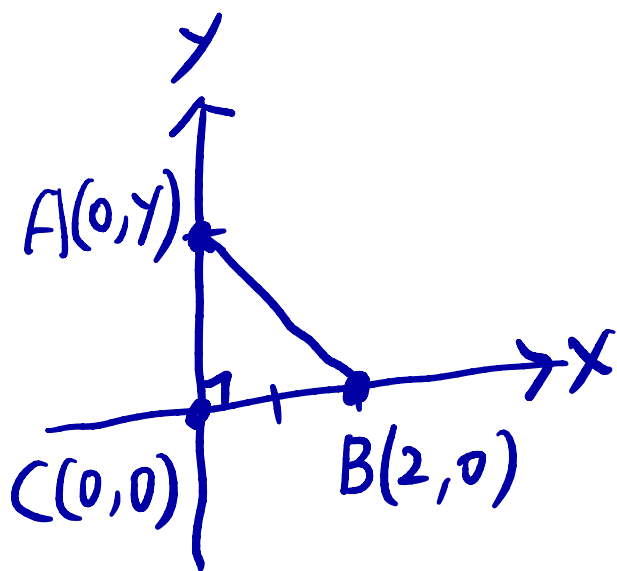
【112C04】

$$D\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y}{2}\right), E(1, 0), F\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{DE} = \left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}\right), \overrightarrow{DF} = (-1, 0)$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \frac{x}{2} = 0 \rightarrow x = 0$$

$\rightarrow A(0, y)$ 在 y 軸上



$\triangle ABC$ 為直角 $\triangle$

且 $\angle BCA$ 為直角

#

已知平面上兩向量 $\vec{a} = (2x+1, -3)$ 、 $\vec{b} = (3, x-2)$ ，滿足 $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ ，則 $x = ?$

(A) 3 (B) 1 (C) -1 (D) -3

【111C16】

Ans : (D)

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (2x+1) \times 3 + (-3) \times (x-2) \\ &= 6x+3-3x+6 \\ &= 3x+9 \end{aligned}$$

$$3x+9=0 \rightarrow x=-3 \quad \#$$

已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 為平面上的三向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ， $|\vec{a}| = 5$ ， $|\vec{b}| = 12$ ， $|\vec{c}| = 13$ 。若

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

(A) -30 (B) -60 (C) -65 (D) -156

【110C16】

Ans : (B)

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{c} \\ \vec{b} \perp \vec{c} \end{cases} \rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\times \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ 反向}$$

$$\rightarrow \theta = 180^\circ$$

$$\rightarrow \cos \theta = \cos 180^\circ = -1$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ &= 5 \times 12 \times (-1) \\ &= -60 \end{aligned}$$

設平面上三點 $A(1, 1)$ 、 $B(5, -2)$ 、 $C(5, 2)$ ，且 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影為 $\overrightarrow{AD}$ ，若

$$\overrightarrow{DC} = (x, y),$$

則 $x + y = ?$

- (A) $\frac{34}{25}$ (B) $\frac{89}{25}$ (C) $\frac{104}{25}$ (D) $\frac{112}{25}$

【109C21】

Ans : (D)

$$\overrightarrow{AC} = (4, 1), \quad \overrightarrow{AB} = (4, -3)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 16 - 3 = 13, \quad |\overrightarrow{AB}| = 5$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} = \frac{13}{25} (4, -3) = \left(\frac{52}{25}, -\frac{39}{25} \right)$$

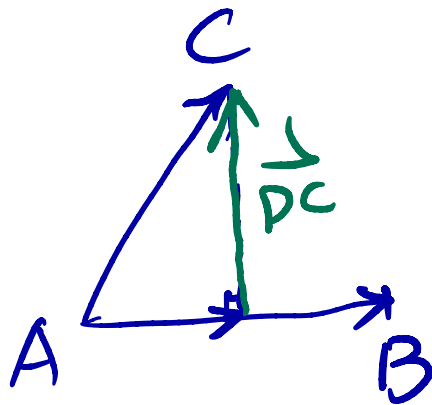
$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$

$$= (4, 1) - \left(\frac{52}{25}, -\frac{39}{25} \right)$$

$$= \left(4 - \frac{52}{25}, 1 + \frac{39}{25} \right)$$

$$= \left(\frac{48}{25}, \frac{64}{25} \right) \rightarrow x = \frac{48}{25}, \quad y = \frac{64}{25}$$

$$\text{故 } x + y = \frac{112}{25} \quad \times$$



已知 $\vec{u} = (1, 1)$ ， $\vec{v} = (x+4, y-1)$ 及 $\vec{w} = (2x, y)$ 。若 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 垂直且 $\vec{u}$ 與 $\vec{w}$ 平行，則下列何者正確？

- (A) $x=1$ (B) $y=-2$ (C) $y=1$ (D) $x=-2$

【108C01】

Ans : (B)

$$\begin{aligned}\vec{u} \perp \vec{v} &\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ &\rightarrow (x+4) + (y-1) = 0 \\ &\rightarrow x + y = -3 \quad \text{--- ①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} \parallel \vec{w} &\rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{y}{1} \\ &\rightarrow y = 2x \quad \text{--- ②}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{將 ② 代入 ① 得 } &x + 2x = -3 \rightarrow x = -1 \\ &\rightarrow y = -2\end{aligned}$$

已知 $|\vec{a}|=1$ ， $|\vec{b}|=\sqrt{5}$ ， $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ 。若 $t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ 和 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，其中 t 為實數，則 $t=?$

- (A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【106C06】

Ans : (A)

$$[t\vec{a} + (1-t)\vec{b}] \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$t|\vec{a}|^2 - t(\vec{a}\cdot\vec{b}) + (1-t)(\vec{a}\cdot\vec{b}) - (1-t)|\vec{b}|^2 = 0$$

$$t + 2t - 2(1-t) - 5(1-t) = 0$$

$$t + 2t - 2 + 2t - 5 + 5t = 0$$

$$10t - 7 = 0$$

$$t = \frac{7}{10} \quad \times$$

已知向量 $\vec{a} = (-6, 8)$ 且與 $\vec{b}$ 之夾角為 60° ，則向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長為何？

- (A) 5 (B) 7 (C) $5\sqrt{3}$ (D) 10

【105C06】

Ans : (A)

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$$

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上之正射影為 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$

$$\text{正射影長} = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \cdot \cancel{|\vec{b}|}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } |\vec{a} \cdot \vec{b}| &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

已知平面上四點坐標為 $A(57, 23)$ 、 $B(7, -2)$ 、 $C(5, 12)$ 、 $D(x, y)$ 。

若向量 $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ ，則 $x+y = ?$

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4

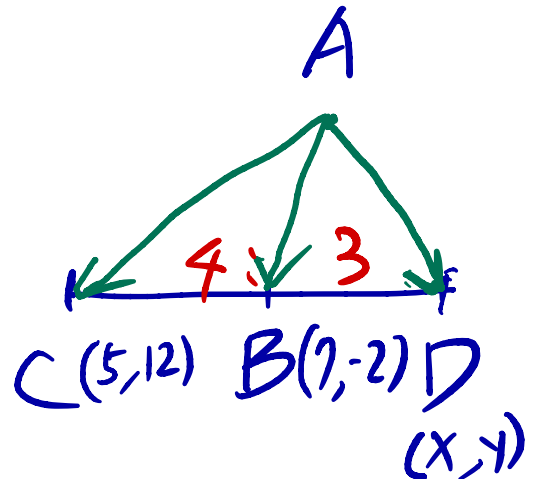
【104C08】

Ans : (A)

$$4\overrightarrow{AD} = 7\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

$$7\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AD} \rightarrow$$



$$7 = \frac{4x+15}{7} \rightarrow 49 = 4x+15 \rightarrow 4x=34 \rightarrow x=\frac{17}{2}$$

$$-2 = \frac{4y+36}{7} \rightarrow 4y+36 = -14 \rightarrow 4y = -50 \rightarrow y = -\frac{25}{2}$$

$$x+y = \frac{17}{2} + \left(-\frac{25}{2}\right) = -\frac{8}{2} = -4$$

已知平面三向量 $\vec{a}=(3,4)$ ， $\vec{b}=(x,-9)$ ， $\vec{c}=(-8,y)$ 。設 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ， $\vec{b} \parallel \vec{c}$ ，則 $y-x=?$

(A) -18 (B) -6 (C) 6 (D) 18

【103C01】

Ans : (B)

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\rightarrow 3x - 36 = 0$$

$$\rightarrow x = 12 \rightarrow \vec{b} = (12, -9)$$

$$\vec{b} \parallel \vec{c} \rightarrow \frac{-8}{12} = \frac{y}{-9}$$

$$\rightarrow y = \frac{72}{12} = 6$$

$$\text{故 } y - x = 6 - 12 = -6 \quad \times$$

設平面二向量 $\vec{u} = (2\cos\theta, \sin\theta)$ ， $\vec{v} = (\sin\theta, 2\cos\theta)$ 且其內積 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ ，若 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，則 θ 之值

可能為何？

- (A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

【103C20】

Ans : (A)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \sin 2\theta + \sin 2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\sin 2\theta$$

$$= 1$$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 0 \leq 2\theta \leq \pi \rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} \neq$$

設向量 $\vec{a} = (3, 4)$ ，向量 $\vec{b} // \vec{a}$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -50$ ，則 $|2\vec{a} + 3\vec{b}| = ?$

(A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80

【102C09】

Ans : (A)

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\vec{b} // \vec{a} \text{ 且 } \vec{a} \cdot \vec{b} = -50 < 0 \rightarrow \theta = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 180^\circ$$

$$-50 = 5 \times |\vec{b}| \times (-1) \rightarrow |\vec{b}| = 10$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 12(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 9|\vec{b}|^2$$
$$= 4 \times 25 + 12 \times (-50) + 9 \times 100$$

$$= 100 - 600 + 900$$

$$= 400$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{400} = 20 \quad \#$$

設向量 $\vec{u} = (a, 2)$ ， $\vec{v} = (3, 2a)$ ， $\vec{w} = (-1, 2)$ ，則下列敘述何者正確？

(A) 若 $2\vec{u} + \vec{v}$ 與 $\vec{w}$ 平行，則 $a = -3$ (B) 若 $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$ ，則 $a = -\frac{5}{2}$

(C) 若 $|2\vec{u} + \vec{v}| = 5$ ，則 $a = -\frac{1}{2}$ (D) 若 $|2\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{w}|$ ，則 $a = 0$

【101C09】

Ans : (B)

$$2\vec{u} + \vec{v} = (2a, 4) + (3, 2a) = (2a+3, 2a+4)$$

$$\begin{aligned} \text{(A)} (2\vec{u} + \vec{v}) // \vec{w} &\rightarrow \frac{2a+3}{-1} = \frac{2a+4}{2} \\ &\rightarrow 4a+6 = -2a-4 \\ &\rightarrow 6a = -10 \\ &\rightarrow a = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} (2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= -(2a+3) + 2(2a+4) = 2a+5 \\ 2a+5 &= 0 \rightarrow a = -\frac{5}{2} \quad \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(C)} |2\vec{u} + \vec{v}|^2 &= 25 \rightarrow (2a+3)^2 + (2a+4)^2 = 25 \\ &\rightarrow 8a^2 + 28a = 0 \\ &\rightarrow a = 0 \text{ 或 } a = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(D)} |2\vec{u} + \vec{v}|^2 &= |\vec{w}|^2 \rightarrow 8a^2 + 28a + 25 = 5 \\ &\rightarrow a \neq 0 \end{aligned}$$

平面上四點 $A(1,1)$ 、 $B(a,2)$ 、 $C(b,-1)$ 、 $D(0,-2)$ ，其中 b 為正數，若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 互相平行， $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 互相垂直，求 $a+2b$ 之值為何？

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

【101C16】

Ans : (D)

$$\overrightarrow{AB} = (a-1, 1), \overrightarrow{CD} = (-b, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \rightarrow \frac{a-1}{-b} = \frac{1}{-1} \rightarrow a = b+1 - ①$$

$$\overrightarrow{BD} = (-a, -4), \overrightarrow{AC} = (b-1, -2)$$

$$\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\rightarrow -a(b-1) + 8 = 0$$

$$\rightarrow a(b-1) = 8 - ②$$

$$\text{將 } ① \text{ 代入 } ② \text{ 得}$$

$$(b+1)(b-1) = 8 \rightarrow b^2 - 1 = 8$$

$$\rightarrow b^2 = 9$$

$$\rightarrow b = 3 (b > 0)$$

$$\therefore a = 3 + 1 = 4$$

$$\text{故 } a + 2b = 4 + 6 = 10$$

已知兩向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 互相垂直。若 $|\vec{a}| = 4\sqrt{5}$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{5}$ ，則 $|\vec{b}| = ?$

- (A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{5}$

【100C03】

Ans : (C)

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (5\sqrt{5})^2$$

$$|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 125$$

$$80 + 0 + |\vec{b}|^2 = 125$$

$$|\vec{b}|^2 = 45$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \quad \text{✕}$$

設 $A(-13, -19)$ 、 $B(x, y)$ 為平面上相異兩點。若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\vec{u} = (5, 12)$ 同方向且

$|\overrightarrow{AB}| = 26$ ，則 $3x - 4y = ?$

- (A) -103 (B) -29 (C) 29 (D) 103

【100C16】

Ans : (B)

$$|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$\overrightarrow{AB} = (x + 13, y + 19)$$

$$= \overset{2}{\cancel{26}} \cdot \frac{(5, 12)}{\cancel{13}}$$

$$= (10, 24)$$

$$\begin{cases} x + 13 = 10 \\ y + 19 = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$3x - 4y = -9 - 20 = -29 \quad \#$$

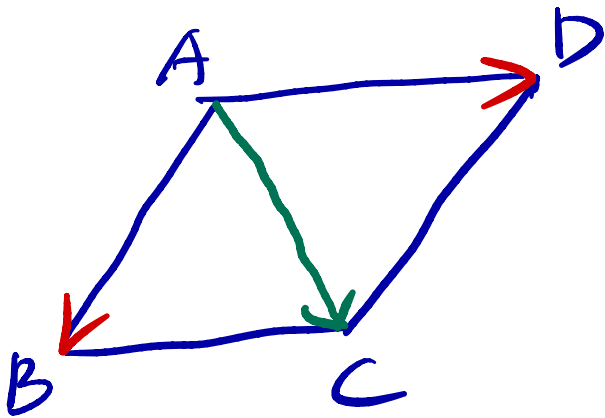
在坐標平面上的平行四邊形 $ABCD$ (按順序) 中，若 $\overrightarrow{AB} = (4, 8)$ 、 $\overrightarrow{AD} = (1, 4)$ ，則

$$|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}| = ?$$

- (A) $4\sqrt{5} + \sqrt{17}$ (B) 18 (C) $8\sqrt{5} + 2\sqrt{17}$ (D) 36

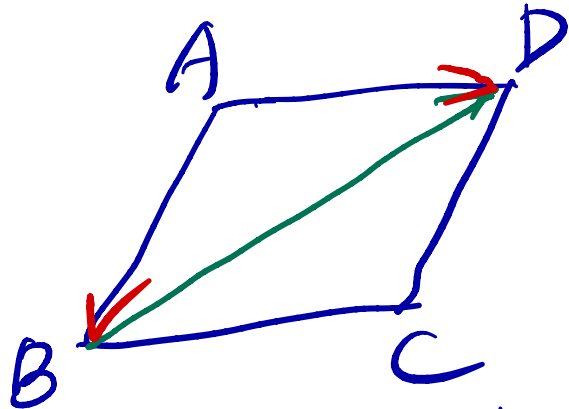
【99C04】

Ans : (B)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= (4, 8) + (1, 4) \\ &= (5, 12)\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = 13$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \\ &= (1, 4) - (4, 8) \\ &= (-3, -4)\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{BD}| = 5$$

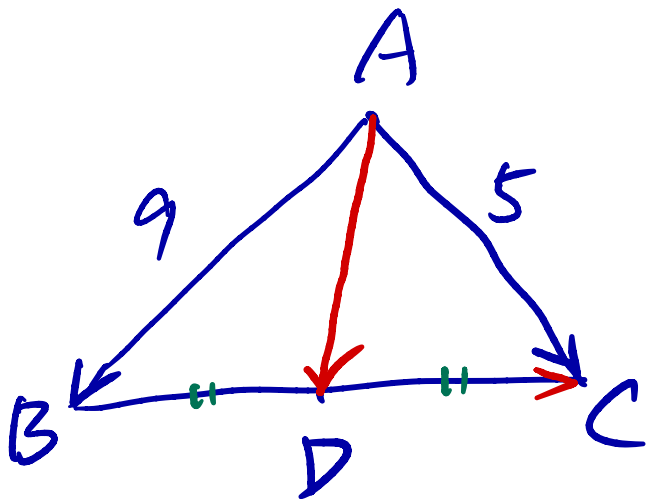
$$\therefore |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}| = 13 + 5 = 18 \quad \#$$

在 $\triangle ABC$ 中，若 D 為線段 $\overline{BC}$ 的中點，且 $\overline{AB}=9$ 、 $\overline{AC}=5$ ，則向量內積 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = ?$

(A) -28 (B) -14 (C) 14 (D) 28

【99C23】

Ans : (A)



$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times (25 - 81)$$

$$= \frac{1}{2} \times (-56) = -28$$

設 $\vec{a} = (4, 3)$ ， $\vec{b} = (x, y)$ 為平面上兩向量，且 $x^2 + y^2 = 40$ ，則此兩向量的內積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值為何？

- (A) $10\sqrt{10}$ (B) $12\sqrt{10}$ (C) $14\sqrt{10}$ (D) $16\sqrt{10}$

【98C14】

Ans : (A)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4x + 3y$$

$$(x^2 + y^2)(4^2 + 3^2) \geq (4x + 3y)^2$$

$$40 \times 25 \geq (4x + 3y)^2$$

$$-\sqrt{1000} \leq 4x + 3y \leq \sqrt{1000}$$

$$-10\sqrt{10} \leq 4x + 3y \leq \underline{10\sqrt{10}} \quad \times$$

ch04_式的運算

已知 $i = \sqrt{-1}$ 。若將 $(1+2i)(2-i)$ 化成 $a+bi$ 之形式，其中 $a、b$ 為實數，則 $a+b=?$

- (A) -2 (B) 0 (C) 4 (D) 7

【114C01】

Ans : (D)

$$\begin{aligned}(1+2i)(2-i) &= 2 - i + 4i + 2 \\ &= 4 + 3i\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \rightarrow a+b=7$$

已知 k 為實數，且一元二次方程式 $x^2 + kx = k - 3$ 有兩個共軛虛根。若 k 之解的範圍為區間 (a, b) ，則 $b - a = ?$

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

【114C09】

Ans : (C)

$\therefore x^2 + kx - (k - 3) = 0$ 有兩共軛虛根

$$\therefore k^2 - 4 \times 1 \times [-(k - 3)] < 0$$

$$k^2 + 4k - 12 < 0$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} -2 \\ +6 \end{array}$$

$$(k - 2)(k + 6) < 0$$

$$-6 < k < 2$$

$$\begin{cases} a = -6 \\ b = 2 \end{cases} \rightarrow b - a = 2 - (-6) = 2 + 6 = 8$$

若 $\frac{5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$ ，其中 A 、 B 為實數，則 $3A+2B = ?$

(A) -7 (B) -6 (C) -5 (D) -4

【113C01】

Ans : (D)

$$\begin{aligned} 5 &= A(x-2) + B(2x+1) \\ &= (A+2B)x + (-2A+B) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ -2A+B=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\text{故 } 3A+2B = (-6)+2 = -4 \quad \times$$

亦可由

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow 5 = A \times \left(-\frac{5}{2}\right) \rightarrow A = -2$$

$$x = 2 \rightarrow 5 = B \times 5 \rightarrow B = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}-1\right)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+1\right]=?$$

- (A) $6+5\sqrt{2}$ (B) $8-5\sqrt{2}$ (C) $6-5\sqrt{2}$ (D) $-8+5\sqrt{2}$

【113C12】

Ans : (D)

$$\text{設 } x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

$$\text{則原式} = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$= x^3 - 1$$

$$= (\sqrt{2}-1)^3 - 1$$

$$= (\sqrt{2})^3 - 3 \times (\sqrt{2})^2 \times 1 + 3 \times \sqrt{2} \times 1^2 - 1^3 - 1$$

$$= 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 - 1$$

$$= -8 + 5\sqrt{2} \quad \times$$

已知方程式 $4x^2 - 2x - 5 = 0$ 的兩根為 α 、 β ，則 $\alpha\beta = ?$

- (A) $\frac{-5}{4}$ (B) $\frac{-1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{4}$

【112C01】

Ans : (A)

$$\alpha\beta = \frac{-5}{4}$$

下列何者正確？

(A) 對任意實數 x ， $\sqrt[3]{x^3} = x$ (B) 對任意實數 x ， $\sqrt{4+x^2} = 2+x$

(C) 對任意實數 x ， $\sqrt{x^2} = x$ (D) 對任意實數 x ， $\sqrt[3]{8-x^3} = 2-x$

【112C02】

Ans : (A)

(A) $x \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt[3]{x^3} = x$

(B) 例如 $x=1$ 時 $\sqrt{4+1^2} \neq 2+1$

(C) $x \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt{x^2} = |x|$

(D) 例如 $x=1$ 時 $\sqrt[3]{8-1^3} \neq 2-1$

已知 $i = \sqrt{-1}$ 且 a, b 為實數。若 $a, b+2i$ 為 $-1+ai$ 為實係數三次方程式 $f(x)=0$ 之三根，

則下列多項式何者可能為 $f(x)$ ？

- (A) $x^3 - x + 10$ (B) $x^3 + x + 10$ (C) $x^3 - 4x^2 + 9x - 10$ (D) $x^3 + 4x^2 + 9x + 10$ 【112C12】

Ans : (D)

∵ $b+2i$ 和 $-1+ai$ 為共軛複數

$$\therefore b = -1, a = -2$$

$f(x)=0$ 之三根為 $-2, -1+2i, -1-2i$

$$\text{令 } \begin{cases} \alpha = -1+2i \\ \beta = -1-2i \end{cases}, \text{ 則 } \begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha\beta = (-1)^2 + 2^2 = 5 \end{cases}$$

得二次式 $x^2 + 2x + 5$

∵ α, β 為兩根
之方程式為
 $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

故 $f(x)$ 可能為 $(x+2)(x^2 + 2x + 5)$

展開得 $x^3 + 4x^2 + 9x + 10$ *

若 $\frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$ ，則 $A+B+C=?$

(A) 1 (B) 5 (C) 10 (D) 15

【111C05】

Ans : (A)

$$x^2+2x+7 = A(x+2)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x+2)$$

$$x=2 \rightarrow 4+4+7 = A \times 4 \times 5 \rightarrow A = \frac{3}{4}$$

$$x=-2 \rightarrow 4-4+7 = B \times (-4) \times 1 \rightarrow B = -\frac{7}{4}$$

$$x=-3 \rightarrow 9-6+7 = C \times (-5) \times (-1) \rightarrow C = 2$$

$$\text{故 } A+B+C = \frac{3}{4} + \left(-\frac{7}{4}\right) + 2 = 1 \quad \times$$

若四次多項式 $ax^4 + bx^3 + 6x^2 + 5x + 2$ 除以 $(x+1)^2$ 所得的餘式為 $3x+4$ ，則 $a+b = ?$

(A) -12 (B) -6 (C) -4 (D) -2

【111C10】

Ans : (B)

$$ax^4 + bx^3 + 6x^2 + 5x + 2 = (x+1)^2 \cdot Q(x) + 3x + 4$$

$$ax^4 + bx^3 + 6x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 \cdot Q(x)$$

$$x = -1 \rightarrow a - b + 6 - 2 - 2 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{b = a + 2}$$

$$ax^4 + (a+2)x^3 + 6x^2 + 2x - 2 = (x^2 + 2x + 1) \cdot Q(x)$$

$$\begin{array}{r} a + (2-a) - 2 \\ 1+2+1 \overline{) a + (a+2) + 6 + 2 - 2} \\ \underline{a + 2a + a} \\ (2-a) + (6-a) + 2 \\ \underline{(2-a) + (4-2a) + (2-a)} \\ (a+2) + a - 2 \\ \underline{-2 - 4 - 2} \\ (a+4) + (a+4) + 0 \end{array}$$

$$\therefore a+4=0 \rightarrow a=-4 \rightarrow b=-4+2=-2$$

$$\text{故 } a+b = (-4) + (-2) = -6 \quad \times$$

若 $\frac{3x-1}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$ ，其中 A 、 B 為實數，則下列何者正確？

- (A) $A = 2$ (B) $B = 1$ (C) $A = -2$ (D) $B = -1$

【110C01】

Ans : (D)

$$3x-1 = A(x-1) + B(x-3)$$

$$x=3 \rightarrow 9-1 = A \times 2 \rightarrow A=4$$

$$x=1 \rightarrow 3-1 = B \times (-2) \rightarrow B=-1$$

已知三次多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 滿足 $f(1) = f(2) = f(-2) = 2$ 且 $f(-1) = 8$ ，則下列何者正確？

- (A) $a = -1$ (B) $b = 1$ (C) $c = -4$ (D) $d = 4$

【110C15】

Ans : (C)

$$\text{設 } f(x) = a(x-1)(x-2)(x+2) + 2$$

$$\text{則 } f(-1) = 8 \rightarrow a(-2)(-3)(1) + 2 = -8$$

$$\rightarrow 6a + 2 = -8$$

$$\rightarrow a = -2$$

$$\text{故 } f(x) = (x-1)\underline{(x-2)(x+2)} - 2$$

$$= (x-1)(x^2 - 4) - 2$$

$$= x^3 - x^2 - 4x + 2$$

$$a = 1, b = -1, c = -4, d = 2$$

已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得之餘式為 $3x^2+5x-2$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 所得之餘式為何？

(A) -4 (B) $2x-5$ (C) 6 (D) $8x-5$

【109C03】

Ans : (B)

$$f(x) = (x-1)(x^2+x+1) \cdot Q(x) + \underline{3x^2+5x-2}$$

∴ 要提出 x^2+x+1 當新的除式 

$$\therefore \underline{3x^2+5x-2 = 3(x^2+x+1) + 2x-5}$$

$$\text{故 } f(x) = (x^2+x+1) \left[(x-1) \cdot Q(x) + 3 \right] + \underline{2x-5} \quad \text{※}$$

設 α 、 β 為方程式 $x^2+5x+k=0$ 之二根，已知多項式 $f(x)=2x^2+7x+5$ 除以 $x-\alpha$ 、 $x-\beta$ 所得的餘式分別為 -1 、 2 ，則 $k=?$

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

【109C17】

Ans : (C)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -5 \\ \alpha\beta = k \end{cases} \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 2k$$

$$\begin{cases} f(\alpha) = -1 \\ f(\beta) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 + 7\alpha + 5 = -1 & \text{--- ①} \\ 2\beta^2 + 7\beta + 5 = 2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得}$$

$$2(\alpha^2 + \beta^2) + 7(\alpha + \beta) + 10 = 1$$

$$2(25 - 2k) + 7 \times (-5) + 10 = 1$$

$$50 - 4k - 35 + 10 = 1$$

$$4k = 50 - 35 + 10 - 1 = 24$$

$$k = 6$$

已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為多項式，若以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 所得餘式為 $3x-4$ ，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式為 5 ，則以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 所得餘式為何？

- (A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4

【108C07】

Ans : (D)

$$f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot Q_1(x) + 3x - 4$$

$$f(1) = 3 \times 1 - 4 = -1$$

$$g(1) = 5$$

$x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 之餘式為

$$f(1)+g(1) = (-1)+5 = 4 \quad \#$$

已知 $\frac{x^2+5x+6}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ ，其中 A 、 B 與 C 為實數，則 $A+2B+3C=?$

(A) -5 (B) 0 (C) 8 (D) 10

【108C08】

Ans : (A)

$$x^2+5x+6 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2)$$

$$x=2 \rightarrow 4+10+6 = A \times 5 \rightarrow A=4$$

$$x^2+5x+6 = 4x^2+4 + (Bx+C)(x-2)$$

$$(Bx+C)(x-2) = -3x^2+5x+2$$
$$= (-3x-1)(x-2)$$

$$B=-3, C=-1$$

$$\text{故 } A+2B+3C = 4 + (-6) + (-3)$$
$$= -5$$

若 $f(x) = x^4 - x^3 + kx^2 - 2$ 為整係數多項式，其中 $k > 0$ 且 $f(x)$ 有整係數一次因式 $x - h$ ，則

$k + h = ?$

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

【107C09】

Ans : (A)

$$f(x) = x^4 - x^3 + kx^2 - 2$$

$\uparrow$ $\uparrow$
1 $\pm 1, \pm 2$

可能的一次因式有 $x+1, x-1, x+2, x-2$

① 一次因式若為 $x+1$ ，則 $f(-1) = 0$

此時 $1 + 1 + k - 2 = 0 \rightarrow k = 0$ (不合)

② 同理， $f(1) = 0 \rightarrow 1 - 1 + k - 2 = 0$

$\rightarrow k = 2$ (合)

故 $h + k = 1 + 2 = 3$

③ $f(-2) = 0 \rightarrow 16 + 8 + 4k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{-11}{2}$ (不合)

④ $f(2) = 0 \rightarrow 16 - 8 + 4k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{3}{2}$ (不合)

若一元二次方程式 $x^2 + (a-5)x + a+3 = 0$ 有兩正根，滿足 a 的實數解為 $m < a \leq n$ ，則 $m+n = ?$

(A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) 1

【107C20】

Ans : (C)

$$\text{有兩正根} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta > 0 \\ \alpha\beta > 0 \\ \text{判別式 } D \geq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -(a-5) > 0 \rightarrow a-5 < 0 \rightarrow \boxed{a < 5} \\ a+3 > 0 \rightarrow \boxed{a > -3} \\ (a-5)^2 - 4(a+3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$
$$a^2 - 14a + 13 \geq 0$$
$$1 \quad \times \quad -13$$

$$\downarrow$$
$$(a-1)(a-13) \geq 0$$

$$\downarrow$$
$$\boxed{a \leq 1 \text{ 或 } a \geq 13}$$

故得知 $-3 < a \leq 1$

$$m = -3, n = 1 \rightarrow m+n = (-3)+1 = -2$$

求方程式 $\frac{-x^2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2}$ 所有解的和為何？

(A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 0

【106C07】

Ans : (C)

$$-x^2 = x - 2 + 2(x + 2)$$

$$-x^2 = 3x + 2$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 1 & +1 \\ 1 & +2 \end{array}$$

$$(x+1)(x+2) = 0$$

$$x = -1 \text{ 或 } x = -2$$

(不合, 會使分母為0)

$$\text{故 } x = -1$$

已知 a 、 b 為實數，若 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ ， $g(x) = x^2 - 7x + 6$ ，且 $f(x)$ 可被 $g(x)$ 整除，求 $2a + 3b$ 之值。

$$1 \times -6$$

(A) 23 (B) 36 (C) 39 (D) 45

【105C07】

Ans : (A)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6 = (x-1)(x-6) \cdot Q(x)$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(6) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + a + b - 6 = 0 \\ 216 + 36a + 6b - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 6a + b = -35 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 13 \end{cases}$$

$$\text{故 } 2a + 3b = -16 + 39 = 23 \quad *$$

已知 A 、 B 、 C 為常數，且對任意 x 均滿足 $\frac{3x^2+9x-3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$ ，求 B 之值。

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

【105C08】

Ans : (D)

$$3x^2+9x-3 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)$$

$$x=1 \rightarrow 3+9-3 = A \times 9 \rightarrow A=1$$

$$x=-2 \rightarrow 12-18-3 = C \times (-3) \rightarrow C=3$$

$$3x^2+9x-3 = x^2+4x+4 + B(x-1)(x+2) + 3x-3$$

$$\begin{aligned} B(x-1)(x+2) &= 2x^2+2x-4 \\ &= 2\left(x^2+x-\frac{2}{1}\right) \\ &= 2\left(x^2+x-\frac{1}{1} \times \frac{2}{1}\right) \\ &= 2(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

$$\therefore B=2 \quad \#$$

將 $(x^4 - 3x^3 + 2x - 5)(x^3 - 2)(x + 3)$ 乘開化簡後， x^3 項的係數為何？

- (A) -5 (B) -3 (C) 3 (D) 5

【104C05】

Ans : (C)

$$(x^4 - 3x^3 + 2x - 5)(x^4 + 3x^3 - 2x - 6)$$

$$x^3 \text{ 項係數} = 18 - 15 = 3 \quad \#$$

已知 $i = \sqrt{-1}$ 且 a, b 為實數，若 $(2+i)(a+bi) = 15+5i$ ，則 $a+b = ?$

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

【104C09】

Ans : (B)

$$a+bi = \frac{15+5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$$

$$= \frac{30 - 15i + 10i - 5i^2}{2^2 + 1^2}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$= \frac{30 - 15i + 10i + 5}{5}$$

$$= \frac{35 - 5i}{5}$$

$$= 7 - i$$

$$\therefore a = 7, b = -1$$

$$\text{故 } a+b = 7+(-1) = 6$$

已知 a 、 b 、 c 、 d 為實數，若 $2x^3 + x^2 - 5x - 3 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ ，則 $abcd = ?$

(A) -20 (B) -10 (C) 10 (D) 20

【104C17】

Ans : (C)

$$\begin{array}{r|l} 2 & +1-5-3 \\ -2 & +1+4 \\ \hline 2 & -1-4 \\ -2 & +3 \\ \hline 2 & -3 \\ -2 & \\ \hline 2 & \\ \hline 2 & -5 \end{array}$$

$$a=2, b=-5, c=-1, d=1$$

$$abcd = 2 \times (-5) \times (-1) \times 1 = 10$$

求 $(\sqrt[3]{3}-2)(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4)$ 之值為何？

(A) -5 (B) -3 (C) 8 (D) 11

【103C05】

Ans : (A)

取 $a = \sqrt[3]{3}$, $b = 2$

利用 $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ 得

$$\text{原式} = (\sqrt[3]{3})^3 - 2^3 = 3 - 8 = -5 \quad *$$

設 α 、 β 為方程式 $x^2 - 5x + 3 = 0$ 的兩根，則 $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 之值為何？

- (A) $-\frac{7}{3}$ (B) $\frac{17}{3}$ (C) $\frac{19}{3}$ (D) $\frac{20}{3}$

【103C14】

Ans : (C)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = 3 \end{cases} \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 6 = 19$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{19}{3} \quad \times$$

已知 m 、 n 為實數， $Q(x)$ 為二次多項式。若 $x^4 - mx^3 - x^2 - 5x + n = (x^2 - 3x + 2)Q(x)$ ，則

$$2m + n = ?$$

$$x = \frac{1}{2}$$

- (A) -6 (B) -2 (C) 4 (D) 8

【102C02】

Ans : (D)

$$x^4 - mx^3 - x^2 - 5x + n = (x-1)(x-2) \cdot Q(x)$$

$$x=1 \rightarrow 1 - m - 1 - 5 + n = 0$$

$$\rightarrow m - n = -5 \quad \text{--- ①}$$

$$x=2 \rightarrow 16 - 8m - 4 - 10 + n = 0$$

$$\rightarrow 8m - n = 2 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得 } 7m = 7 \rightarrow m = 1$$

$$\rightarrow n = 6$$

$$\text{故 } 2m + n = 2 + 6 = 8 \quad \times$$

已知 a 、 b 、 c 為實數。若 $x \neq \frac{3}{2}$ 時，等式 $\frac{4x^2-6x-3}{(2x-3)^2} = a + \frac{b}{2x-3} + \frac{c}{(2x-3)^2}$ 恆成立，則

$$a+b+2c = ?$$

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4

【102C19】

Ans : (B)

$$4x^2 - 6x - 3 = a(2x-3)^2 + b(2x-3) + c$$
$$\boxed{\text{比較係數}} = a(4x^2 - 12x + 9) + b(2x-3) + c$$

$$x^2 \text{ 項} : 4a = 4 \rightarrow a = 1$$

$$x \text{ 項} : -6 = -12 + 2b \rightarrow b = 3$$

$$\text{常數項} : -3 = 9 - 9 + c \rightarrow c = -3$$

$$\text{故 } a+b+2c = 1+3+(-6) = -2 \quad *$$

已知 k 為實數，且二次方程式 $9x^2 + (12k+18)x + (4k^2 + 12k + 5) = 0$ 有二實根。若其中一個根大於 1，另一根小於 0，則 k 之範圍為何？

- (A) $-\frac{5}{2} < k < -2$ (B) $-2 < k < -\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{3}{2} < k < -1$ (D) $-1 < k < -\frac{1}{2}$ 【102C25】

Ans : (A)

$$\begin{array}{r} 9x^2 + (12k+18)x + (2k+1)(2k+5) = 0 \\ \begin{array}{r} 3 \quad \quad \quad (2k+1) \\ 3 \quad \quad \quad (2k+5) \end{array} \\ \hline 6k+15+6k+3 = 12k+18 \end{array}$$

$$[3x + (2k+1)][3x + (2k+5)] = 0$$
$$x = -\frac{2k+1}{3} \quad \text{或} \quad x = -\frac{2k+5}{3}$$

較大的根 較小的根

$$\therefore \begin{cases} -\frac{2k+1}{3} > 1 \\ -\frac{2k+5}{3} < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2k+1 < -3 \\ 2k+5 > 0 \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} k < -2 \\ k > -\frac{5}{2} \end{cases}$$

故得 $-\frac{5}{2} < k < -2$ #

已知 a 和 c 為實數，若複數 $a+2i$ 為一元二次方程式 $x^2+2x+c=0$ 的一根，則 c 之值為何？

- (A) -4 (B) -2 (C) 3 (D) 5

Ans : (D)

實係數方程式

【101C10】

虛根成雙

$$\begin{cases} \alpha = a+2i \\ \beta = a-2i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2a \\ \alpha\beta = a^2 + 2^2 = a^2 + 4 \end{cases}$$

方程式為 $x^2 - 2ax + (a^2 + 4) = 0$

比較係數得 $2 = -2a$ 且 $c = a^2 + 4$

故 $a = -1 \rightarrow c = (-1)^2 + 4 = 5$ *

* 以 α, β 為兩根的方程式為

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

若 $x^2 + x + 1$ 為 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 的因式，則下列何者正確？

- (A) $a > b$ (B) $a^2 + b^2 = 10$ (C) $a - b = -2$ (D) $a + b = 6$

【101C12】

Ans : (D)

$$\begin{array}{r} 1+2 \\ \hline 1+1+1 \overline{) 1+a+b+2} \\ \underline{1+1+1} \\ (a-1)+(b-1)+2 \\ 2+2+2 \\ \hline (a-3)+(b-3)+0 \end{array}$$

$$\begin{cases} a-3=0 \\ b-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \rightarrow a+b=6 \quad \#$$

設 $x-1$ 和 $x+1$ 為多項式 $x^5 + ax^4 + bx^3 + 5x^2 + 2x - 5$ 的因式，則 $3a+b$ 之值為何？

(A) -3 (B) 1 (C) 3 (D) 6

【101C13】

Ans : (A)

$$x=1 \rightarrow 1+a+b+5+2-5=0$$

$$\rightarrow a+b=-3 \text{ --- ①}$$

$$x=-1 \rightarrow -1+a-b+5-2-5=0$$

$$\rightarrow a-b=3 \text{ --- ②}$$

$$\frac{\text{①}+\text{②}}{2} \text{ 得 } a=0 \rightarrow b=-3$$

$$\text{故 } 3a+b = 0 + (-3) = -3$$

已知 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f(\frac{3}{2})=27$ ， $f(-\frac{5}{3})=8$ 。若 $f(x)$ 除以 $6x^2+x-15$ 的餘式為 $ax+b$ ，則 $a+b=?$

- (A) 4 (B) 6 (C) 18 (D) 24

$$\begin{array}{c} 2x-3 \\ 3x+5 \\ \hline (2x-3)(3x+5) \end{array} \text{【100C11】}$$

Ans : (D)

$$f(x) = (2x-3)(3x+5) \cdot Q(x) + ax+b$$

$$\begin{cases} f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}a+b=27 & \text{--- ①} \\ f(-\frac{5}{3}) = -\frac{5}{3}a+b=8 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{①} - \text{②} & \neq \frac{0}{0} \quad (\frac{3}{2} + \frac{5}{3})a = 19 \rightarrow \frac{19}{6}a = 19 \\ & \rightarrow a = 6 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2} \times 6 + b = 27 \rightarrow 9 + b = 27 \rightarrow b = 18$$

$$\text{故 } a+b = 6+18 = 24 \quad \times$$

若 α 、 β 為方程式 $x - \frac{3}{x} = -1$ 的兩相異實根，則 $(\frac{2}{\alpha} + 1)(\frac{2}{\beta} + 1) = ?$

- (A) -1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{5}{3}$

【100C17】

Ans : (B)

$$\begin{aligned}x - \frac{3}{x} &= -1 \rightarrow x^2 - 3 = -x \\&\rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \\&\rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -3 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) &= \frac{4}{\alpha\beta} + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + 1 \\&= \frac{4}{\alpha\beta} + \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 1 \\&= \frac{4}{-3} + \frac{-2}{-3} + 1 \\&= \frac{2}{-3} + 1 \\&= \frac{1}{3} \quad \text{※}\end{aligned}$$

設 a 、 b 、 c 、 d 為實數，若 $x^2 - 1$ 為 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 之因式，且 $f(x)$ 除以 $x - 2$ 餘 6，
則 $2a + b = ?$

$$(x+1)(x-1)$$

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4

【99C17】

Ans : (C)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = (x+1)(x-1) \cdot Q(x)$$

$$x = -1 \rightarrow -a + b - c + d = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$x = 1 \rightarrow a + b + c + d = 0 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得 } 2b + 2d = 0 \rightarrow d = -b$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得 } 2a + 2c = 0 \rightarrow c = -a$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - ax - b$$

$$f(2) = 6 \rightarrow 8a + 4b - 2a - b = 6$$

$$\rightarrow 6a + 3b = 6$$

$$\rightarrow 2a + b = 2 \quad \text{✱}$$

令 $i = \sqrt{-1}$ ，若 $1+i$ 為方程式 $2x^2 + kx + 6 + 2i = 0$ 之一根，則 $k = ?$

(A) -6 (B) -4 (C) $-5 + i$ (D) $-10 + 2i$

【99C18】

Ans : (A)

不是實係數方程式，不可用成雙定理！
但兩根和、兩根積仍可使用！

設 $\alpha = 1 + i$ ，另一根為 β

$$\text{則 } \alpha\beta = \frac{6+2i}{2} \rightarrow (1+i)\beta = 3+i \quad \boxed{\begin{matrix} i^2 = -1 \\ i = -1 \end{matrix}}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{3+i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i+i-i^2}{1^2+1^2} = \frac{3-3i+i+1}{2} \\ &= \frac{4-2i}{2} \\ &= 2-i \end{aligned}$$

$$\text{故 } \alpha + \beta = -\frac{k}{2} \rightarrow (1+i) + (2-i) = -\frac{k}{2}$$

$$\rightarrow 3 = -\frac{k}{2}$$

$$\rightarrow k = -6 \quad \times$$

$f(x)=0 \rightarrow$ 虛根成雙

設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，若 $f(1)=f(1+i)=0$ 且 $f(0)>0$ ，則下列何者正確？

- (A) $f(-2)<0$ (B) $f(2)>0$ (C) $f(4)<0$ (D) $f(6)=0$

【99C24】

Ans : (C)

$$\therefore f(1+i)=0$$

$$\therefore f(1-i)=0$$

即 $f(x)=0$ 之根為 $1, 1+i, 1-i$

$$\begin{cases} \alpha = 1+i \\ \beta = 1-i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = 1^2 + 1^2 = 2 \end{cases} \rightarrow \underline{x^2 - 2x + 2 = 0}$$

$$\text{設 } f(x) = \underline{a(x-1)(x^2-2x+2)}$$

$$\therefore f(0) = a \times (-1) \times 2 > 0$$

$$\therefore a < 0$$

$$(A) f(-2) = \overset{-}{a} \times \overset{-}{(-3)} \times \overset{+}{10} > 0$$

$$(B) f(2) = \overset{-}{a} \times \overset{+}{1} \times \overset{+}{2} < 0$$

$$(C) f(4) = \overset{-}{a} \times \overset{+}{3} \times \overset{+}{14} < 0 \quad \times$$

$$(D) f(6) = \overset{-}{a} \times \overset{+}{5} \times \overset{+}{26} < 0$$

若 α 、 β 均為實數，且 $\alpha^3 = 2 + \sqrt{5}$ ， $\beta^3 = 2 - \sqrt{5}$ ，則 $\alpha + \beta = ?$

(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 4

【98C05】

Ans : (B)

$$\begin{cases} \alpha^3 = 2 + \sqrt{5} \\ \beta^3 = 2 - \sqrt{5} \end{cases} \rightarrow \alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 4 - 5 = -1$$
$$\rightarrow \alpha\beta = -1$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$4 = (\alpha + \beta)^3 + 3(\alpha + \beta)$$

$$\text{得 } (\alpha + \beta)^3 + 3(\alpha + \beta) - 4 = 0$$

$$\text{設 } \alpha + \beta = x$$

$$\text{則 } x^3 + 3x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 4) = 0$$

$$\text{故 } x = 1, \text{ 即 } \alpha + \beta = 1$$

$x^2 + x + 4 = 0$
無實根
而 $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$
 $\alpha + \beta$ 為實數

設 $p(x)$ 為一元二次多項式。若 $p(1)=1$ ， $p(2)=\frac{1}{2}$ ， $p(3)=\frac{1}{3}$ ，則 $p(4)$ 之值為何？

- (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

【98C06】

Ans : (C)

由 $p(1)=1$ 可設 $p(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+1$

再由 $p(2)=\frac{1}{2}$ 得 $b+1=\frac{1}{2} \rightarrow b=-\frac{1}{2}$

此時 $p(x)=a(x-1)(x-2)-\frac{1}{2}(x-1)+1$

再由 $p(3)=\frac{1}{3}$ 得 $a \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 + 1 = \frac{1}{3}$
 $2a = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{1}{6}$

得 $p(x) = \frac{1}{6}(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}(x-1) + 1$

故 $p(4) = \frac{1}{6} \times 3 \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 + 1$
 $= 1 - \frac{3}{2} + 1$
 $= \frac{1}{2}$ *

設 $\frac{5x^2+2x-4}{(x-1)(x^2+x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x-1}$ ，則 $A+B+C = ?$

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

【98C07】

Ans : (D)

$$5x^2 + 2x - 4 = A(x^2 + x - 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

$$x=1 \rightarrow 5+2-4 = A \times 1 \rightarrow A=3$$

$$5x^2 + 2x - 4 = 3x^2 + 3x - 3 + (Bx + C)(x - 1)$$

$$(Bx + C)(x - 1) = 2x^2 - x - 1$$

$$= (2x + 1)(x - 1)$$

$$B=2, C=1$$

$$\text{故 } A+B+C = 3+2+1 = 6$$

已知 $i = \sqrt{-1}$ ，且 a, b 均為實數。若 $1 - \sqrt{3}i$ 為方程式 $x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$ 的一根，則 $a + b = ?$

- (A) -4 (B) -2 (C) 8 (D) 14

虛根成雙

【98C08】

Ans : (D)

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \sqrt{3}i \\ \beta = 1 + \sqrt{3}i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \end{cases}$$

得 $x^2 - 2x + 4$ 為 $x^3 + 3x^2 + ax + b$ 之因式

$$\begin{array}{r} 1+5 \\ 1-2+4 \overline{) 1+3+a+b} \\ \underline{1-2+4} \\ 5+(a-4)+b \\ \underline{5-10+20} \\ (a+6)+(b-20) \end{array}$$

$$\begin{cases} a+6=0 \\ b-20=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=20 \end{cases}$$

$$\text{故 } a+b = -6+20 = 14 \quad \times$$

ch05_直線與圓

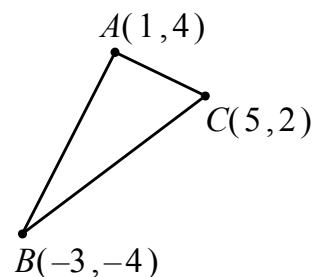
已知坐標平面上三點 $A(1, 4)$ 、 $B(-3, -4)$ 、 $C(5, 2)$ 形成一個直角三角形，如圖所示，試問下列何者為 $\triangle ABC$ 的外接圓方程式？

(A) $(x+1)^2 + y^2 = 20$

(B) $(x+1)^2 + y^2 = 25$

(C) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$

(D) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$



【114CI7】

Ans : (D)

$\therefore \angle A = 90^\circ$ (可由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ 得知)

$\therefore \overline{BC}$ 為直徑 (由半圓的圓周角是直角得知)

故 $\overline{BC}$ 中點 $O(\frac{-3+5}{2}, \frac{-4+2}{2}) = O(1, -1)$ 為圓心

$$\frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(5+3)^2 + (2+4)^2} = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ 為半徑}$$

得圓方程式為 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$

已知 L 試坐標平面上通過點 $(1, -1)$ 的直線，且其 x 截距為 a ，試問下列敘述何者正確？

(A) 若 L 的 y 截距為正，則 $0 < a < 1$

(B) 若 L 的 y 截距為負，則 $a < -1$

(C) 若 L 的斜率為正，則 $a > 2$

(D) 若 L 的斜率為負，則 $a < 0$

【114C21】

Ans : (A)

$$L: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\text{以 } (1, -1) \text{ 代入得 } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1$$

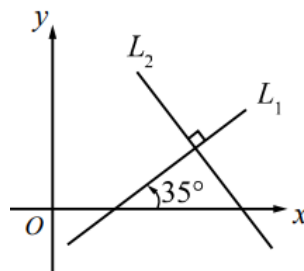
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \rightarrow b = \frac{a}{1-a}$$

$$(A) \quad b > 0 \rightarrow \frac{a}{1-a} > 0 \rightarrow a(1-a) > 0$$
$$\rightarrow a(a-1) < 0$$

$$\rightarrow 0 < a < 1$$

設直線 L_1 的斜角為 35° ，已知直線 L_2 與 L_1 相互垂直，如圖所示，則 L_2 的斜角為何？

- (A) 35°
- (B) 55°
- (C) 125°
- (D) 155°



【113C02】

Ans : (C)

$$\alpha = 35^\circ + 90^\circ = 125^\circ$$

已知一直線 $L: y = x - 5$ 與圓 C 相切，且圓 C 的圓心為 $(3, -4)$ ，則圓 C 的半徑為何？

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$

【113C04】

Ans : (A)

$$L: x - y - 5 = 0$$

$$O(3, -4)$$

$$r = \frac{|3 + 4 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \times$$

若坐標平面上四點 $A(1, 2)$ 、 $B(2, -3)$ 、 $C(2, 7)$ 、 $D(a, -10)$ 在同一圓上，則 $a = ?$

(A) 19 或 9 (B) 20 或 8 (C) 24 或 6 (D) 27 或 3

【112C16】

Ans : (A)

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

$$(1, 2) \rightarrow 1 + 4 + d + 2e + f = 0$$

$$\rightarrow d + 2e + f = -5 \text{ --- ①}$$

$$(2, -3) \rightarrow 4 + 9 + 2d - 3e + f = 0$$

$$\rightarrow 2d - 3e + f = -13 \text{ --- ②}$$

$$(2, 7) \rightarrow 4 + 49 + 2d + 7e + f = 0$$

$$\rightarrow 2d + 7e + f = -53 \text{ --- ③}$$

$$d - 5e = -8$$

$$d = -28$$

$$10e = -40$$

$$e = -4$$

$$\text{由 ① 得 } -28 - 8 + f = -5 \rightarrow f = 31$$

$$\text{圓 : } x^2 + y^2 - 28x - 4y + 31 = 0$$

$$(a, -10) \rightarrow a^2 + 100 - 28a + 40 + 31 = 0$$

$$\rightarrow a^2 - 28a + 171 = 0$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \times \\ 19 \end{array} = \frac{19}{9}$$

$$\rightarrow (a - 19)(a - 9) = 0 \rightarrow a = 19 \text{ 或 } 9$$

若 $A(1, 4)$ 、 $B(6, 2)$ 所連接的線段 $\overline{AB}$ 與直線 $L: x - y + 1 = 0$ 相交於 P 點，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = ?$

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$

【111C07】

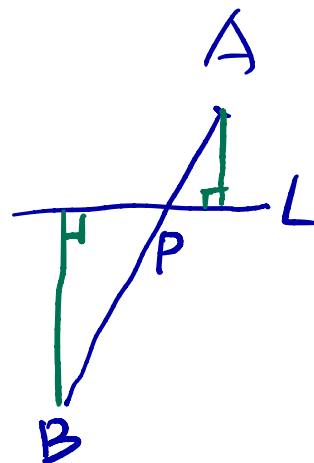
Ans : (A)

$$\overline{AP} : \overline{BP} = d(A, L) : d(B, L)$$

$$= \frac{|1 - 4 + 1|}{\cancel{\sqrt{2}}} : \frac{|6 - 2 + 1|}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$= 2 : 5$$

$$\text{故 } \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{2}{5} \quad \#$$



已知圓 $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ 與相異兩直線 $L_1: x + y + 1 = 0$ 及 $L_2: ax + by + 10 = 0$ 分別交於兩點，且 $L_1 \parallel L_2$ ，如圖所示。若此圓圓心到兩直線 L_1 、 L_2 的距離相等，則 $a + b = ?$

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10

【111C07】

Ans : (B)

$$O\left(-\frac{2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = O(-1, -2)$$

如圖， $L \parallel L_1$ 且
 L 過 O 點，則
得 $L: x + y = -3$

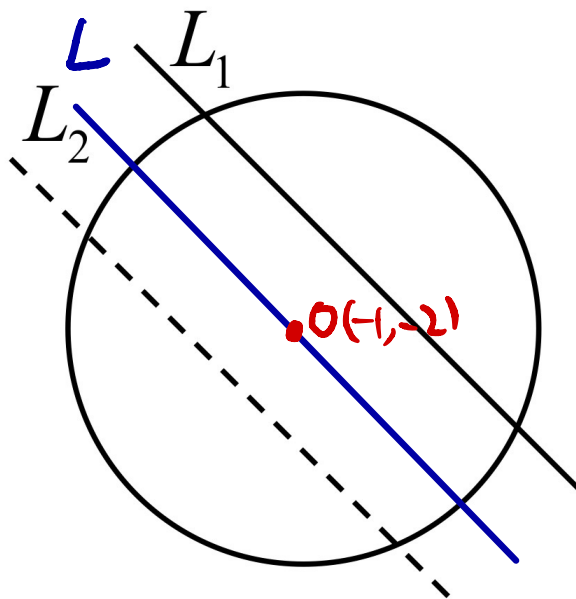
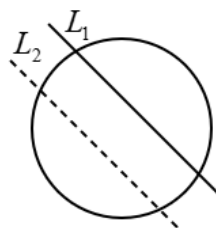
$$\text{而 } L_1: x + y = -1$$

且 L 和 L_1 、 L_2 等距

$$\text{故得知 } L_2 \text{ 為 } x + y = -5 \rightarrow 2x + 2y = -10$$

$$\text{而已知 } L_2 \text{ 為 } ax + by = -10$$

$$\therefore a = 2, b = 2 \rightarrow a + b = 4 *$$



若圓 C 與 y 軸相切，且圓心為拋物線 $y = x^2 + 4x + 5$ 之頂點，則下列何者為圓 C 的方程式？

(A) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ (C) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

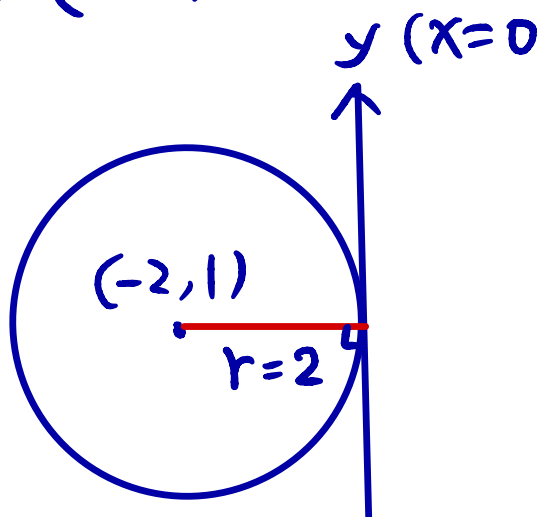
(D) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

【110C08】

Ans : (D)

$$\begin{aligned} y &= (x^2 + 4x + 4) + 1 \\ &= (x + 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

$O(-2, 1)$



$$C: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 4 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

已知 a 、 b 為實數。若直線 $L_1: y = ax + b$ 與 $L_2: y = bx + a$ 相互垂直，且 $a^2 + b^2 = 50$ ，則

L_1 與 L_2 的交點與原點的距離為多少？

- (A) $4\sqrt{3}$ (B) 7 (C) $5\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{13}$

【110C13】

Ans : (B)

$$\begin{cases} y = ax + b & \text{--- ①} \\ y = bx + a & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } 0 = (a-b)x + (b-a) \rightarrow x = 1$$
$$\rightarrow y = a+b$$

交點 $(1, a+b)$

$$\text{又 } L_1 \perp L_2 \rightarrow ab = -1$$

兩直線互相垂直
斜率相乘等於 -1

$$\text{所求} = \sqrt{1^2 + (a+b)^2}$$

$$= \sqrt{1 + a^2 + 2ab + b^2}$$

$$= \sqrt{1 + 50 - 2}$$

$$= \sqrt{49}$$

$$= 7$$

若 k 為實數，且點 $P(1, k)$ 為曲線 $kx^2 + y^2 + 2x - 4y + k - 1 = 0$ 上之一點，求曲線之圖形為何？

(A) 圓 (B) 拋物線 (C) 橢圓 (D) 雙曲線

【109C15】

Ans : (A)

∵ $x=1, y=k$ 代入得

$$k + k^2 + 2 - 4k + k - 1 = 0$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k-1)^2 = 0$$

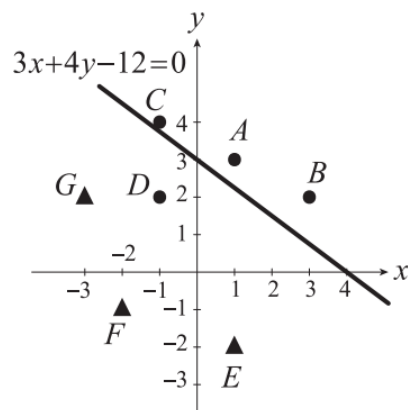
$$k = 1$$

∴ $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 圖形為一圓 *

在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點 $A(1, 3)$ 、 $B(3, 2)$ 、 $C(-1, 4)$ 、 $D(-1, 2)$ 、 $E(1, -2)$ 、 $F(-2, -1)$ 、 $G(-3, 2)$ 分屬 $\bullet$ 、 $\blacktriangle$ 二類，其中直線 $L: 3x+4y-12=0$ 未能將它們正確分類，如圖所標示。若將 L 平行移動至新的位置成為新直線 L_1 且能達到正確分類目的，則下列何者可為 L_1 的直線方程式？ 【109C24】

- (A) $3x+4y+2=0$
- (B) $3x+4y-6=0$
- (C) $6x+8y+3=0$
- (D) $6x+8y-3=0$

Ans : (D)



$$L_1 \text{ 過 } D(-1, 2) \rightarrow L_1: 3x+4y=5$$

$$L_2 \text{ 過 } G(-3, 2) \rightarrow L_2: 3x+4y=-1$$

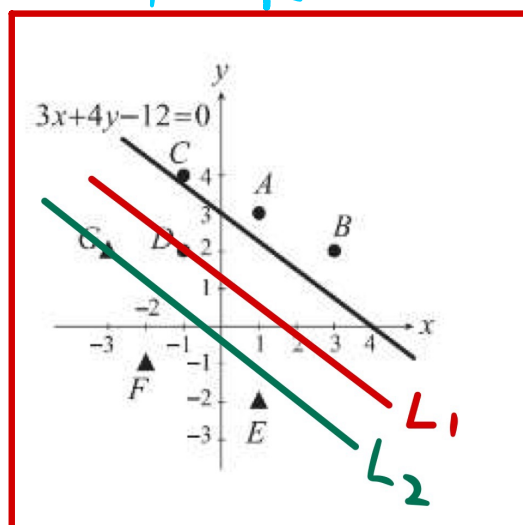
故 L 為 $3x+4y=k$ 且 L 介於 L_1, L_2 之間
 $-1 < k < 5$

$$(A) 3x+4y=-2$$

$$(B) 3x+4y=6$$

$$(C) 3x+4y=-\frac{3}{2}$$

$$(D) 3x+4y=\frac{3}{2} \text{ (合)}$$



已知坐標平面上三直線 $L_1: 3x+3y=2$ 、 $L_2: 2x-3y=3$ 、 $L_3: x-ay=-2$ ，且這三直線將平面

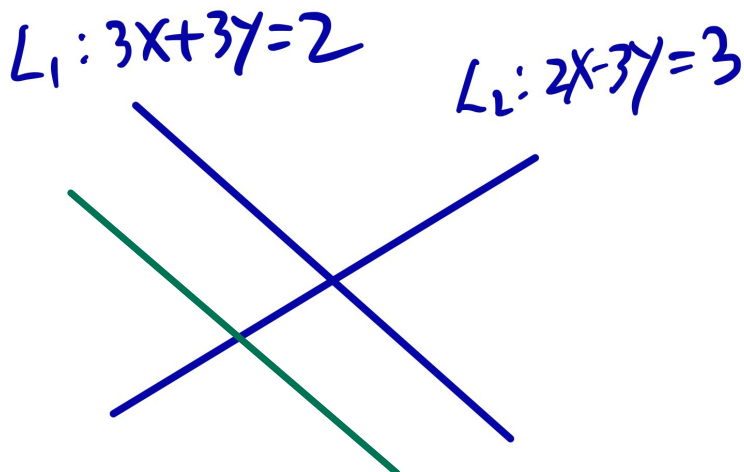
分成六個區域，則 a 不可以 是下列哪一個值？

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) -1 (D) -9

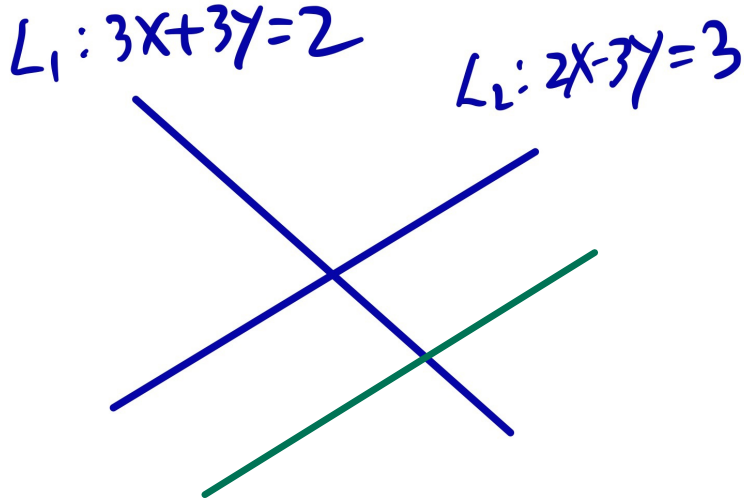
【108C09】

Ans : (B)

(A) $x - \frac{3}{2}y = -2$ ①
 $2x - 3y = -4$
 屬 ②

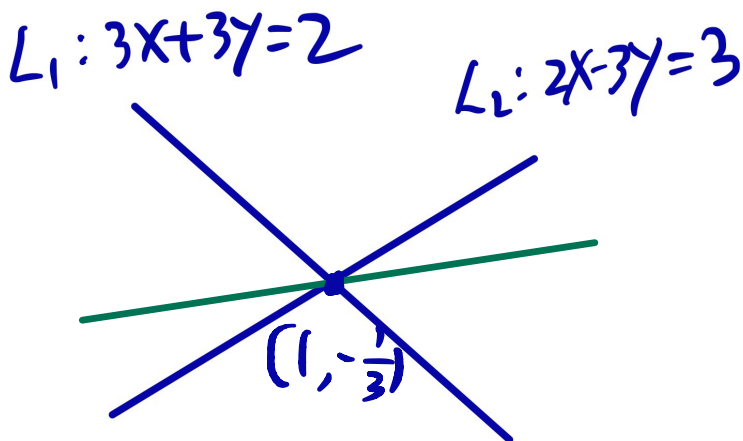


(B) $x - y = -2$
 不屬 ①、②、③ ②



(C) $x + y = -2$
 屬 ①

(D) $x + \frac{1}{3}y = -2$ ③
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $1 \quad -\frac{1}{3}$
 (合)
 屬 ③



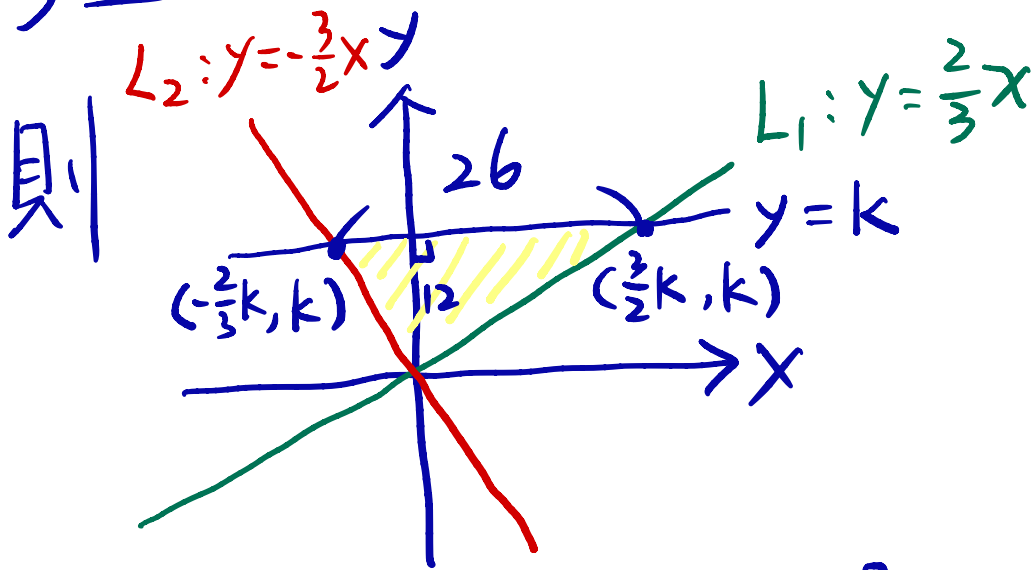
已知坐標平面上三直線 L 、 L_1 與 L_2 ，若直線 L 為水平線， L_1 與 L_2 的斜率分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{3}{2}$ ，且直線 L 被 L_1 與 L_2 所截出的線段長為 26，則此三角形所圍成的三角形面積為多少平方單位？

(A) 39 (B) 52 (C) 78 (D) 156

【108C19】

Ans : (D)

可直接設 $L_1: y = \frac{2}{3}x$ ， $L_2: y = -\frac{3}{2}x$



$$\frac{3}{2}k - (-\frac{2}{3}k) = 26 \rightarrow \frac{13}{6}k = 26 \rightarrow k = 12$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \times 26 \times 12 = 156$$

已知直線 L_1 通過 $(2, 3)$ 、 $(1, 5)$ 兩點，且直線 L_2 的 x 截距是 1、 y 截距是 4。若 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1 與 m_2 ，則下何者正確？

- (A) $0 < m_1 < m_2$ (B) $m_1 < 0 < m_2$ (C) $m_2 < 0 < m_1$ (D) $m_2 < m_1 < 0$ 【107C01】

Ans : (D)

$$m_1 = \frac{3-5}{2-1} = -2$$

$$m_2 = \frac{0-4}{1-0} = -4$$

$$\therefore -4 < -2 < 0 \rightarrow m_2 < m_1 < 0 \quad \#$$

若兩直線 $3x+4y=6$ 與 $9x+12y=k$ 的距離為 2，則 k 的值可能為下列何者？

- (A) -48 (B) -12 (C) 10 (D) 24

【107C02】

Ans : (B)

$$3x+4y=6 \rightarrow 9x+12y=18$$

$$\frac{|k-18|}{\sqrt{9^2+12^2}}=2 \rightarrow |k-18|=2 \times 15=30$$

$$\textcircled{1} k-18=30 \rightarrow k=48$$

$$\textcircled{2} k-18=-30 \rightarrow k=-12$$

設 $P(x, y)$ 為圓 $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ 上的動點，若 $4x + 3y + 5$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則

$$M + m = ?$$

(A) -5 (B) 0 (C) 5 (D) 10

【107C25】

Ans : (D)

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 9 + 16$$

$$\rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

$$\begin{cases} x = 3 + 5\cos\theta \\ y = -4 + 5\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 5 &= \cancel{12} + 20\cos\theta - \cancel{12} + 15\sin\theta + 5 \\ &= 15\sin\theta + 20\cos\theta + 5 \end{aligned}$$

$$\text{而 } -\sqrt{15^2 + 20^2} \leq 15\sin\theta + 20\cos\theta \leq \sqrt{15^2 + 20^2}$$

$$\text{即 } -25 \leq 15\sin\theta + 20\cos\theta \leq 25$$

$$\text{故 } -20 \leq 15\sin\theta + 20\cos\theta + 5 \leq 30$$

$$M = 30, m = -20 \rightarrow M + m = 10 \quad \times$$

設直線 $2x+y=11$ 與拋物線 $y=x^2-4$ 在第二象限的交點為 A ，在第一象限的交點為 B ，若線段 $\overline{AB}$ 上一點 P 滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$ ，則 P 點坐標為何？

- (A) $(\frac{1}{3}, \frac{31}{3})$ (B) $(-2, 26)$ (C) $(-1, 13)$ (D) $(\frac{-7}{3}, \frac{47}{3})$

【106C01】

Ans : (A)

$$\text{解} \begin{cases} y = -2x + 11 \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \rightarrow x^2 - 4 = -2x + 11$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-3)(x+5) = 0$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \times \begin{array}{c} -3 \\ +5 \end{array}$$

$$\rightarrow x = 3 \text{ 或 } x = -5$$

可得 $B(3, 5)$ $A(-5, 21)$

$$\begin{array}{c} 2 \quad : \quad 1 \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ A(-5, 21) \quad P(x, y) \quad B(3, 5) \end{array}$$

$$x = \frac{-5 + 6}{3} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad P(\frac{1}{3}, \frac{31}{3})$$

$$y = \frac{21 + 10}{3} = \frac{31}{3}$$

設打水漂遊戲中石頭落入水中的漣漪是以圓的形式展現。若某人向河面擲出石頭的方向是沿著直線 $y=x-1$ 行進，下列哪一個圓方程式可為此漣漪的形式？

(A) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$ (B) $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$

(C) $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$ (D) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$

【106C20】

Ans : (B)

(A) 圓心 $(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}) = (1, -2)$

(B) // $(-\frac{-4}{2}, -\frac{-2}{2}) = (2, 1)$

(C) // $(-\frac{-2}{2}, -\frac{-4}{2}) = (1, 2)$

(D) // $(-\frac{-4}{2}, -\frac{-6}{2}) = (2, 3)$

(B) 之圓心 $(2, 1)$ 在 $y=x-1$ 上 *

若直線 $3x-2y+6=0$ 的斜率為 a ， y 截距為 b ， x 截距為 c ，且此直線與兩坐標軸所圍成的封閉區域面積為 d ，求 $ab-cd$ 之值。

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{21}{2}$

【105C01】

Ans : (D)

$$3x - 2y + 6 = 0 \rightarrow 2y = 3x + 6$$

$$\rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$$

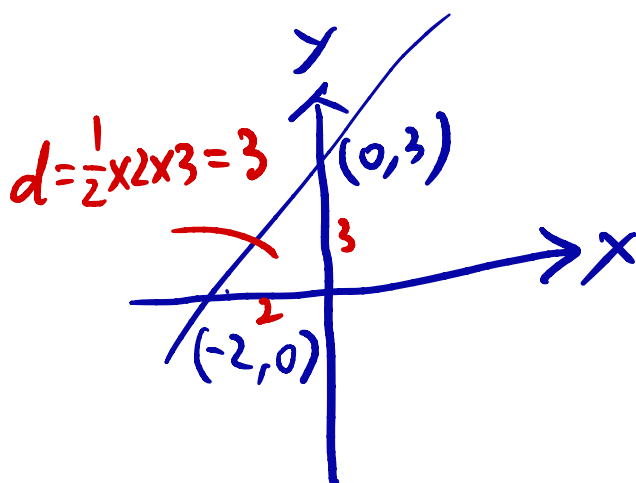
$$a = \frac{3}{2}$$

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$$c = -2 \quad -2 \quad 0$$

$$0 \quad 3$$

$$b = 3$$



$$\text{故 } ab - cd = \frac{3}{2} \times 3 - (-2) \times 3$$

$$= \frac{9}{2} + 6$$

$$= \frac{21}{2} \quad \#$$

已知圓的方程式為 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ；直線方程式為 $x + y - 1 = 0$ ，若圓和直線的交點分別為 A 與 B ，圓心為 O ，則下列何者正確？

(A) $\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) 圓心 O 到直線 $\overline{AB}$ 的距離為 $\frac{1}{2}$

(C) 圓心 O 與 A 、 B 形成的三角形 $\triangle ABO$ 面積為 $\frac{1}{2}$

(D) 交點 A 、 B 的坐標分別為 $(-1, 0)$ 、 $(0, 1)$

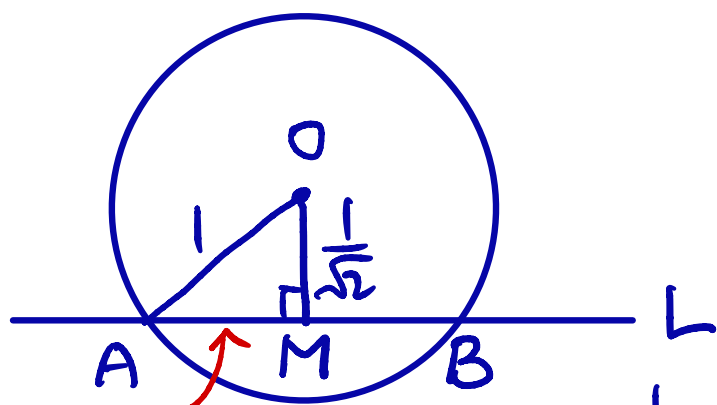
【105C20】

Ans : (C)

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = -1 + 1 + 1$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow O(1,1), r=1$$

$$L: x+y-1=0 \rightarrow d(O, L) = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\overline{AM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \sqrt{2}$$

$$\triangle ABO \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} *$$

$\hookrightarrow x, y = 1-x$ 代入圓

$$x^2 + (1-x)^2 - 2x - 2 + 2x + 1 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 - 1 = 0$$

$$2x(x-1) = 0$$

$$x=0 \text{ 或 } x=1$$

得 $A(0,1), B(1,0)$

已知 $P(a, 1)$ 、 $Q(-1, b)$ 為平面上兩點。若 P 為直線 $L: 3x - 4y = 2$ 上一點，且直線 $\overline{PQ}$ 與直線 L 垂直，則 $a + b = ?$

(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13

【104C16】

Ans : (A)

$$(a, 1) \rightarrow 3a - 4 = 2 \rightarrow a = 2 \rightarrow P(2, 1)$$

$$L: 4y = 3x - 2 \rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{3}{4}$$

$$m_{\overline{PQ}} = \frac{1-b}{2-(-1)} = \frac{1-b}{3}$$

$$\because \overleftrightarrow{PQ} \perp L$$

$$\therefore m_{\overline{PQ}} \times m = -1 \rightarrow \frac{1-b}{3} \times \frac{3}{4} = -1$$

$$\rightarrow 1 - b = -4$$

$$\rightarrow b = 5$$

$$\text{故 } a + b = 2 + 5 = 7$$

已知 a 、 b 為實數，若直線 $2x+ay+b=0$ 通過 $10x-2y+5=0$ 與 $6x-y+7=0$ 之交點，且斜率為 2，則 $a+b=?$

(A) -12 (B) -10 (C) 10 (D) 12

【102C22】

Ans: (A)

$$\begin{cases} 10x-2y=-5 \\ 6x-y=-7 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2x=-9 \\ 12x-2y=-14 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=-\frac{9}{2} \\ y=-20 \end{matrix}$$

交點 $(-\frac{9}{2}, -20)$

$$\begin{aligned} \therefore 2x(-\frac{9}{2}) + a(-20) + b &= 0 \\ -9 - 20a + b &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{得 } 20a - b = -9 \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{aligned} 2x + ay + b &= 0 \rightarrow \text{斜率} = -\frac{2}{a} = 2 \\ &\rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

$$\text{以 } a = -1 \text{ 代回 ① 得 } b = -11$$

$$\text{故 } a+b = -12 \quad \#$$

已知 L_1 、 L_2 為與直線 $3x+4y=0$ 平行的二直線。若 L_1 過點 $(-29, 23)$ ， L_2 過點 $(31, 23)$ ，則

此二平行線間的距離為何？

(A) 23 (B) 36 (C) 48 (D) 60

【102C24】

Ans : (B)

$$L_1: 3x+4y=k_1$$

$$k_1 = 3 \times (-29) + 4 \times 23 = -87 + 92 = 5$$

$$\text{得 } L_1: 3x+4y=5$$

$$L_2: 3x+4y=k_2$$

$$k_2 = 3 \times 31 + 4 \times 23 = 93 + 92 = 185$$

$$\text{得 } L_2: 3x+4y=185$$

$$d(L_1, L_2) = \frac{|185-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{180}{5} = 36 *$$

設直線 $L: kx+3y+10=0$ 與圓 $C: x^2+y^2=4$ 沒有 交點，則常數 k 的範圍為何？

- (A) $-4 < k < 4$ (B) $-2 < k < 2$ (C) $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ (D) $k < -\sqrt{2}$ 或 $k > \sqrt{2}$ 【101C06】

Ans : (A)

$$O(0,0), r=2$$

$$d(O, L) > r$$

$$\frac{10}{\sqrt{k^2+9}} > 2 \rightarrow \sqrt{k^2+9} < 5$$

$$\rightarrow k^2+9 < 25$$

$$\rightarrow k^2-16 < 0$$

$$\rightarrow k^2-4^2 < 0$$

$$\rightarrow (k+4)(k-4) < 0$$

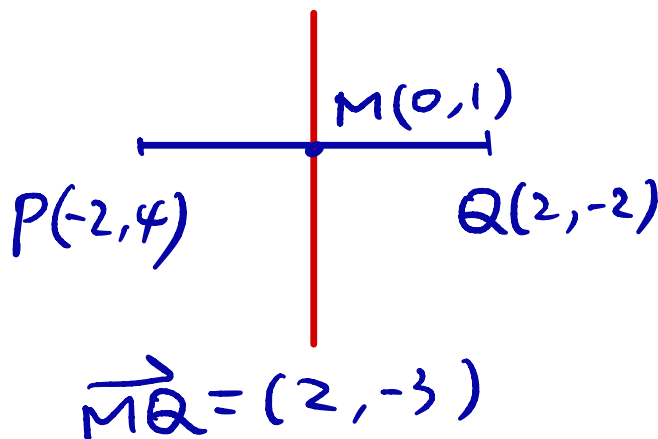
$$\rightarrow -4 < k < 4 \quad \#$$

設 $P(-2,4)$ 與 $Q(2,-2)$ ，若直線 $L: ax+3y+b=0$ 為 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線，求 $a+b$ 之值為何？

- (A) $-\frac{15}{2}$ (B) -5 (C) -1 (D) $\frac{3}{2}$

【101C15】

Ans : (B)



$$L: 2(x-0) - 3(y-1) = 0$$

$$\rightarrow 2x - 3y + 3 = 0$$

$$\rightarrow -2x + 3y - 3 = 0$$

$$a = -2 \quad b = -3$$

$$\text{故 } a+b = (-2) + (-3) = -5$$

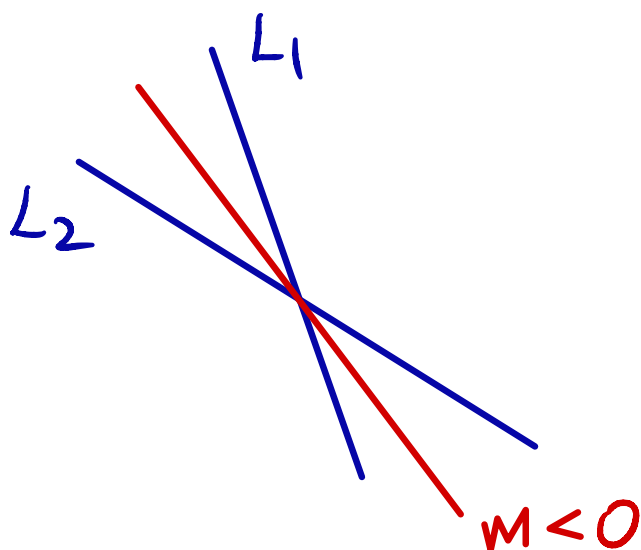
設兩直線 $L_1: 3x+y-4=0$ 與 $L_2: x+3y-4=0$ ，則 L_1 與 L_2 交角為銳角的角平分線方程式為何？

- (A) $x+y-2=0$ (B) $x-y=0$ (C) $2x+y-3=0$ (D) $2x-y=0$ 【101C24】

Ans : (A)

$$L_1: 3x+y-4=0 \rightarrow m_1 = -3 < 0$$

$$L_2: x+3y-4=0 \rightarrow m_2 = -\frac{1}{3} < 0$$



$$\frac{3x+y-4}{\sqrt{3^2+1^2}} = \pm \frac{x+3y-4}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$\textcircled{1} \quad 3x+y-4 = x+3y-4 \rightarrow x-y=0 \quad m=1 > 0$$

$$\textcircled{2} \quad 3x+y-4 = -(x+3y-4) \rightarrow x+y-2=0 \quad m=-1 < 0$$

故所求為 $x+y-2=0$ *

已知一圓方程式為 $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ 。下列敘述何者正確？

- (A) 點 $(1, 0)$ 落在圓外 (B) 此圓通過 $(-3, 4)$
(C) 此圓的半徑為 25 (D) 此圓的圓心為 $(0, 0)$

【100C06】

Ans : (A)

(A) $(1, 0) \rightarrow 1 + 0 + 6 - 0 > 0 \rightarrow$ 在圓外

(B) $(-3, 4) \rightarrow 9 + 16 - 18 - 32 \neq 0 \rightarrow$ 不在圓上

(C)、(D) $(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 9 + 16$

$\rightarrow (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$

$\rightarrow O(-3, 4), r = 5$

設直線 L_1 的斜率為 -2 且通過點 $(0, -4)$ ，又直線 L_2 的 x 、 y 軸截距分別為 1 、 2 ，則下列敘述何者正確？

(A) L_1 與 L_2 相交於點 $(2, -8)$

(B) L_1 與 L_2 相交於點 $(4, -6)$

(C) L_1 與 L_2 平行且兩線相距 $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(D) L_1 與 L_2 平行且兩線相距 $\frac{6}{\sqrt{5}}$

【100C12】

Ans : (D)

$$L_1: y = -2x - 4 \rightarrow L_1: 2x + y = -4$$

$$L_2: \frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1 \rightarrow L_2: 2x + y = 2$$

$$L_1 \parallel L_2$$

$$d(L_1, L_2) = \frac{|-4 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad \times$$

若直線 $24x - 7y = 53$ 與二直線 $x = 0$ 、 $x = 7$ 分別交於 A 、 B 二點，則線段 $\overline{AB}$ 的長度為何？

- (A) $\frac{24}{7}$ (B) $\frac{53}{7}$ (C) 25 (D) 53

【100C15】

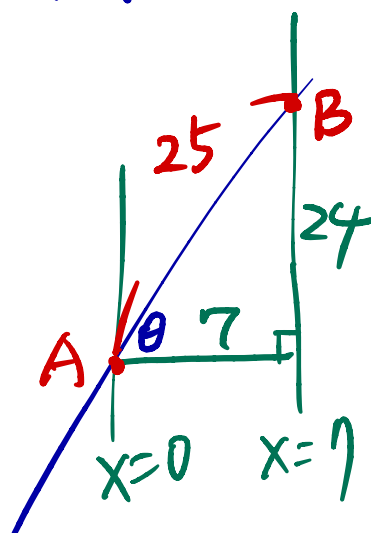
Ans : (C)

$$24x - 7y = 53 \text{ 之斜率 } m = \frac{24}{7}$$

$$\text{即 } \tan \theta = \frac{24}{7}$$

↑
斜角

故



$$\overline{AB} = 25$$

關於直線 $L: x+4y=28$ ，下列敘述何者正確？

- (A) 斜率為7 (B) y 截距為7 (C) 通過點 $(7, 7)$ (D) x 截距為7

【99C01】

Ans : (B)

$$\begin{aligned} L: x+4y=28 &\rightarrow 4y = -x+28 \\ &\rightarrow y = -\frac{1}{4}x+7 \end{aligned}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
斜率 y 截距

$$y=0 \text{ 時 } x=28 \rightarrow x\text{截距為} 28$$

設三直線 $L_1: x+3y-2=0$, $L_2: 3x+y+2=0$, $L_3: x-y-2=0$, 且 L_1 與 L_2 相交於 A 點, 則

過 A 點且與 L_3 平行的直線, 不通過那一個象限?

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

【99C05】

Ans : (D)

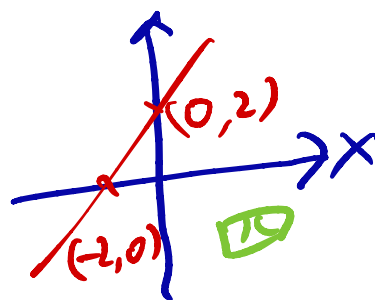
$$\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x+y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 3x+9y=6 \\ 3x+y=-2 \end{matrix} \rightarrow 8y=8 \rightarrow y=1 \rightarrow x=-1$$

$$A(-1, 1)$$

$$L \parallel L_3 \rightarrow \text{設 } L: x-y=k$$

$$\text{以 } (-1, 1) \text{ 代入得 } k = -2$$

$$\text{故 } L: x-y = -2$$



已知直線 $L: 3x+4y+5=0$ 與圓 $C: x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 兩者的交點個數為 a ，且圓 C 的圓心到直線 L 的距離為 b ，則下列何者為正確？

- (A) $a-b=-3$ (B) $a-b=-1$ (C) $a+b=4$ (D) $a+b=5$

【99C06】

Ans : (C)

$$C: (x^2+2x+1) + (y^2-4y+4) = 4+1+4$$

$$\rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$\rightarrow O(-1, 2), r=3$$

$$d(O, L) = \frac{|-3+8+5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2 < r$$

$$\text{故 } a=2, b=2 \rightarrow a+b=4 \quad \times$$

在坐標平面上，若 $\triangle ABC$ 之三頂點坐標分別為 $A(2, 0)$ 、 $B(4, 0)$ 與 $C(4, 3)$ ，則 $\triangle ABC$ 之三邊上共有多少點與原點的距離恰為整數值？

- (A) 2個 (B) 4個 (C) 6個 (D) 8個

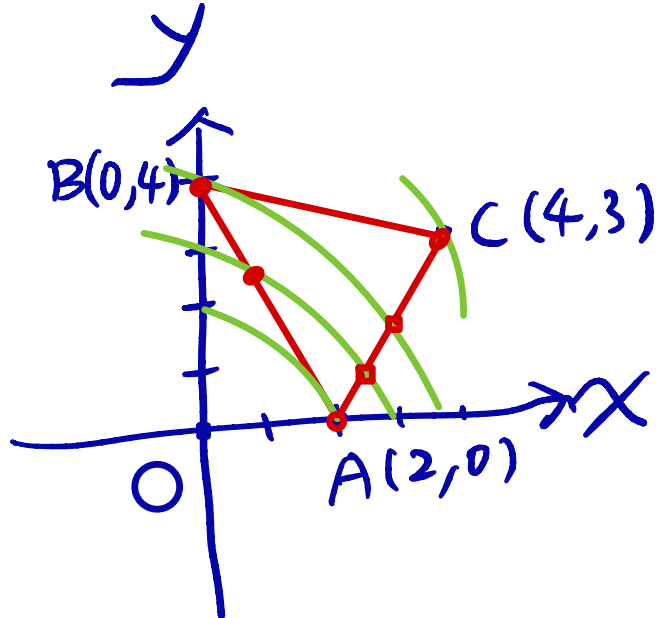
【99C21】

Ans : (C)

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$\overline{OB} = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

$$\overline{OC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$



由圖得知共有 6 個點

下列敘述何者錯誤？

(A) 直線 $L: x+2y=4$ 的斜率為 $-\frac{1}{2}$

(B) 方程式 $x=4$ 的圖形是一條通過點 $(4, 5)$ ，且平行 y 軸的直線

(C) 通過點 $A(1, 2)$ 、 $B(-2, 3)$ 的直線方程式為 $3x-y-1=0$

(D) 當點 $A(-1, 1)$ 、 $B(2, x)$ 、 $C(3, 11)$ 的為共線的三點時，則 $x = \frac{17}{2}$

【98C15】

Ans: (C)

$$(A) L: 2y = -x + 4 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$m = -\frac{1}{2}$

(B) $x=4$ 為過 $(4, 5)$ 之鉛直線

$$(C) m = \frac{2-3}{1+2} = \frac{-1}{3}$$
$$y-2 = \frac{-1}{3}(x-1)$$

$$3y-6 = -x+1 \rightarrow x+3y-7=0$$

$$(D) m_{\overline{AB}} = m_{\overline{AC}} \rightarrow \frac{1-x}{-1-2} = \frac{1-11}{-1-3}$$
$$\rightarrow \frac{1-x}{-3} = \frac{-10}{-4}$$
$$\rightarrow 1-x = -\frac{30}{4}$$
$$\rightarrow x = \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$$

若圓 C 的方程式為 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ ，則下列各方程式的圖形，何者與圓 C 相切？

- (A) $3x + 4y - 1 = 0$ (B) $3x + 4y - 2 = 0$ (C) $3x + 4y - 7 = 0$ (D) $3x + 4y - 14 = 0$

Ans : (B)

【98C17】

$$C: (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -4 + 9 + 4$$

$$\rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$\rightarrow O(3, 2), r = 3$$

$$(A) d(O, L) = \frac{|9+8-11|}{5} \neq 3$$

$$(B) d(O, L) = \frac{|9+8-2|}{5} = \frac{15}{5} = 3 \quad \times$$

$$(C) d(O, L) = \frac{|9+8-7|}{5} = \frac{10}{5} = 2 \neq 3$$

$$(D) d(O, L) = \frac{|9+8-14|}{5} \neq 3$$

ch06_數列與級數

若數列 $-2, a, b, 7$ 成等差數列，且數列 a, b, p, q 成等比數列，則 $p+q=?$

(A) 60 (B) 70 (C) 80 (D) 90

【114C07】

Ans : (C)

$$7 = -2 + 3d \rightarrow d = 3 \rightarrow \begin{cases} a = -2 + 3 = 1 \\ b = 1 + 3 = 4 \end{cases}$$

$$1, 4, p, q \text{ 成等比} \rightarrow r = \frac{4}{1} = 4$$

$$p = 4 \times 4 = 16, \quad q = 16 \times 4 = 64$$

$$\text{故 } p + q = 16 + 64 = 80 \quad \#$$

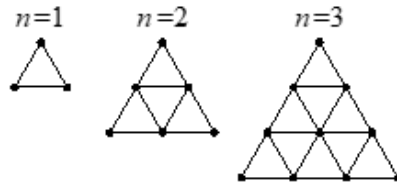
小美想用火柴棒排成一個 n 層正三角形金字塔，例如當 $n=1$ 、 2 、 3 時，如圖所示。若依此規則，則排出一個 50 層金字塔恰需要多少根火柴棒？

(A) 3675

(B) 3825

(C) 7500

(D) 7803



【113C20】

Ans : (B)

$$n=1 \rightarrow 3$$

$$n=2 \rightarrow 3+6=3(1+2)$$

$$n=3 \rightarrow 3+6+9=3(1+2+3)$$

$\vdots$

$$n=50 \rightarrow 3(1+2+3+\cdots+50) = 3 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

$$= 3825$$

晴晴在 2018 年初以一股 50 元買進某一檔股票，在 2023 年初該股經配股、配息還原後，可以還原股價為一股 60 元。若此股價 60 元可視為以每年固定年利率 r 進行複利計算，則 r 可以從下列哪個算式計算求得？

(A) $50 \times r^5 = 60$ (B) $50 \times (1+r)^5 = 60$ (C) $50 \times (r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5) = 60$

(D) $50 \times [(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + (1+r)^4 + (1+r)^5] = 60$

【112C13】

Ans : (B)

$$50(1+r)^5 = 60$$

已知等比數列 $\langle a_k \rangle$ 的首項 $a_1 = 2$ ，公比 $r = 3$ 。若前 n 項和大於2022，則滿足條件的最小正整數 $n = ?$

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11

【111C02】

Ans : (B)

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$
$$= \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$= 3^n - 1 > 2022$$

$$3^n > 2023$$

$$3^6 = 729, \quad 3^7 = 2187$$

$$\therefore \text{取 } n = 7$$

若 $a = \sum_{m=1}^7 \frac{m-2}{2m-1}$ 、 $b = \sum_{k=0}^6 \frac{k-1}{2k+1}$ 、 $c = \sum_{i=3}^8 \frac{i-4}{2i-5}$ ，則下列敘述何者正確？

- (A) $b > a > c$ (B) $c > a > b$ (C) $c > a = b$ (D) $a = b > c$

【110C06】

Ans : (D)

$$\begin{aligned} a &= \frac{1-2}{2-1} + \frac{2-2}{4-1} + \frac{3-2}{6-1} + \cdots + \frac{7-2}{14-1} \\ &\quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \cdots \quad \parallel \\ b &= \frac{0-1}{0+1} + \frac{1-1}{2+1} + \frac{2-1}{4+1} + \cdots + \frac{6-1}{12+1} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{7個項}} \\ c &= \frac{3-4}{6-5} + \frac{4-4}{8-5} + \frac{5-4}{10-5} + \cdots + \frac{8-4}{16-5} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{6個項}} \end{aligned}$$

$a = b$

c 比 b 少這一項
而 $\frac{5}{13} > 0$

$\therefore b > c$

故得知 $a = b > c$

某棒球投手自4月1日開始每天練投，他每日投球數為等差數列。若4月5日投球數為41個，4月13日為73個，則他4月份有幾天投球數超過100個？

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

【109C09】

Ans: (B)

$$4/1 \quad \dots \quad 4/5 \quad \dots \quad 4/13 \quad \dots \quad 4/n \quad \dots \quad 4/30$$
$$a_1 \quad a_5=41 \quad a_{13}=73 \quad a_n$$

$$\text{公差 } d = \frac{a_{13} - a_5}{13 - 5} = \frac{73 - 41}{13 - 5} = 4$$

$$a_n = a_{13} + (n - 13) \times d$$
$$= 73 + 4(n - 13) > 100$$

$$4(n - 13) > 27 \rightarrow n - 13 > 6.75 \dots$$
$$\rightarrow n > 19.75 \dots$$

取最小 $n = 20$

$$\therefore 30 - 20 + 1 = 11 \text{ (天)}$$

已知 $\{a_n\}$ 為等差數列且滿足 $a_1 > 0$ 、 $a_5 = 3a_{12}$ 。則當 n 為多少時， a_n 開始為負數？

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17

【108C13】

Ans : (C)

$$a_1 + 4d = 3(a_1 + 11d)$$

$$a_1 + 4d = 3a_1 + 33d$$

$$-2a_1 = 29d \rightarrow d = -\frac{2}{29}a_1$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= a_1 - \frac{2}{29}(n-1)a_1$$

$$= \left[1 - \frac{2}{29}(n-1)\right] a_1 < 0$$

$$\therefore 1 - \frac{2}{29}(n-1) < 0$$

$$\frac{2}{29}(n-1) > 1 \rightarrow n-1 > \frac{29}{2} = 14.5$$

$$\rightarrow n > 15.5$$

$$\text{取 } n = 16$$

$$\sum_{n=1}^{10} (2^n + 3n + 2) = ?$$

(A) 1268 (B) 1298 (C) 2017 (D) 2231

【107C13】

Ans : (D)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \sum_{n=1}^{10} 2^n + 3 \sum_{n=1}^{10} n + 2 \cdot \sum_{n=1}^{10} 1 \\ &= \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} + 3 \cdot \frac{1}{2} \times 10 \times 11 + 2 \times 10 \\ &= 2046 + 165 + 20 \\ &= 2231\end{aligned}$$

設 a 、 b 、 c 三數成等比數列，且滿足 $a+b+c=9$ 及 $a^2+b^2+c^2=189$ ，則等比中項 $b=?$

(A) -6 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 6

【106C13】

Ans : (A)

$$a+ar+ar^2=9 \rightarrow a(1+r+r^2)=9 \text{ --- ①}$$

$$a^2+a^2r^2+a^2r^4=189 \rightarrow a^2(1+r^2+r^4)=189 \text{ --- ②}$$

$$\frac{\text{②}}{\text{①}^2} \Rightarrow \frac{a(1+r^2+r^4)}{(1+r+r^2)^2} = 21$$

$$\frac{a(1+r+r^2)(1-r+r^2)}{1+r+r^2} = 21$$

$$a(1-r+r^2)=21 \text{ --- ③}$$

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=9 \text{ --- ①} \\ a-ar+ar^2=21 \text{ --- ③} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{③} \Rightarrow 2ar = -12 \rightarrow ar = -6$$

$$\rightarrow b = -6^*$$

$$\begin{array}{r} 1-1+1 \\ 1+1+1 \overline{) 1+0+1+0+1} \\ \underline{1+1+1} \\ -1+0+0 \\ -1-1-1 \\ \hline 1+1+1 \\ \underline{1+1+1} \\ 0 \end{array}$$

設 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 六數成等比數列，且已知 $a+c+e=168$ ， $b+d+f=84$ ，則 d 之值為何？

(A) 6 (B) 9 (C) 16 (D) 32

【105C13】

Ans : (C)

$$\begin{aligned} a + ar^2 + ar^4 &= 168 \rightarrow a(1+r^2+r^4) = 168 \text{ --- ①} \\ ar + ar^3 + ar^5 &= 84 \rightarrow ar(1+r^2+r^4) = 84 \text{ --- ②} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{②}}{\text{①}} \text{ 得 } r = \frac{84}{168} = \frac{1}{2}$$

$$\text{代回 ① 得 } a \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = 168$$

$$a \times \frac{\cancel{21}}{16} = \overset{8}{\cancel{168}} \rightarrow a = 128$$

$$\therefore d = ar^3 = \overset{16}{\cancel{128}} \times \frac{1}{\cancel{8}} = 16 \quad \#$$

已知四個正數 a 、 b 、 c 、 d 為一等比數列，若 $a+b=20$ ， $a+b+c+d=65$ ，則 $a=?$

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

【104C18】

Ans : (D)

$$a+ar=20 \quad \text{--- ①}$$

$$a+ar+ar^2+ar^3=65 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得 } ar^2+ar^3=45 \quad \text{--- ③}$$

$$\frac{\text{③}}{\text{①}} \text{ 得 } \frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)} = \frac{45}{20} \rightarrow r^2 = \frac{9}{4} \rightarrow r = \frac{3}{2}$$

$$\text{代回 ① 得 } a + \frac{3}{2}a = 20 \rightarrow \frac{5}{2}a = 20$$

$$\rightarrow a = 8$$

設一等比級數的第三項為 4，公比為 $-\frac{1}{3}$ ，前 n 項和為 $\frac{6560}{243}$ ，則 n 之值為何？

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

【103C04】

Ans : (B)

$$a_1 r^2 = 4, r = -\frac{1}{3} \rightarrow a_1 \times \frac{1}{9} = 4 \rightarrow a_1 = 36$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{36[1-(-\frac{1}{3})^n]}{1-(-\frac{1}{3})} = 27[1-(-\frac{1}{3})^n]$$

$$27[1-(-\frac{1}{3})^n] = \frac{6560}{243}$$

$$1-(-\frac{1}{3})^n = \frac{6560}{6561}$$

$$3^8 = 6561$$

$$\text{移項得 } (-\frac{1}{3})^n = \frac{1}{6561} = (-\frac{1}{3})^8$$

$$\therefore n = 8$$

設 a 、 b 、 c 三個數均為正實數，且已知 $a+c=36$ ，若 a 、 b 、 12 三數成等差數列，且 2 、 b 、 c 三數成等比數列，則下列敘述何者有誤？

- (A) $b+c=32$ (B) $a+b=12$ (C) $b^2=2c$ (D) $2b=a+12$

【103C22】

Ans : (A)

$$\begin{aligned} a, b, 12 \text{ 成等差} &\rightarrow a+12=2b \\ &\rightarrow a=2b-12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2, b, c \text{ 成等比} &\rightarrow b^2=2c \\ &\rightarrow c=\frac{b^2}{2} \end{aligned}$$

$$a+c=36 \rightarrow 2b-12+\frac{b^2}{2}=36$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow b^2+4b-96=0 \\ &\quad \quad \quad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \times \begin{array}{r} -8 \\ +12 \end{array} \end{aligned}$$

$$\rightarrow b=8 \text{ or } b=\underline{-12} \text{ (不合)}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } b=8 &\rightarrow a=2 \times 8 - 12 = 4 \\ &\rightarrow c = \frac{8^2}{2} = 32 \end{aligned}$$

$$(A) \quad b+c=8+32=40 \quad \times$$

$$(B) \quad a+b=4+8=12$$

$$(C) \quad b^2=2c$$

$$(D) \quad 2 \times 8 = 4 + 12$$

求 102 到 2013 之間，個位數字為 7 的正整數共有幾個？

(A) 190 (B) 191 (C) 192 (D) 193

【102C01】

Ans : (B)

107, 117, ..., 2007

此為 $a_1 = 107$, $d = 10$ 之等差數列

$$2007 = 107 + (n-1) \times 10$$

$$1900 = (n-1) \times 10$$

$$n-1 = 190$$

$$n = 191 \quad \#$$

若兩數列 $2, 2a, 18$ 及 $a+4, 2, a+7$ 都是等比數列，則下列何者正確？

- (A) $-6 < a < -4$ (B) $-4 < a < -2$ (C) $2 < a < 4$ (D) $4 < a < 6$

【101CH】

Ans : (B)

$$(2a)^2 = 2 \times 18 \rightarrow 4a^2 = 36 \rightarrow a^2 = 9 \\ \rightarrow a = \pm 3$$

① $a = 3$ 時， $\underset{\text{"7}}{3+4}, 2, \underset{\text{"10}}{3+7}$ 非等比

② $a = -3$ 時， $\underset{\text{"1}}{-3+4}, 2, \underset{\text{"4}}{-3+7}$ 為等比

$$\text{故 } a = -3 \rightarrow -4 < -3 < -2$$

設 p 、 q 為二相異正整數，且 a_n 為一等差數列的第 n 項。若 $a_p = q$ ， $a_q = p$ ，則 $a_{p+q} = ?$

- (A) 0 (B) p (C) q (D) $p+q$

【98C13】

Ans : (A)

$$\text{公差 } d = \frac{a_p - a_q}{p - q} = \frac{q - p}{p - q} = -1$$

$$a_{p+q} = a_p + [(p+q) - p] \times d$$

$$= q + q \times (-1)$$

$$= q - q$$

$$= 0$$

ch07_排列組合

從 1 到 9 中取出兩個相異的奇數及兩個相異的偶數排成一個四位數。若要求兩個奇數不相鄰且兩個偶數也不相鄰，則滿足此條件的四位數共有幾個？

(A) 120 (B) 480 (C) 720 (D) 800

【114C14】

Ans : (B)

$$\begin{array}{ll} \text{① 奇偶奇偶} & C_1^5 \times C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^3 = 240 \quad \begin{array}{l} \text{奇} \rightarrow 5 \\ \text{偶} \rightarrow 4 \end{array} \\ \text{② 偶奇偶奇} & C_1^5 \times C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^3 = 240 \end{array}$$

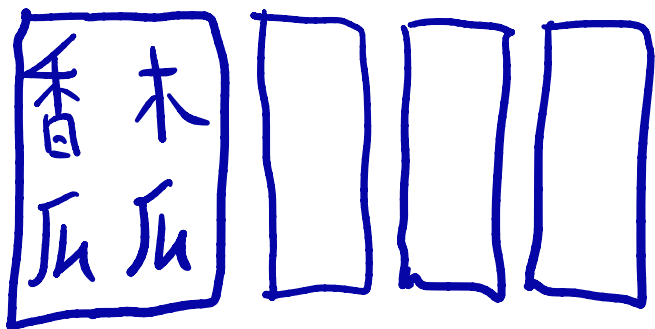
$$240 + 240 = 480 \quad \#$$

小輝從大賣場採買一些要祭拜祖先的水果，計有西瓜、芒果、蘋果、香瓜、橘子及木瓜等六種水果，他從中各取出一顆水果置於供桌準備祭拜，發現供桌大小只能容納其中五顆水果排成一行放置，若其中香瓜及木瓜都被選到，且此兩種水果位置相鄰，則有幾種不同排列方法？

(A) 48 (B) 96 (C) 192 (D) 240

【113C07】

Ans : (C)



$$\begin{aligned} C_3^4 \times 4! \times 2! &= 4 \times 24 \times 2 \\ &= 192 \end{aligned}$$

阿軒餐飲店推出均衡套餐，套餐有飯、主菜、湯與飲料4樣，其中飯有白飯、紫米飯、五穀飯、炒飯與稀飯5種，主菜有牛排、豬排、魚排與雞排4種，湯有洋蔥牛肉湯、豬肉貢丸湯、魚丸湯與人蔘雞湯4種，飲料有柳橙汁、西瓜汁、咖啡與紅茶4種。基於均衡原則，套餐的主菜與湯不能同為紅肉或同為白肉(牛與豬為紅肉，魚與雞為白肉)，若在符合均衡原則下，從飯、主菜、湯與飲品4樣中各選1種，則均衡套餐共有幾種點餐的方式？

(A) 80 (B) 160 (C) 240 (D) 320

【112C20】

Ans : (D)

$$\begin{aligned} & \text{飯} \quad \text{且} \quad \text{主菜與湯} \quad \text{且} \quad \text{飲品} \\ & C_1^5 \times (C_1^2 \times C_1^2 + C_1^2 \times C_1^2) \times C_1^4 \\ & = 5 \times (4 + 4) \times 4 \\ & = 5 \times 8 \times 4 \\ & = 160 \end{aligned}$$

某歌手打算在她的演唱會上表演一段由 6 首不同的歌串成的組曲，其中 3 首慢歌、3 首快歌。她的音樂總監建議在歌曲的安排上最多只能 2 首慢歌連在一起唱，因為這樣才會使得整個組曲的節奏比較流暢。若她認同並接受音樂總監的建議，試問這段組曲可以有多少種不同的安排方式？

(A) 576 (B) 648 (C) 696 (D) 720

【111C15】

Ans : (A)

$$\begin{array}{l} \underbrace{a \cdot b \cdot c}_{\text{慢歌}} \cdot \underbrace{d \cdot e \cdot f}_{\text{快歌}} \\ a \cdot b \cdot c \text{ 全相鄰} \\ 6! - 4! \times 3! \\ = 720 - 24 \times 6 \\ = 720 - 144 \\ = 576 \end{array}$$

跆拳道隊友 8 個隊員，教練安排所有隊員每 2 人一組分別在 A 、 B 、 C 、 D 四個不同場地練習，則共有幾種安排的方式？

- (A) 105 (B) 2520 (C) 5040 (D) 40320

【110C12】

Ans : (B)

2 , 2 , 2 , 2

$$\left(C_2^8 \times C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 \times \frac{1}{4!} \right) \times 4!$$

$$= 28 \times 15 \times 6 \times 1$$

$$= 2520$$

一個空的書櫃有上、中、下共三層，若將國文、英文、數學三本課本放入書櫃的任一層，且當課本放在同一層左右順序不同時視為不同排列，則共有幾種不同的排法？

(A) 60 (B) 36 (C) 27 (D) 18

【110C21】

Ans : (A)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \text{上} & \text{中} & \text{下} \\
 \left\{ \begin{array}{lll}
 3 & 0 & 0 \rightarrow 3! = 6 \\
 0 & 3 & 0 \rightarrow 6 \\
 0 & 0 & 3 \rightarrow 6
 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{lll}
 2 & 1 & 0 \rightarrow C_2^3 \times 2! \times 1 = 6 \\
 2 & 0 & 1 \rightarrow 6 \\
 1 & 2 & 0 \rightarrow 6 \\
 1 & 0 & 2 \rightarrow 6 \\
 0 & 2 & 1 \rightarrow 6 \\
 0 & 1 & 2 \rightarrow 6 \\
 1 & 1 & 1 \rightarrow 3! = 6
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore 6 \times 3 + 6 \times 6 + 6 &= 18 + 36 + 6 \\
 &= 60 \#
 \end{aligned}$$

在一次立法委員選舉中，每位選民須投區域立委與不分區政黨兩種選票，且每種選票均只能圈選一位(個)，否則視為廢票。已知某甲的戶籍地有 6 位區域立委候選人，而全國共有 14 個政黨可選擇，若某甲決定去投票，且兩種選票均不投廢票，試問某甲有多少種投票組合？

- (A) 6 (B) 14 (C) 20 (D) 84

【109C05】

Ans : (D)

$$C_1^6 \times C_1^{14} = 6 \times 14 = 84 \quad \times$$

某次啦啦隊競賽規定，每隊組隊人數 8 人且男、女生均至少 2 人。某班共有 4 名男生與 6 名女生想參加啦啦隊競賽，若由此 10 人中依規定選出 8 人組隊，則共有多少種組隊方式？

(A) 45 (B) 60 (C) 75 (D) 90

【108C10】

Ans : (A)

男 $\rightarrow$ 4 人

女 $\rightarrow$ 6 人

$$C_4^6 = C_2^6 = 15$$

$$C_2^4 \times C_6^6 + C_3^4 \times C_5^6 + C_4^4 \times C_4^6$$

$$= 6 \times 1 + 4 \times 6 + 1 \times 15$$

$$= 6 + 24 + 15$$

$$= 45$$

✖

若從 11 件相異物中分別取出 5、6、7 件的組合數分別為 A 、 B 、 C ，而從 12 件相異物中取出 6 件的組合數為 D ，則下列何者正確？

- (A) $B > A$ (B) $C > A$ (C) $D = A + B$ (D) $D = B + C$

【107C14】

Ans : (C)

$$A = C_{5}^{11} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$B = C_{6}^{11} = C_{5}^{11} = A \quad \begin{array}{l} \because A = C \times \frac{7}{5} \\ \therefore A > C \end{array}$$

$$C = C_{7}^{11} = C_{4}^{11} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} < A$$

$$\begin{aligned} D = C_{6}^{12} &= \frac{\overset{2}{12} \times (11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7)}{\cancel{6} \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = 2 C_{5}^{11} \\ &= C_{5}^{11} + C_{5}^{11} \\ &= C_{5}^{11} + C_{6}^{11} \\ &= A + B \end{aligned}$$

同時投擲四個公正骰子，點數 3 出現至多一次的情形共有幾種？

(A) 1125 (B) 1185 (C) 1245 (D) 1365

【107C24】

Ans : (A)

① 沒 3 $\rightarrow$ $\square\square\square\square$
 $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

② 1 個 3 $\rightarrow$ $\boxed{3}\square\square\square$
4 選 1 放 $\times 3$
 $C_1^4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$

故 $625 + 500 = 1125$ ~~*~~

將繞口令「四十個十四 十四個四十」中的文字全取排成一列，且其中四個「十」須相鄰排在一起，其排法有幾種？

- (A) 70 (B) 105 (C) 135 (D) 210

【106C16】

Ans : (B)



$$\frac{7!}{4!2!} = \frac{7 \times \overset{3}{\cancel{6}} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!} \times \cancel{2}} = 105 \quad \#$$

將 0、1、2、3、5 五個數字全取，排成一行，可得 4 的倍數的五位數共有多少個？

(註：凡是末兩位數是 4 的倍數者即為 4 的倍數)

(A) 18 (B) 20 (C) 24 (D) 36

【103C12】

Ans : (A)



① 1 2

② 2 0

③ 3 2

④ 5 2

0 排首

$$\textcircled{1} \quad 3! - 2! = 6 - 2 = 4 \rightarrow \textcircled{3}、\textcircled{4} \text{ 亦同}$$

$$\textcircled{2} \quad 3! = 6$$

$$\text{故有 } 4 \times 3 + 6 = 12 + 6 = 18 \text{ (個)}$$

✱

由甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛八個人當中選取 5 人組成一個委員會，且甲、乙、丙、丁四人中至少有 2 人為委員，則組成此委員會的方法數共有幾種？

(A) 48 (B) 50 (C) 52 (D) 54

【101C17】

Ans : (C)

甲·乙·丙·丁 戊·己·庚·辛

$$\begin{aligned} & C_2^4 \times C_3^4 + C_3^4 \times C_2^4 + C_4^4 \times C_1^4 \\ &= 6 \times 4 + 4 \times 6 + 1 \times 4 \\ &= 24 + 24 + 4 \\ &= 52 \end{aligned}$$

將 0、0、2、2、9、9、9、9 八個數字全取，排成一行，可得幾個不同的八位數？

- (A) 155 (B) 210 (C) 315 (D) 420

【101C25】

Ans : (C)

$$\begin{aligned} & \text{⑩} \dots \\ & \frac{8!}{2!2!4!} - \frac{7!}{2!4!} = \frac{\overset{2}{\cancel{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}}}{\cancel{2 \times 2 \times 4!}} - \frac{\overset{3}{\cancel{7 \times 6 \times 5 \times 4!}}}{\cancel{2 \times 4!}} \\ & = 420 - 105 \\ & = 315 \end{aligned}$$

甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七人排成一列。若甲、乙、丙、丁四人必排在此列的最前面四位，且甲、乙不相鄰，則此七人共有多少種排法？

(A) 36 (B) 72 (C) 144 (D) 840

【100C21】

Ans : (B)

$$\underbrace{\square \square \square \square}_{(4! - 3! \times 2)} \times \underbrace{\square \square \square}_{3!}$$

$$= (24 - 6 \times 2) \times 6$$

$$= 12 \times 6$$

$$= 72 \quad \#$$

設三位數的百位數字為 a 、十位數字為 b 、個位數字為 c 。若 a 、 c 為偶數， b 為奇數，則滿足這些條件的三位數共有多少個？

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

【100C25】

Ans : (D)

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \textcircled{1} & \underline{8, 6, 4, 2} & 1 \quad 0 \quad 4 \times 1 = 4 \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{8, 6, 4} \quad 3 \quad \underline{0, 2} \quad 3 \times 2 = 6$$

$$\textcircled{3} \quad \underline{8, 6} \quad 5 \quad \underline{0, 2, 4} \quad 2 \times 3 = 6$$

$$\textcircled{4} \quad 8 \quad 7 \quad 0, 2, 4, 6 \quad 1 \times 4 = 4$$

$$\therefore \text{有 } 4 + 6 + 6 + 4 = 20 \text{ (個)} \quad \#$$

有一籃球隊共有12位選手，其前鋒、中鋒、後衛的人數分別為4人、3人、5人，現在要選5位選手上場比賽，一般籃球比賽中，每隊的前鋒、中鋒、後衛人數分別為2人、1人、2人，問共有幾種不同選法？

(A) 120 (B) 154 (C) 180 (D) 225

【99C08】

Ans : (C)

$$\begin{aligned} & C_2^4 \times C_1^3 \times C_2^5 \\ &= 6 \times 3 \times 10 \\ &= 180 \end{aligned}$$

下列各問題中，何者的解答是 C_6^{10} (其中 $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$)？

(A) 10 位學生中任意挑選 6 位同學排成一列，共有幾種情形？

(B) 10 個不同的顏色的球任意挑選 4 個出來，共有幾種情形？

(C) 10 張椅子排成一列，6 位同學各自任意挑選 1 張椅子坐下，共有幾種情形？

(D) 10 個相同的白色球任意挑選 4 個出來，共有幾種情形？

【98C19】

Ans：(B)

$$(A) P_6^{10} = C_6^{10} \times 6!$$

$$(B) C_4^{10} = C_6^{10}$$

$$(C) C_6^{10} \times 6!$$

$$(D) 1$$

ch08_三角函數的應用

若 θ 為一標準位置角， $i = \sqrt{-1}$ ，已知 $\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 與 $\frac{-1}{2} + (\sin \theta)i$ 為共軛複數，則 $\sin 2\theta = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

【113C18】

Ans : (B)

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$
$$= \cancel{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \left(\frac{-1}{2} \right)$$
$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \times$$

已知 $x = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ 、 $y = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ 、 $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，試求

$$\frac{x^2 y^4}{z^3} = ?$$

【112C08】

(A) $2^2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ (B) $2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ (C) $2^2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ (D) $2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$

Ans : (A)

r 的部分 $\rightarrow \frac{(\sqrt{2})^2 \times 2^4}{2^3} = 2^2$

θ 的部分 $\rightarrow \frac{\pi}{4} \times 2 + \frac{\pi}{6} \times 4 - \frac{\pi}{3} \times 3$
 $= \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} - \pi$

$$= \frac{\pi}{6}$$

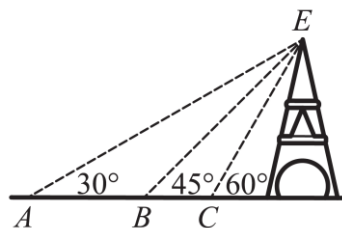
$$\therefore \frac{x^2 y^4}{z^3} = 2^2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{✗}$$

某人由 A 處測量高塔塔頂 E 的仰角為 30° ，朝高塔方向前進 a 公尺至 B 處時測量塔頂 E 的仰角為 45° ，繼續朝高塔方向前進 b 公尺至 C 處時測量塔頂 E 的仰角為 60° ，如圖所示，則

$$\frac{a}{b} = ?$$

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Ans : (A)

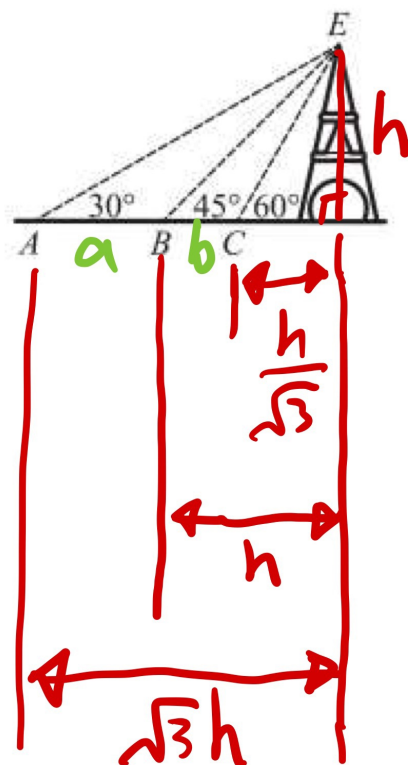


【111C12】

$$a = \sqrt{3}h - h = (\sqrt{3} - 1)h$$

$$b = h - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}}h$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\cancel{(\sqrt{3} - 1)}h}{\frac{\cancel{(\sqrt{3} - 1)}h}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \quad \times$$



$$\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 50^\circ - \sin 25^\circ \cos 25^\circ \cos 20^\circ = ?$$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{2}$

【110C03】

Ans : (C)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2} (2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ) \cos 50^\circ - \frac{1}{2} (2 \sin 25^\circ \cos 25^\circ) \cos 20^\circ \\&= \frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 50^\circ - \frac{1}{2} \sin 50^\circ \cos 20^\circ \\&= -\frac{1}{2} (\sin 50^\circ \cos 20^\circ - \cos 50^\circ \sin 20^\circ) \\&= -\frac{1}{2} \sin(50^\circ - 20^\circ) \\&= -\frac{1}{2} \sin 30^\circ \\&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\&= -\frac{1}{4} \quad \times\end{aligned}$$

下列敘述何者正確？

(A) $y = \tan \frac{\theta}{3}$ 的週期為 $\frac{\pi}{3}$ (B) $\tan^2 \theta - \sec^2 \theta = 1$ (C) $-\sqrt{2} \leq \sin \theta + \cos \theta \leq \sqrt{2}$

(D) 若 $\cos \theta = \sin \theta$ ，則 $\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ，其中 n 為整數

【110C18】

Ans : (C)

$$(A) T = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$$

$$(B) \tan^2 \theta - \sec^2 \theta = -1$$

$$(C) -\sqrt{1^2+1^2} \leq \sin \theta + \cos \theta \leq \sqrt{1^2+1^2}$$

$$\rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin \theta + \cos \theta \leq \sqrt{2}$$

$$(D) \cos \theta = \sin \theta \rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1 \rightarrow \tan \theta = 1$$

$$\theta \text{ 在第一、三象限} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

已知 $i = \sqrt{-1}$ ， $(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i})^2 + (\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i})^2 = a+bi$ ，則 $a+b = ?$

- (A) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ (B) -1 (C) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

【110C19】

Ans : (B)

$$z = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ}{\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ} = \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ$$

$$z^2 = \cos 600^\circ + i \sin 600^\circ = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{而 } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \right)^2 = \left(\frac{1}{z} \right)^2 = \overline{z}^2 = \overline{z^2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\boxed{\begin{aligned} z \overline{z} &= |z|^2 = 1 \\ \frac{1}{z} &= \overline{z} \end{aligned}}$$

$$\text{故 } a+bi = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + 0i$$

$$\text{得 } a = -1, b = 0 \rightarrow a+b = -1$$

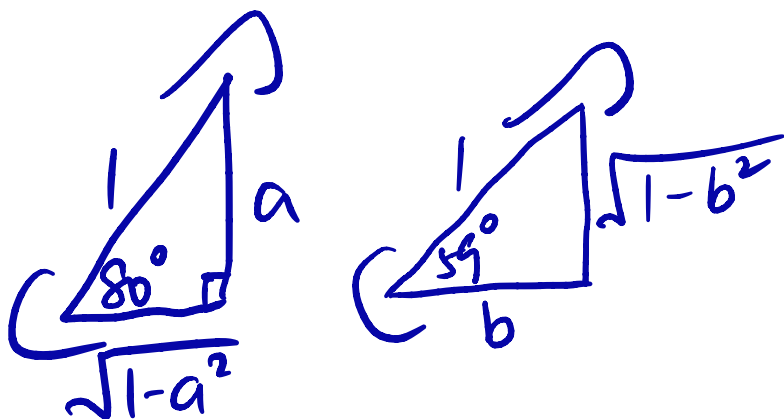
若 $\sin 80^\circ = a$ ， $\cos 59^\circ = b$ ，則 $\cos 21^\circ = ?$

(A) $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$ (B) $a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}$ (C) $ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

(D) $ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

【109C06】

Ans : (A)



$$\begin{aligned}\cos 21^\circ &= \cos(80^\circ - 59^\circ) \\ &= \cos 80^\circ \cos 59^\circ + \sin 80^\circ \sin 59^\circ \\ &= \sqrt{1-a^2} \cdot b + a \cdot \sqrt{1-b^2} \\ &= a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \quad \times\end{aligned}$$

設 $(\sqrt{3}+i)z = -2\sqrt{3}+2i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 z 之主幅角為何？

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{7\pi}{6}$

【109C08】

Ans : (B)

$$z = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)} = 2 \cdot \frac{\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ}{\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ}$$

$$= 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$\text{故 } \text{Arg}(z) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \quad \#$$

在 $\triangle ABC$ 中，若 $\frac{\cos B + i \sin B}{(\cos A + i \sin A)(\cos C + i \sin C)}$ 為實數，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $\triangle ABC$ 必為何種三角形？

(A) 等腰三角形 (B) 銳角三角形 (C) 直角三角形 (D) 鈍角三角形 【108C17】

Ans : (C)

$$\text{原式} = \cos(B-A-C) + i \sin(B-A-C)$$

$\therefore$ 原式為實數

$$\therefore \sin(B-A-C) = 0$$

$$B-A-C = 0 \rightarrow B = A+C$$

$$\text{又 } A+B+C = 180^\circ \rightarrow A+C = 180^\circ - B$$

$$\text{故得 } B = 180^\circ - B \rightarrow 2B = 180^\circ \rightarrow B = 90^\circ$$

$\triangle ABC$ 必為直角 $\triangle$

已知 $O(0,0)$ 、 $P(-3,4)$ 與 $Q(x,y)$ 為坐標平面上三點。若以 O 為圓心， $\overline{OP}$ 為半徑，逆時針方向轉動 30° 後， P 點與 Q 點重疊，則下列何者正確？

(A) $x = \frac{-3\sqrt{3}-4}{2}$ (B) $x = \frac{-3\sqrt{3}+4}{2}$ (C) $y = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}$ (D) $y = \frac{4\sqrt{3}+3}{2}$ 【108C24】

Ans : (A)

設 $P = -3 + 4i$ 複數相乘 + 角度相加 (逆時針)

則 $Q = (-3 + 4i)(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

$$= (-3 + 4i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{4\sqrt{3}}{2}i - \frac{4}{2}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$= \left(\frac{-3\sqrt{3}-4}{2}\right) + \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{2}\right)i$$

$$\therefore x = \frac{-3\sqrt{3}-4}{2}, \quad y = \frac{4\sqrt{3}-3}{2}$$

已知 $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，且 $\bar{z}$ 為其共軛複數。若 $\frac{1+z}{1+\bar{z}} = a+bi$ ，其中 a, b 為實數，則點 (a, b) 在第幾象限？

(A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

【107C11】

Ans : (D)

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ a+bi &= \frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)}{\cancel{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)} \\ &= \frac{\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ}{\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ} \\ &= \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ \end{aligned}$$

故 $a > 0, b < 0$

$(a, b) \rightarrow (+, -)$ 在第四象限
✱

若 $\tan 19^\circ = a$ ，則 $\sin 2018^\circ = ?$

- (A) $\frac{-2}{1+a^2}$ (B) $\frac{-2a}{1+a^2}$ (C) $\frac{a}{1+a^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

【107C21】

Ans : (B)

$$\sin 2018 = \sin 218^\circ$$

$$= \sin(180^\circ + 38^\circ)$$

$$= -\sin 38^\circ$$

$$= -2 \sin 19^\circ \cos 19^\circ$$

$$= -2 \cdot \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$= \frac{-2a}{1+a^2}$$

$$\begin{array}{r} 2018 \\ -1800 \\ \hline 218 \end{array}$$



設 $f(x) = 4\sin x + \cos(2x) + 7$ 的最小值為 m ，最大值為 M ，則 $m + M = ?$

(A) -7 (B) 1 (C) 12 (D) 21

【107C22】

Ans : (C)

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sin x + 1 - 2\sin^2 x + 7 \\ &= -2\sin^2 x + 4x + 8 \\ &= -2(\sin^2 x - 2x + 1) + 8 + 2 \\ &= -2(\sin x - 1)^2 + 10 \end{aligned}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

① $\sin x = 1$ 時得 $M = 10$

② $\sin x = -1$ 時得 $m = (-2) \times 4 + 10 = 2$

故 $m + M = 2 + 10 = 12$ *

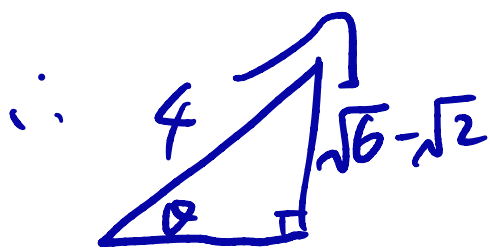
若 $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 則 $\tan 2\theta = ?$

- (A) $2-\sqrt{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

【106C04】

Ans : (C)

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ 且 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$



$$\sqrt{4^2 - (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+2\sqrt{12}} = \sqrt{6+\sqrt{2}}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $6+2 \quad 6 \times 2$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{8-2\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

$$\text{故 } \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1 - (2-\sqrt{3})^2}$$
$$= \frac{2(2-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}-6} = \frac{\cancel{2}(2-\sqrt{3})}{\cancel{2}\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad *$$

*其實 $\sin \theta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 且 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 即知 $\theta = 15^\circ$

$$\text{故 } \tan 2\theta = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad *$$

設 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ，則 $\frac{\omega^{107}}{\omega+1} = ?$

(A) -1 (B) $-\omega$ (C) ω^2 (D) 1

【106CII】

Ans : (A)

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$$

$$\omega^3 = (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)^3 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$$

$$\boxed{\omega^3 = 1} \rightarrow \omega^3 - 1 = 0 \rightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$$\because \omega \neq 1 \therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0 \rightarrow \boxed{\omega^2 + \omega = -1}$$

$$\frac{\omega^{107}}{\omega+1} = \frac{\omega^2 \cdot (\omega^3)^{35}}{\omega+1} = \frac{\omega^2}{\omega+1} \times \frac{\omega}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega^2 + \omega} = \frac{1}{-1} = -1$$

若 $f(x) = \sec^2 \frac{x}{2} + \csc^2 \frac{x}{2}$ 的週期為 P ，求 P 之值。

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) π^2

【105C02】

Ans : (B)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \times \frac{4}{4} \\ &= \frac{4}{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{\sin^2 x} \\ &= 4 \csc^2 x \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

設 $a = \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ$ ， $b = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ ，則 $a+b$ 之值為何？

- (A) $-\frac{1}{4}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

【105C05】

Ans : (B)

$$\begin{aligned} a+b &= \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ + \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \\ &= \cos 40^\circ (\cos 80^\circ \cos 160^\circ + \sin 10^\circ \cos 20^\circ) \\ &= \cos 40^\circ \cdot \left[\cancel{\sin 10^\circ} \cdot \cancel{(-\cos 20^\circ)} + \cancel{\sin 10^\circ} \cos 20^\circ \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

已知 $z_1 = \sqrt{3} + i$ ， $z_2 = 1 + i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $z_1^2 z_2^4$ 可表示為下列哪一個？

(A) $16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$

(B) $16(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$

(C) $16(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

(D) $16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

【105CII】

Ans : (A)

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

$$z_1^2 = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$z_2^4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$$

$$z_1^2 z_2^4 = 16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) \quad *$$

若 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ ，則 $\sqrt{2 - 2\cos 2\theta} = ?$

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【104C07】

Ans : (C)

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2 \times \frac{1}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

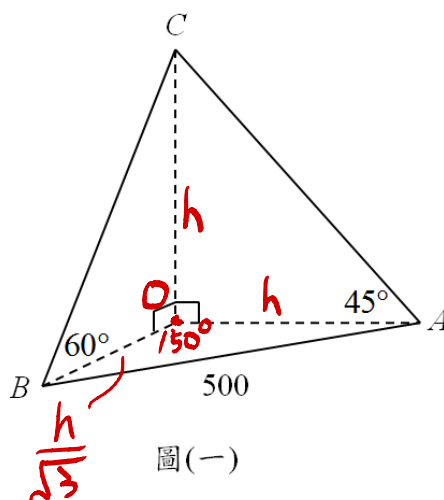
$$\text{原式} = \sqrt{2 - 2 \times \frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{18}{9} - \frac{14}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad *$$

今有人預測一山的高度，當此人在此山的正東方一點 A ，測得山頂 C 的仰角為 45° ，又當他在山的南 60° 西方向一點 B ，測得山頂 C 的仰角為 60° ，如圖(一)所示。若 A 、 B 兩點相距 500 公尺，則此山高 h 為多少公尺？

(A) $\frac{500}{3}\sqrt{3}$ (B) $\frac{500}{7}\sqrt{21}$

(C) $\frac{500}{3}\sqrt{21}$ (D) $500\sqrt{3}$

Ans : (B)



【104C15】

依題意得知 $\angle AOB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

而 $\overline{OA} = h$ ， $\overline{OB} = \frac{h}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \cos 150^\circ &= -\cos 30^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } 500^2 &= h^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \times h \times \frac{h}{\sqrt{3}} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= h^2 + \frac{1}{3}h^2 + h^2 \\ &= \frac{7}{3}h^2 \end{aligned}$$

$$h^2 = \frac{3}{7} \times 500^2 \rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{7}} \times 500 = \frac{500}{7}\sqrt{21} *$$

設 $\sin(-45^\circ) \cdot \sin 15^\circ = k - \cos 45^\circ \cdot \cos(-15^\circ)$ ，則 k 之值為何？

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【103C08】

Ans : (B)

$$\begin{aligned} k &= \sin(-45^\circ)\sin 15^\circ + \cos 45^\circ \cos(-15^\circ) \\ &= -\sin 45^\circ \sin 15^\circ + \cos 45^\circ \cos 15^\circ \\ &= \cos 45^\circ \cos 15^\circ - \sin 45^\circ \sin 15^\circ \\ &= \cos(45^\circ + 15^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

設 $z = \frac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}$ ， $i = \sqrt{-1}$ ，則 $|z|$ 之值為何？

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 13

【103C16】

Ans : (A)

$$|5-12i| = 13, \quad |3+4i| = 5$$

$$|4-3i| = 5, \quad |12-5i| = 13$$

$$|z| = \frac{13 \times 5}{5 \times 13} = 1 \quad \times$$

設 $z_1 = \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)^4$ ， $z_2 = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^2$ ，則 $\frac{z_1}{z_2}$ 之值為何？

(A) -1 (B) i (C) 0 (D) 1

【103C17】

Ans : (D)

$$z_1 = \cos \frac{20\pi}{3} + i \sin \frac{20\pi}{3}$$

$$z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos \left(\frac{20\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{20\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= \cos 6\pi + i \sin 6\pi$$

$$= 1 + 0i$$

$$= 1$$

已知 a, b 為實數， $i = \sqrt{-1}$ 。若 $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^8 = a+bi$ ，則 $a^2+b^2 = ?$

(A) 16 (B) 64 (C) 256 (D) 1024

【102C17】

Ans : (C)

$$\frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)} = \frac{2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)}$$

$$= \sqrt{2}[\cos(-15^\circ) + i \sin(-15^\circ)]$$

$$a+bi = \left\{ \sqrt{2}[\cos(-15^\circ) + i \sin(-15^\circ)] \right\}^8$$

$$= 16[\cos(-120^\circ) + i \sin(-120^\circ)]$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= -8 - 8\sqrt{3}i$$

$$\begin{aligned} \cos(-120^\circ) &= \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \\ \sin(-120^\circ) &= -\sin 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$a = -8, b = -8\sqrt{3} \rightarrow a^2 + b^2 = 64 + 192 = 256$$

若 $2+3\cos 2\theta=0$ ，則 $\sin^4\theta-\cos^4\theta=?$

- (A) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【102C18】

Ans : (C)

$$2+3\cos 2\theta=0 \rightarrow \cos \theta = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2 \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta) \\ &= \sin^2\theta - \cos^2\theta \\ &= -(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= -\cos 2\theta \\ &= \frac{2}{3} \quad \times\end{aligned}$$

已知 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ， $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ，則下列大小關係何者正確？

(A) $\cos \theta < \sin 2\theta < \cos 2\theta < \sin \theta$ (B) $\sin 2\theta < \cos 2\theta < \cos \theta < \sin \theta$

(C) $\sin 2\theta < \cos \theta < \cos 2\theta < \sin \theta$ (D) $\cos \theta < \cos 2\theta < \sin 2\theta < \sin \theta$

【101C23】

Ans : (C)

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5} \rightarrow \begin{array}{c} \text{5} \\ \nearrow \\ \theta \\ \searrow \\ -3 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \uparrow \\ \text{ } \end{array} \rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

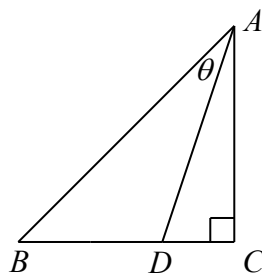
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\therefore -\frac{24}{25} < -\frac{3}{5} = -\frac{15}{25} < -\frac{7}{25} < \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin 2\theta < \cos \theta < \cos 2\theta < \sin \theta$$

已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 在 $\overline{BC}$ 線段上，且線段長 $\overline{BD} = 2$ ， $\overline{DC} = 1$ ， $\overline{AC} = 3$ ，如圖(三)所示。令 $\angle BAD = \theta$ ，求 $\cos \theta = ?$

- (A) $\frac{1}{\sqrt{10}}$
 (B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
 (C) $\frac{2}{\sqrt{10}}$
 (D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$



圖(三)

【100C13】

Ans : (D)

$$\overline{AC} = \overline{BD} + \overline{DC} \rightarrow \triangle ABC \text{ 為等腰直角} \triangle$$

$$\rightarrow \theta + \angle DAC = 45^\circ$$

$$\theta = 45^\circ - \angle DAC$$

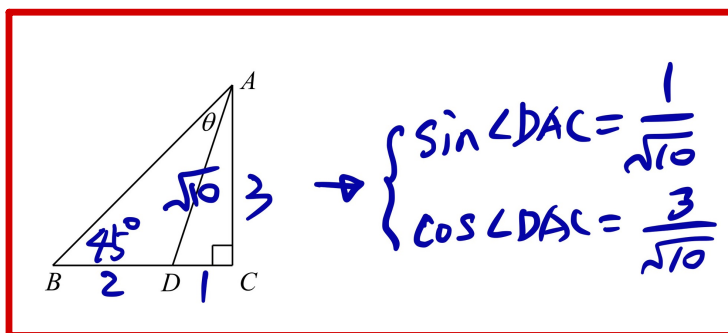
$$\cos \theta = \cos (45^\circ - \angle DAC)$$

$$= \cos 45^\circ \cos \angle DAC + \sin 45^\circ \sin \angle DAC$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$



判斷下列各數值中，何者小於0？(參考公式： $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$)

(A) $\cos 100^\circ - \sin 2011^\circ$

(B) $\cos^2 100^\circ - \sin^2 100^\circ$

(C) $\cos^2 2011^\circ - \sin^2 2011^\circ$

(D) $\cos 100^\circ \cos 2011^\circ - \sin 100^\circ \sin 2011^\circ$

【100C14】

Ans : (B)

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \cos 100^\circ - \sin 211^\circ \\ &= \cos(90^\circ + 10^\circ) - \sin(180^\circ + 31^\circ) \\ &= -\sin 10^\circ + \sin 31^\circ > 0 \quad (\because \sin 31^\circ > \sin 10^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2011^\circ \\ - 1800^\circ \\ \hline 211^\circ \end{array}$$

$$\text{(B)} \quad \cos^2 100^\circ - \sin^2 100^\circ = \cos 200^\circ = -\cos 20^\circ < 0$$

$$\begin{aligned} \text{(C)} \quad & \cos^2 2011^\circ - \sin^2 2011^\circ \\ &= \cos^2 211^\circ - \sin^2 211^\circ \\ &= \cos 422^\circ \\ &= \cos 62^\circ > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2111^\circ \\ - 1800^\circ \\ \hline 311^\circ \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad \text{原式} &= \cos(100^\circ + 2011^\circ) \\ &= \cos 2111^\circ \\ &= \cos 311^\circ > 0 \end{aligned}$$

已知 $i = \sqrt{-1}$ 。若 $z = \cos 78^\circ + i \sin 78^\circ$ ，則 $z^{15} = ?$

- (A) $-i$ (B) -1 (C) i (D) 1

【100C22】

Ans : (C)

$$z = (\cos 78^\circ + i \sin 78^\circ)^{15}$$

$$= \cos 1170^\circ + i \sin 1170^\circ$$

$$= \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$$

$$= 0 + i$$

$$= i$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 78 \\ \hline 120 \\ 105 \\ \hline 1170 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1170 \\ - 1080 \\ \hline 90 \end{array}$$

求函數 $f(x) = (\cos x + 3\sin x)(\cos x - \sin x)$ 之最小值為何？

- (A) $-2\sqrt{5}$ (B) -4 (C) $-\frac{7}{2}$ (D) $-\sqrt{5}-1$

【99C25】

Ans : (D)

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x - \sin x \cos x + 3 \sin x \cos x - 3 \sin^2 x \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \sin 2x - 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \\ &= \sin 2x + 2 \cos 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore -\sqrt{5} \leq \sin 2x + 2 \cos 2x \leq \sqrt{5}$$

$$\therefore \underline{-\sqrt{5}-1} \leq \sin 2x + 2 \cos 2x - 1 \leq \sqrt{5}-1$$

設 $ABCD$ 為一矩形，且 $\overline{BC} = 3\overline{AB}$ 。令 P 點與 Q 點為 $\overline{BC}$ 上之點，且 $\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$ ，如圖

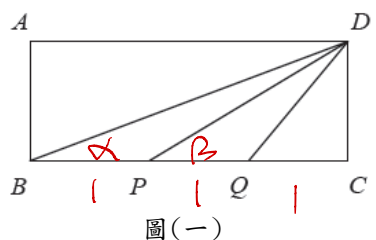
(一)。若 $\angle DBC = \alpha$ ，且 $\angle DPC = \beta$ ，則 $\tan(\alpha + \beta)$ 之值為何？

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(B) $2 - \sqrt{3}$

(C) 1

(D) $2 + \sqrt{3}$



【98C02】

Ans : (C)

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \beta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2 + 3}{6 - 1} \\ &= \frac{5}{5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

已知 $i = \sqrt{-1}$ ，化簡 $(\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7})(\cos \frac{10\pi}{21} + i \sin \frac{10\pi}{21}) = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (B) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (C) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

【98C09】

Ans : (B)

$$\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7} = \cos(-\frac{\pi}{7}) + i \sin(-\frac{\pi}{7})$$

$$\text{原式} = \left[\cos(-\frac{\pi}{7}) + i \sin(-\frac{\pi}{7}) \right] \left(\cos \frac{10\pi}{21} + i \sin \frac{10\pi}{21} \right)$$

$$= \cos\left(\frac{10\pi}{21} - \frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{10\pi}{21} - \frac{\pi}{7}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ch09_指數與對數

溶液酸鹼度的公式為 $\text{pH} = -\log[H^+]$ ，其中 $[H^+]$ 為溶液中的氫離子濃度(單位：莫耳/升)。

圖為雨季中某日 24 小時內酸雨檢測站雨水 pH 值與時間之圖形。若當日檢測到氫離子濃度最小值為 a ，則當日氫離子濃度最大值約為多少？

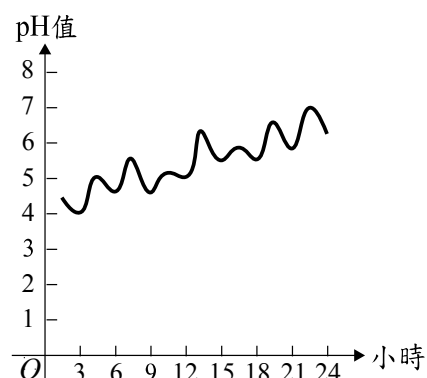
(A) $1.5a$

(B) $3a$

(C) $100a$

(D) $1000a$

【114C06】



Ans : (D)

由圖得知

$$\begin{aligned}\text{pH} = 7 &= -\log[H^+] \rightarrow [H^+] = 10^{-7} \\ &\rightarrow a = 10^{-7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{pH} = 4 &= -\log[H^+] \rightarrow [H^+] = 10^{-4} \\ &= 10^3 \times 10^{-7} \\ &= 1000a\end{aligned}$$

~~✗~~

在某金屬容器中放置質量 1 公克的放射性物質 A 。經過 x 年後，該容器中的物質 A 質量剩下 $f(x)$ 公克。已知 $f(x)$ 滿足關係式： $f(x)=a^x$ ，其中 $a>0$ 、 $a\neq 1$ ，且經過 T 年後，物質 A 質量剩下 $\frac{1}{2}$ 公克，試問下列敘述何者正確？

- (A) 經過 $4T$ 年後，物質 A 所剩質量大於 $\frac{1}{10}$ 公克
(B) 經過 $6T$ 年後，物質 A 所剩質量大於 $\frac{1}{50}$ 公克
(C) 經過 $8T$ 年後，物質 A 所剩質量少於 $\frac{1}{500}$ 公克
(D) 經過 $10T$ 年後，物質 A 所剩質量少於 $\frac{1}{1000}$ 公克

【114C16】

Ans : (D)

$$\therefore a^T = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (A) \quad a^{4T} = (a^T)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$$

$$(B) \quad a^{6T} = (a^T)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} < \frac{1}{50}$$

$$(C) \quad a^{8T} = (a^T)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} > \frac{1}{500}$$

$$(D) \quad a^{10T} = (a^T)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000} \text{ 正確}$$

若 $\log x = -2.24$ ， $\log y = 9.28$ ，則 x^2y 落在下列哪個區間？

- (A) $(10^3, 10^4)$ (B) $(10^4, 10^5)$ (C) $(10^5, 10^6)$ (D) $(10^6, 10^7)$

【113C16】

Ans : (B)

$$\log x = -2.24 \rightarrow x = 10^{-2.24}$$
$$\rightarrow x^2 = (10^{-2.24})^2 = 10^{-4.48}$$

$$\log y = 9.28 \rightarrow y = 10^{9.28}$$

$$x^2y = 10^{-4.48} \times 10^{9.28}$$

$$= 10^{9.28 - 4.48}$$

$$= 10^{4.8} \rightarrow 10^4 < 10^{4.8} < 10^5$$

即 x^2y 落在區間 $(10^4, 10^5)$ ~~*~~

根據建築物之耐震規範，某類鋼構造建築物之基本振動週期 T (單位為秒) 之經驗公式為

$T = 0.085h^{\frac{3}{4}}$ ，其中 h 為地面到屋頂之高度(單位為公尺)。若 A 、 B 為兩棟屬於這類的鋼構造建築物，已知 A 的基本振動週期為 B 的 2 倍，且 B 的高度為 100 公尺，則 A 的高度約多少公尺？($\sqrt[3]{2} \approx 1.260$)

(A) 159 (B) 168 (C) 252 (D) 283

【113C22】

Ans : (C)

$$T_A = 2T_B$$
$$\cancel{0.085} \left(h_A^{\frac{3}{4}} \right) = \left(\cancel{2 \times 0.085 \times 100^{\frac{3}{4}}} \right)^{\frac{4}{3}}$$

$$h = 2^{\frac{4}{3}} \times 100$$

$$= 2 \sqrt[3]{2} \times 100$$

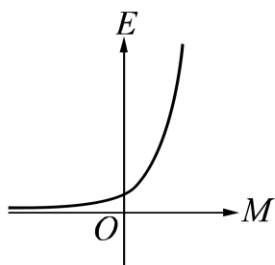
$$\approx 2 \times \underline{1.260} \times 100$$

$$= 252 \text{ (公尺)} \quad \times$$

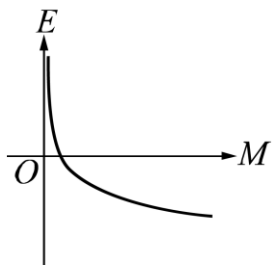
目前國際上使用芮氏規模來表示地震的強度，設 E (單位：爾格) 為地震芮氏規模 M 時所釋放出來的能量，其中 M 與 E 的關係如下： $\log E = 11.8 + 1.5M$ ，則芮氏規模 M 與所釋放出來的能量 E 的關係圖為何？

【112C19】

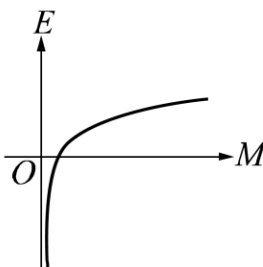
(A)



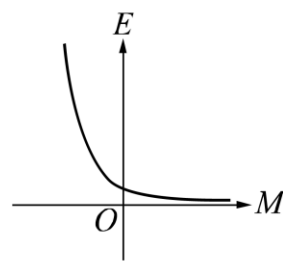
(B)



(C)



(D)



Ans : (A)

$$E = 10^{11.8 + 1.5M} = 10^{11.8} \times 10^{1.5M} \rightarrow \text{選 (A)}$$

若 $x = \log_3 7$ ，則下列何者正確？

- (A) $7^x = 3$ (B) $3^x = 7$ (C) $x^7 = 3$ (D) $x^3 = 7$

【111C01】

Ans : (B)

$$x = \log_3 7 \rightarrow 3^x = 7$$

為了響應節能減碳政策，某公司基於成本考量決定在六年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的 50%。公司希望每年依固定的比率 r (當年和前一年排放量的比) 逐年降低二氧化碳的排放量。若要達到這目標，則下列敘述何者正確？($\log 0.5 \approx -0.3010$ 、 $\log 8.91 \approx 0.950$)
(A) $0.91 < r < 0.93$ (B) $0.88 < r < 0.91$ (C) $0.85 < r < 0.88$ (D) $0.82 < r < 0.85$ 【111C21】

Ans : (B)

$$\cancel{A} \cdot r^6 \approx \cancel{A} \cdot 50\%$$

$$r^6 \approx \frac{1}{2}$$

$$\log r^6 \approx \log \frac{1}{2} = \log 0.5 \approx -0.301$$

$$6 \log r \approx -0.301$$

$$\log r \approx -\frac{0.301}{6} \approx -0.05 = \underline{0.95 - 1}$$

$$\text{Ex } \log r \approx \underline{\log 8.91 - \log 10} = \log \frac{8.91}{10} = \log 0.891$$

$$r \approx 0.891 \rightarrow 0.88 < r < 0.91 \quad \#$$

設 $I(t)$ 為 A 城市某種傳染病在時間 t 的感染率，且 $I(t) = \frac{1}{1+49(7^{\frac{-t}{3}})}$ ， $t \geq 0$ 。若 a 、 b 、 c 分別

表示 $t=0$ 、 $t=3$ 、 $t=6$ 時的感染率，則下列何者正確？

- (A) $b=6a$ (B) $c=20a$ (C) $c=4b$ (D) $b=7a$

【110C07】

Ans : (C)

$$a = \frac{1}{1+49} = \frac{1}{50}$$

$$b = \frac{1}{1+49 \times 7^{-1}} = \frac{1}{1+7} = \frac{1}{8}$$

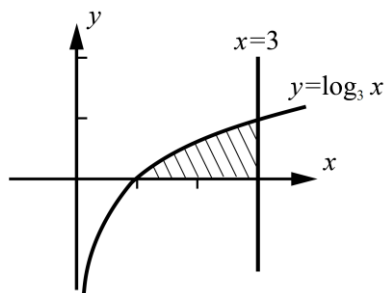
$$c = \frac{1}{1+49 \times 7^{-2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

} $c=4b$ #

假設 A 表函數 $y = \log_3 x$ 圖形與直線 $y=0$ 、 $x=3$ 所圍區域面積，如圖。若以幾何圖形的觀念來判斷 A 的大小範圍，則下列何者正確？

- (A) $0 \leq A < \frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2} \leq A < 1$ (C) $1 \leq A < 2$ (D) $A \geq 2$

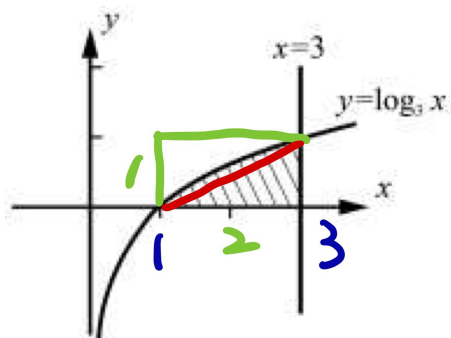
Ans : (C)



【110C25】

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \leq A \leq 2 \times 1$$

$$1 \leq A \leq 2$$



保險公司推出躉繳型保單(即於一開始存入一固定本金)，且宣告年利率為 3% 的複利，每年計算一次。若某人於 20 歲時，花 10 萬元購買此保單，則當保單價值達 20 萬元時，某人約幾歲？($\log_{10} 1.03 \approx 0.0128$ ， $\log_{10} 1.3 \approx 0.1139$ ， $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$)

(A) 24 (B) 34 (C) 44 (D) 54

【109C12】

Ans : (C)

$$100000 \times (1+3\%)^n \geq 200000$$

$$(1.03)^n \geq 2$$

$$n \log 1.03 \geq \log 2$$

$$n \geq \frac{0.301}{0.0128} \approx 23.5$$

$$\text{取 } n = 24$$

$$\text{故 } 20 + 24 = 44 \text{ (歲)} \quad \#$$

滿足 $\log_{10-x^2}(x^2+3x+2)$ 有意義的整數 x 共有多少個？

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7

【109C16】

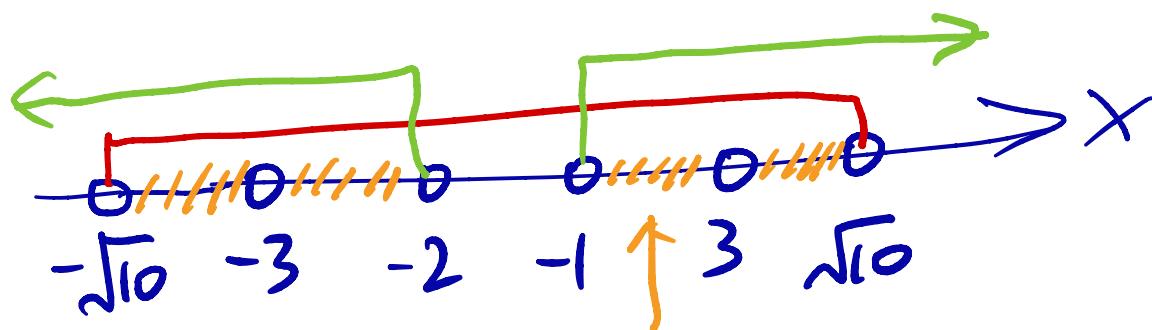
Ans : (A)

$$\textcircled{1} 10 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 - 10 < 0 \rightarrow -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$$

$$\textcircled{2} 10 - x^2 \neq 1 \rightarrow x^2 \neq 9 \rightarrow x \neq \pm 3$$

$$\textcircled{3} x^2 + 3x + 2 > 0 \rightarrow (x+1)(x+2) > 0$$

$$\begin{array}{c} +1 \\ | \times +2 \end{array} \rightarrow x < -2 \text{ 或 } x > -1$$



0, 1, 2

共 3 個

若 $3 < \log_{0.5}(2x+1) < 4$ ，則 x 的範圍為何？

- (A) $-\frac{3}{8} < x < -\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{7}{16} < x < -\frac{3}{8}$ (C) $-\frac{15}{32} < x < -\frac{7}{16}$ (D) $-\frac{31}{64} < x < -\frac{15}{32}$ 【108C02】

Ans : (C)

$$2x+1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{2} \text{ --- ①}$$

$$\log_{0.5} (0.5)^3 < \log_{0.5} (2x+1) < \log_{0.5} (0.5)^4$$

$$\because 0 < 0.5 < 1$$

$$\therefore (0.5)^3 > (2x+1) > (0.5)^4$$

$$\frac{1}{8} > 2x+1 > \frac{1}{16}$$

$$\rightarrow \frac{1}{16} < 2x+1 < \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow -\frac{15}{16} < 2x < -\frac{7}{8}$$

$$\rightarrow -\frac{15}{32} < x < -\frac{7}{16} \text{ --- ②}$$

$$\text{由①, ② 得 } -\frac{15}{32} < x < -\frac{7}{16} *$$

若 $x = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 9}$ ，則 $81^x = ?$

(A) 3 (B) 7 (C) 25 (D) 49

【107C12】

Ans : (D)

$$x = \log_9 7 \rightarrow 9^x = 7$$

$$81^x = (9^2)^x = (9^x)^2 = 7^2 = 49$$

設 $a = \log_{0.3} 0.5$ 、 $b = \log_3 5$ 、 $c = \log_{30} 50$ ，則 a 、 b 、 c 大小順序為何？

- (A) $c > b > a$ (B) $b > a > c$ (C) $b > c > a$ (D) $a > b > c$

【107C23】

Ans : (C)

$$\begin{aligned} a &= \frac{\log 0.5}{\log 0.3} = \frac{\log 5 - \log 10}{\log 3 - \log 10} = \frac{\log 5 - 1}{\log 3 - 1} \\ &= \frac{0.699 - 1}{0.4771 - 1} = \frac{-0.301}{-0.5229} = \frac{3010}{5229} \div 0.57 \end{aligned}$$

$$b = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{0.699}{0.4771} = \frac{6990}{4771} \div 1.46 \dots$$

$$c = \frac{\log 50}{\log 30} = \frac{\log 5 + \log 10}{\log 3 + \log 10} = \frac{\log 5 + 1}{\log 3 + 1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{0.6990 + 1}{0.4771 + 1} = \frac{1.6990}{1.4771} = \frac{16990}{14771} \\ &\div 1.17 \end{aligned}$$

故 $b > c > a$ ✕

設 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ， $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ ， $c = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$ ，則 a 、 b 、 c 的大小順序為何？

(A) $a > c > b$ (B) $a > b > c$ (C) $c > a > b$ (D) $b > c > a$

【106C14】

Ans : (C)

$$a^{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$b^{12} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

$$c^{12} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\therefore c^{12} > a^{12} > b^{12}$$

$$\therefore c > a > b$$

已知 $\log_{10} 3 = 0.4771$ 且 $x = (\frac{1}{3})^{20}$ ，其中 $\log_{10} x$ 的首數為 m ，而尾數的小數點後第一位數字為 n ，則 $m+n = ?$

(A) -9 (B) -7 (C) -6 (D) -5

【106C15】

Ans : (C)

$$\begin{aligned}x &= 3^{-20} \rightarrow \log x = -20 \log 3 \\&= (-20) \times 0.4771 \\&= -9.542 \\&= -10 + \underline{0.458}\end{aligned}$$

$$m = -10, n = \underline{4}$$

題目問的
是這個數字!

$$\begin{aligned}\text{故 } m+n &= (-10) + 4 \\&= -6\end{aligned}$$

已知 $\log_{10} 2 = p$, $\log_{10} 3 = q$, 求 $\log_{\sqrt{6}} 36 - \log_{\frac{1}{6}} 6 + \log_6 \sqrt{12}$ 之值。

- (A) $5 + \frac{2p+q}{2p+2q}$ (B) $3 + \frac{2p+q}{2p+2q}$ (C) $3 + \frac{2p+q}{2p-2q}$ (D) $5 + \frac{2p+q}{2p-2q}$

【105C14】

Ans : (A)

$$\log_{\sqrt{6}} 36 = \log_{6^{\frac{1}{2}}} 6^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_6 6 = 4$$

$$\log_{\frac{1}{6}} 6 = \log_{6^{-1}} 6 = \frac{1}{-1} \log_6 6 = -1$$

$$\log_6 \sqrt{12} = \frac{\log 12^{\frac{1}{2}}}{\log 6} = \frac{\frac{1}{2} [\log(2^2 \times 3)]}{\log(2 \times 3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} (2 \log 2 + \log 3)}{\log 2 + \log 3} = \frac{2p+q}{2p+2q}$$

$$\text{原式} = 4 - (-1) + \frac{2p+q}{2p+2q}$$

$$= 5 + \frac{2p+q}{2p+2q} \quad \times$$

設 $a = (0.1)^{\frac{1}{4}}$ ， $b = (0.2)^{\frac{1}{4}}$ ， $c = (0.2)^{\frac{1}{5}}$ ，則下列何者正確？

- (A) $a < b < c$ (B) $c < a < b$ (C) $b < a < c$ (D) $b < c < a$

【105C15】

Ans : (A)

$$\begin{aligned} a^4 &= 0.1 \\ b^4 &= 0.2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a^4 < b^4 \rightarrow a < b$$

$$\begin{aligned} b^{20} &= (0.2)^5 = (0.2)^4 \times \underbrace{0.2}_{\text{小於 } 1} < (0.2)^4 \\ c^{20} &= (0.2)^4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad b^4 < c^4 \rightarrow b < c$$

故 $a < b < c$ #

已知 m 、 n 為整數，若 $m \log_{500} 5 + n \log_{500} \sqrt{2} = 1$ ，則 $m+n = ?$

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

【104C14】

Ans : (A)

$$\log_{500} 5^m + \log_{500} (\sqrt{2})^n = \log_{500} 500$$

$$\log_{500} (5^m \times 2^{\frac{n}{2}}) = \log_{500} 500 = \log_{500} (5^3 \times 2^2)$$

$$5^m \times 2^{\frac{n}{2}} = 5^3 \times 2^2$$

$$\text{故 } \begin{cases} m=3 \\ \frac{n}{2}=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=4 \end{cases}$$

$$m+n = 3+4 = 7 \quad \times$$

已知 a 、 b 為實數，且 $3^a = 5$ ， $5^b = 9$ ，則 $ab = ?$

- (A) $\log_{15} 45$ (B) $\log_3 5$ (C) 2 (D) 3

【104C23】

Ans : (C)

$$3^a = 5 \rightarrow \log_3 5 = a$$

$$5^b = 9 \rightarrow \log_5 9 = b$$

$$ab = \log_3 5 \times \log_5 9 = \log_3 9 = 2 \quad \times$$

設 $\left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{1}{70}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^b = \frac{1}{2500}$, $\left(\frac{1}{8}\right)^c = \frac{1}{216000}$, 則 a 、 b 、 c 三個數的大小關係為何？

- (A) $b < c < a$ (B) $c < b < a$ (C) $c < a < b$ (D) $a < b < c$

【103C11】

Ans : (A)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{1}{70}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^b = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^b = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^b\right]^2 = \frac{1}{2500} = \left(\frac{1}{50}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^b = \frac{1}{50}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^c = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^c = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^c\right]^3 = \frac{1}{216000} = \left(\frac{1}{60}\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^c = \frac{1}{60}$$

$$\because \frac{1}{50} > \frac{1}{60} > \frac{1}{70} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^b > \left(\frac{1}{2}\right)^c > \left(\frac{1}{2}\right)^a$$

$$\text{又 } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\therefore b < c < a \quad \#$$

化簡 $\frac{2 + \log_{10} 4 - \frac{1}{3} \log_{10} 216 + \frac{1}{4} \log_{10} 625 + \frac{1}{5} \log_{10} 243}{1 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{6}{5} + \log_2 \frac{7}{6} + 3 \log_8 \frac{8}{7} + 2 \log_4 \frac{9}{8} - \log_4 9}$ 得其值為何？

- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) 3

【103C23】

Ans : (D)

$$\begin{aligned} 216 &= 6^3 & 625 &= 5^4 \\ 216^{\frac{1}{3}} &= 6 & 625^{\frac{1}{4}} &= 5 & 243 &= 3^5 \\ & & & & 243^{\frac{1}{5}} &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{分子} = \log_{10} 100 + \log_{10} 4 - \log_{10} 6 + \log_{10} 5 + \log_3 3$$

$$= \log_{10} \frac{100 \times \cancel{4} \times 5 \times \cancel{3}}{\cancel{6}} = \log_{10} 1000 = 3$$

$8^{\frac{1}{3}} = 2$ $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$$\text{分母} = \log_2 2 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{6}{5} + \log_2 \frac{7}{6} + \log_2 \frac{8}{7} + \log_2 \frac{9}{8} - \log_2 3$$

$$= \log_2 \left(2 \times \cancel{\frac{5}{3}} \times \cancel{\frac{6}{5}} \times \cancel{\frac{7}{6}} \times \cancel{\frac{8}{7}} \times \cancel{\frac{9}{8}} \times \cancel{\frac{1}{3}} \right)$$

$$= \log_2 2$$

$$= 1$$

$$\uparrow -\log_2 3 = +\log_2 \frac{1}{3}$$

$$\text{故原式} = \frac{3}{1} = 3 \quad \#$$

若 $3^{x+2} = 3^x + 24\sqrt{3}$ ，則 $x = ?$

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) (D) 2

【102C03】

Ans : (C)

$$3^{x+2} = 3^2 \times 3^x = 9 \times 3^x$$

$$9 \times 3^x = 3^x + 24\sqrt{3}$$

$$\cancel{8} \times 3^x = \overset{3}{\cancel{24}} \sqrt{3}$$

$$3^x = 3^1 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{1+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \frac{3}{2} \quad \#$$

已知 $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ 。若 $a^5 = b^3$, 則 $\log_a b = ?$

- (A) $-\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$

【102C04】

Ans : (D)

$$a^5 = b^3 \rightarrow \log_a a^5 = \log_a b^3$$

$$\rightarrow 5 = 3 \log_a b$$

$$\rightarrow \log_a b = \frac{5}{3} \quad \#$$

下列何者與 $\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \log 5 - \log 6$ 的值最為接近？

(已知 $\log 2$ 的值約為 0.301，而 $\log 3$ 的值約為 0.4771)

(A) 0.1 (B) 1.5 (C) 5.3 (D) 6.2

【101C05】

Ans : (B)

$$\text{原式} = \log \frac{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 4 \times 5}{\cancel{6}}$$

$$= \log 20$$

$$= \log 10 + \log 2$$

$$\doteq 1 + 0.301 = 1.301 \rightarrow (B)$$

已知 $y = 2^x$ 的圖形通過圓 $C: x^2 + y^2 - 2ay = 0$ 之圓心。若圓 C 與直線 $L: y = \frac{3x+k}{4}$ 相切，求

$\log_2 a + \log_5 (k-4)^2$ 之值為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【101C20】

Ans : (B)

$$C: x^2 + (y^2 - 2ay + a^2) = a^2$$

$$\rightarrow x^2 + (y-a)^2 = a^2$$

$$\rightarrow O(0, a), r = \underline{a} \quad (\because \log_2 a \therefore a > 0)$$

$$y = 2^x \text{ 通過 } O(0, a) \rightarrow a = 2^0 = 1 \rightarrow r = 1$$

$$\log_2 a = \log_2 1 = 0$$

$$L: 4y = 3x + k \rightarrow 3x - 4y + k = 0$$

$$d(O, L) = \frac{|0 - 4 + k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 1 \rightarrow |k - 4| = 5$$

$$\log_5 (k-4)^2 = \log_5 25 = 2$$

$$\text{故所求} = 0 + 2 = 2 \quad \times$$

若 $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[5]{64} = 4^a$ ，則 $a = ?$

- (A) $\frac{19}{20}$ (B) $\frac{29}{30}$ (C) $\frac{19}{10}$ (D) $\frac{29}{15}$

【100C01】

Ans : (A)

$$4^a = (2^2)^a = 2^{2a}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[5]{64} &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot (2^3 \cdot 2^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot (2^{\frac{21}{5}})^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{7}{5}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{7}{5}} = 2^{\frac{19}{10}}\end{aligned}$$

$$2^{2a} = 2^{\frac{19}{10}} \rightarrow 2a = \frac{19}{10} \rightarrow a = \frac{19}{20} *$$

求 $\log_{\sqrt{2}} \frac{3}{2} - \log_2 \frac{27}{160\sqrt{2}} + \log_4 \frac{36}{25} = ?$

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{11}{2}$

【100C24】

Ans : (C)

$$\log_{(\sqrt{2})^2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \log_2 \frac{9}{4}$$

$$\log_4 \frac{36}{25} = \log_{2^2} \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \log_2 \frac{6}{5}$$

$$\text{原式} = \log_2 \frac{9}{4} - \log_2 \frac{27}{160\sqrt{2}} + \log_2 \frac{6}{5}$$

$$= \log_2 \left(\frac{9}{4} \times \frac{160\sqrt{2}}{27} \times \frac{6}{5} \right)$$

$$= \log_2 16\sqrt{2}$$

$$= \log_2 (2^4 \times 2^{\frac{1}{2}})$$

$$= \log_2 2^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2} *$$

設 p 與 q 為方程式 $\log_9(10x^2-6x+5)-\log_3 x-1=0$ 的兩根，則 $\frac{1}{p+q}=?$

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{7}$

【99C07】

Ans : (A)

$$\log_9(10x^2-6x+5) - \log_3 x^2 - \log_9 9 = 0$$

$$\log_9 \left(\frac{10x^2-6x+5}{9x} \right) = 0$$

$$\frac{10x^2-6x+5}{9x} = 1 \rightarrow 10x^2-6x+5=9x$$

$$x^2-6x+5=0 \rightarrow (x-1)(x-5)=0$$

$\downarrow$ $x=1$ $\downarrow$ $x=5$ $\rightarrow x=1$ 或 $x=5$

$$\text{兩根和 } p+q=1+5=6$$

$$\therefore \frac{1}{p+q} = \frac{1}{6}$$

設 r 為有理數，且 $5^r = 4(\sqrt[3]{40} + \frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2$ ，則 $r = ?$

- (A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) 8 (D) 10

【99C20】

Ans : (A)

$$5^r = 4 \left(2\sqrt[3]{5} + \frac{\sqrt[3]{5}}{2} \right)^2$$

$$= 4 \times \left(\frac{5\sqrt[3]{5}}{2} \right)^2$$

$$= \cancel{4} \times \frac{25(\sqrt[3]{5})^2}{\cancel{4}}$$

$$= 5^2 \times 5^{\frac{2}{3}}$$

$$= 5^{2+\frac{2}{3}}$$

$$= 5^{\frac{8}{3}}$$

$$\therefore r = \frac{8}{3} \quad \#$$

設 x, y 為正實數，若 $2\log(x-2y) = \log x + \log y$ ，則 $\frac{x}{y}$ 之值為何？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【98C10】

Ans : (D)

$$\log(x-2y)^2 = \log xy$$

$$(x-2y)^2 = xy$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -1 \\ & \times & \\ 1 & & -4 \end{array}$$

$$(x-y)(x-4y) = 0$$

$$x = y \text{ 或 } x = 4y$$

但 $x = y$ 會使真數 $x-2y$ < 0 ，不合

$$\text{故 } x = 4y \rightarrow \frac{x}{y} = 4 \quad *$$

設 3^α 、 3^β 為方程式 $x^2 - x + \frac{1}{81} = 0$ 的兩根，則 $\alpha + \beta = ?$

- (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4

【98C11】

Ans : (A)

兩根積 $3^\alpha \cdot 3^\beta = \frac{1}{81}$

$$3^{\alpha+\beta} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$$

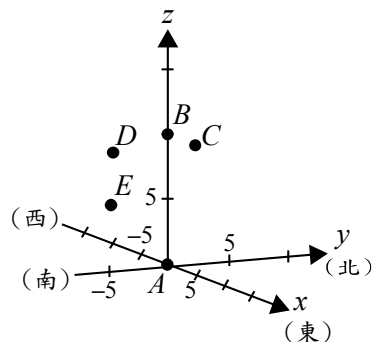
$$\alpha + \beta = -4$$

ch10_空間向量

小華遙控一台空拍機。今空拍機從點 A 出發，首先垂直上升 10 公尺(至點 B)，往東飛了 5 公尺(至點 C)，再往南飛 7 公尺(至點 D)，然後下降 4 公尺到達點 E ，如圖所示。試問此時空拍機和原出發點間的距離約為多少公尺？

- (A) $\sqrt{74}$ (B) $\sqrt{110}$ (C) $\sqrt{174}$ (D) $\sqrt{270}$ 【114C22】

Ans : (B)



$$A(0, 0, 0)$$

↓

$$B(0, 0, 10)$$

↓

$$C(5, 0, 10)$$

↓

$$D(5, -7, 10)$$

↓

$$E(5, -7, 6)$$

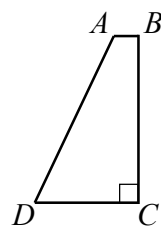
$$\begin{aligned}\therefore \overline{AE} &= \sqrt{5^2 + (-7)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{25 + 49 + 36} \\ &= \sqrt{110} \quad \times\end{aligned}$$

已知空間中一梯形 $ABCD$ ， $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 平行，且 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 垂直，其中三個頂點坐標分別為

$A(4, -3, -2)$ 、 $C(3, 0, 2)$ 、 $D(1, 1, 0)$ ，如圖所示，試求 $\overline{AB} = ?$

- (A) 1 (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{7}{3}$

【114C24】

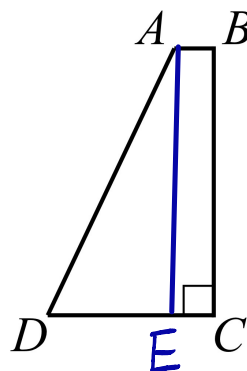


Ans : (A)

$$\vec{DA} = (3, -4, -2)$$

$$\vec{DC} = (2, -1, 2)$$

$\vec{DA}$ 在 $\vec{DC}$ 上的正射影



$$\begin{aligned}\vec{DE} &= \left(\frac{\vec{DA} \cdot \vec{DC}}{|\vec{DC}|^2} \right) \vec{DC} = \left(\frac{6 + 4 - 4}{4 + 1 + 4} \right) (2, -1, 2) \\ &= \frac{2}{3} (2, -1, 2) \\ &= \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{EC} &= \vec{DC} - \vec{DE} = \left(2 - \frac{4}{3}, -1 + \frac{2}{3}, 2 - \frac{4}{3} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)\end{aligned}$$

$$|\vec{EC}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

即 $\overline{AB} = 1$ ✕

空間中三點的坐標分別為 $A(0, 6, -1)$ 、 $B(3, 3, -1)$ 、 $C(4, 1, 1)$ ，則 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影為何？

(A) $(4, -1, 2)$ (B) $(4, -2, 4)$ (C) $(2, -4, 4)$ (D) $(2, 4, 4)$

【113C19】

Ans : (C)

$$\overrightarrow{AC} = (4, -5, 2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (1, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 + 10 + 4 = 18$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \left(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2} \right) \overrightarrow{BC} = \frac{18}{9} (1, -2, 2) \\ &= (2, -4, 4) \end{aligned}$$

空間中兩點 $A(1, 3, 4)$ 與 $B(3, 2, 4)$ ，若 xy 平面上 P 點到 A 與 B 兩點的距離和為最小，則 P 點的坐標為何？

- (A) $(2, \frac{5}{2}, 0)$ (B) $(2, 2, 0)$ (C) $(2, \frac{3}{2}, 0)$ (D) $(3, 1, 0)$

【113C24】

Ans : (A)

A 對 xy 平面 ($z=0$) 之對稱點

$A'(1, 3, -4)$

P 為 $\overline{A'B}$ 之中點

$$P\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{-4+4}{2}\right) = P\left(2, \frac{5}{2}, 0\right) \quad \#$$

若通過 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(2, 4, 6)$ 、 $C(3, 5, 4)$ 三點之平面 E_1 ，與另一平面 $E_2: x + ky - 2z = 1$

互相垂直，則 $k = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【112C09】

Ans : (A)

$$\vec{AB} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{AC} = (2, 3, 1)$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 \times & 1 \times & 2 \times & 3 \end{array}$$

$$(-7) \ 5 \ (-1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-7, 5, -1) \rightarrow \text{取 } \vec{n}_1 = (7, -5, 1) \\ E_1 \text{ 的法向量}$$

$$\text{而 } \vec{n}_2 = (1, k, -2) \\ E_2 \text{ 的法向量}$$

$$E_1 \perp E_2 \rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$7 \times 1 + (-5) \times k + 1 \times (-2) = 0$$

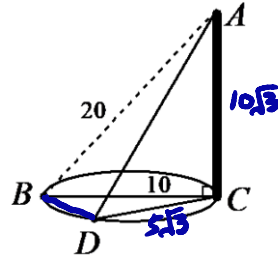
$$7 - 5k - 2 = 0 \rightarrow 5k = 5 \rightarrow k = 1$$

*

有一露營活動，大家想要在地面上立一垂直桿子，並以繩索固定，如圖所示，其中 $\overline{AC}$ 為垂直於地面的桿子、 $\overline{AD}$ 為繩索。已知 B 、 C 兩點相距 10 公尺，而 D 點是位於以 $\overline{BC}$ 為直徑的圓上，且 $\angle BCD = 30^\circ$ 。若從桿頂 A 到 B 點的距離為 20 公尺，則 $\overline{AD} = ?$

- (A) $14\sqrt{2}$ 公尺 (B) $8\sqrt{6}$ 公尺
(C) $5\sqrt{15}$ 公尺 (D) $11\sqrt{3}$ 公尺

【112C22】

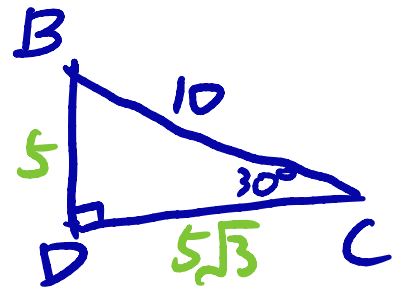


連接 $\overline{BD}$

$\because \overline{BC}$ 為直徑 $\therefore \angle BDC = 90^\circ$
(半圓的圓周角是直角)

$$\text{直角} \triangle ABC \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

$$\triangle BCD \text{ 中, } \angle BCD = 30^\circ \rightarrow$$



$$\therefore \overline{CD} = 5\sqrt{3}$$

$$\text{直角} \triangle ACD \rightarrow \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{375} = 5\sqrt{15} (m)$$

✱

正四面體(四個面皆為正三角形) $ABCD$ 的四個頂點坐標為 $A(0,0,0)$ 、 $B(2,0,0)$ 、

$C(1,\sqrt{3},0)$ 、 $D(x,y,z)$ ，其中 $z>0$ ，則 $z=?$

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

【111C13】

Ans : (C)

$$\overline{AB} = 2$$

$\because A, B, C$ 之 z 均為 0

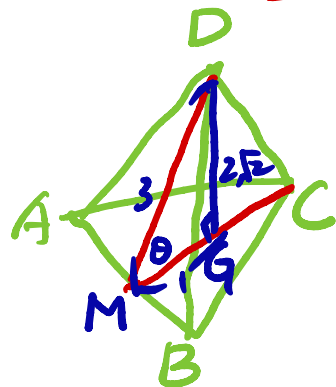
$\therefore A, B, C$ 在 $z=0$ 之平面

此時 D 點的 z 坐標

就是正四面體的高

$$\text{故 } z = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{6}}{3} *$$

*正四面體



$$\overline{DM} : \overline{MG} : \overline{DG}$$

$$= 3 : 1 : 2\sqrt{2}$$

$$\textcircled{1} \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } \overline{AD} = a$$

$$\text{則 } \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

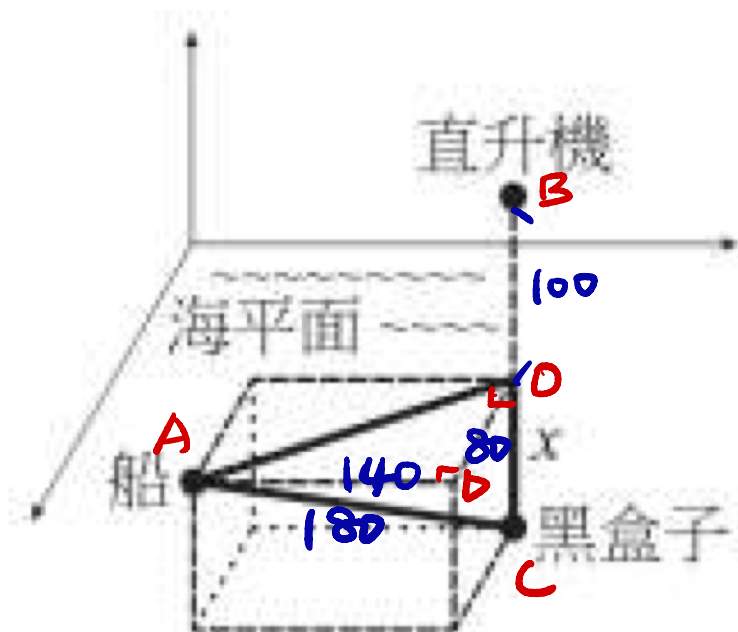
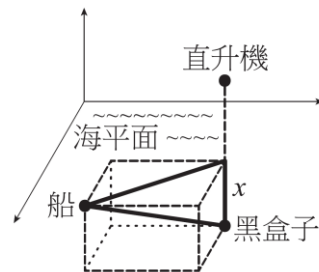
高 $\overline{DG}$ 為

$$\begin{aligned} & \overline{DM} \times \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}a \end{aligned}$$

今有一飛機失事落海，救難直升機於失事地點附近偵測到黑盒子（飛行記錄器的俗稱），其所發出的訊號恰好位於直升機的正下方，但無法確定深度，直升機將位置訊息告知水上工作船，經船上人員推算，直升機位於工作船東方 140 公尺、北方 80 公尺的海平面上方 100 公尺處，並且偵測到該黑盒子與水上工作船的直線距離為 180 公尺，如圖所示。根據上述訊息，若黑盒子在海平面下深度為 x 公尺，則 $x = ?$

- (A) 60 (B) 70 (C) 80 (D) 90

Ans : (C)



$$\begin{array}{r} 12800 \\ - 6400 \\ \hline 6400 \end{array}$$

$$\text{直角}\triangle OAD \rightarrow \overline{OA}^2 = 140^2 + 80^2$$

$$\begin{aligned} \text{直角}\triangle OAC \rightarrow x^2 &= 180^2 - \overline{OA}^2 \\ &= 180^2 - 140^2 - 80^2 \\ &= \underline{320 \times 40} - 6400 \\ &= 12800 - 6400 \\ &= 6400 \end{aligned}$$

$$\text{故 } x = \sqrt{6400} = 80 \quad \times$$

ch11_一次聯立方程式與矩陣

若 $x=a$ 、 $y=b$ 為聯立方程組 $\begin{cases} 3x+4y=114 \\ 4x+5y=2025 \end{cases}$ 的解，則 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = ?$

- (A) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 114 \\ 2025 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 114 \\ 2025 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 114 \\ 2025 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 114 \\ 2025 \end{bmatrix}$ 【114C13】

Ans : (B)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114 \\ 2025 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 114 \\ 2025 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 114 \\ 2025 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 114 \\ 2025 \end{bmatrix} \quad \#$$

$$AB = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}_{3 \times n} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}_{k \times 4} \rightarrow (A)$$

$n = k$ 時才可乘!

已知二元一次方程組的增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{array} \right]$ ，則下列何者為此矩陣經過列運算操作後的

增廣矩陣？

(A) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{array} \right]$ (B) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \end{array} \right]$ (C) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{array} \right]$ (D) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{array} \right]$ 【113C05】

Ans : (C)

解 $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

代入檢驗得知

(C) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 - (-1) = 4 \\ 3 \times 3 + 2 \times (-1) = 7 \end{cases} \text{ (合)}$

故選 (C) *

在工程領域中，矩陣運算可用來描述系統的輸入與輸出之關聯性。已知 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 分別表示系統輸入與輸出的變量，且彼此滿足下列關係： $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 5x_2 \\ y_2 = 3x_1 + 8x_2 \end{cases}$ 。若此關係可用矩陣運算

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 表示，其中 A 為二階方陣。設 A 的反方陣為 $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d = ?$

- (A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2

【113C09】

Ans : (A)

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = y_1 \\ 3x_1 + 8x_2 = y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a=8, b=-5, c=-3, d=2$$

$$\text{故 } a+b+c+d = 8+(-5)+(-3)+2 \\ = 2$$

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，矩陣 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。若矩陣 $C = AB$ ，且 $C = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$ ，則 $d_{12} = ?$

(A) -2 (B) -3 (C) -4 (D) -5

【112C07】

Ans : (A)

$$C = AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

2×3 3×2 2×2

$$c_{11} = (-1) \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$$

$$c_{12} = (-1) \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = -1$$

$$c_{21} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$$

$$c_{22} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 1$$

$$\therefore C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

$$d_{12} = 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = -2 \quad \times$$

已知 a 、 b 、 c 為實數。若方程組
$$\begin{cases} ax+by+cz=-2 \\ bx+cy+az=-4 \\ cx+ay+bz=6 \end{cases}$$
 的解為 $x=1$ 、 $y=1$ 、 $z=-1$ ，則下列何者

為正確？

- (A) $ab=6$ (B) $bc=3$ (C) $ac=2$ (D) $abc=6$

【112C10】

Ans : (C)

$$\begin{cases} a+b-c=-2 \\ b+c-a=-4 \\ c+a-b=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b-c=-2 \text{ ---①} \\ -a+b+c=-4 \text{ ---②} \\ a-b+c=6 \text{ ---③} \end{cases}$$

$$\text{①}+\text{②} \text{ 得 } 2b=-6 \rightarrow \boxed{b=-3}$$

$$\text{③}-\text{②} \text{ 得 } 2a-2b=10 \rightarrow 2a+b=10 \rightarrow \boxed{a=2}$$

$$\text{由①得 } 2-3-c=-2 \rightarrow \boxed{c=1}$$

$$(A) \ ab=-6$$

$$(B) \ bc=-3$$

$$(C) \ ac=2 \times$$

$$(D) \ abc=-6$$

在一個園遊會的攤位遊戲中，遊戲規則如下：在一個桶子裡有三種球，抽中紅球可得 x 點，抽中黃球可得 y 點，但抽中黑球則必須扣掉 z 點。每個人抽 10 次，每次抽一個球，最後依照得到的點數來兌換獎品。已知小華抽中 3 個紅球、3 個黃球、4 個黑球，共得 10 點；小明抽中 4 個紅球、3 個黃球、3 個黑球，共得 21 點；小玲抽中 2 個紅球、6 個黃球、2 個黑球，共得 26 點。若小蘭抽中 3 個紅球、5 個黃球、2 個黑球，則小蘭得到的點數為何？

(A) 28 (B) 30 (C) 32 (D) 39

【111CH】

Ans : (A)

$$\begin{cases} 3x + 3y - 4z = 10 \\ 4x + 3y - 3z = 21 \\ 2x + 6y - 2z = 26 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + 2z = 22 \\ x + z = 11 \end{cases} \\ & \begin{cases} 3x - 2z = 8 \\ x + 3y - z = 13 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5x = 30 \\ & x = 6 \\ & \downarrow \\ & z = 5 \end{aligned}$$

$$6 + 3y - 5 = 13 \rightarrow 3y = 12 \rightarrow y = 4$$

$$\text{小蘭: } 3x + 5y - 2z = 18 + 20 - 10 = 28$$

若矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ，且 $AB = A+B$ ，則 $c = ?$

- (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

【111CI7】

Ans : (C)

$$AB = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2a-b & ac-d \\ 4+3b & 2c+3d \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2 & -1+c \\ 2+b & 3+d \end{bmatrix}$$

$$AB = A+B \rightarrow \begin{cases} 2a-b = a+2 & \text{--- ①} \\ ac-d = -1+c & \text{--- ②} \\ 4+3b = 2+b & \text{--- ③} \\ 2c+3d = 3+d & \text{--- ④} \end{cases}$$

由③得 $b = -1$ $\xrightarrow{\text{代入①}}$ $2a+1 = a+2 \rightarrow a = 1$

② $\rightarrow c-d = -1+c \rightarrow d = 1$ $\xrightarrow{\text{代入④}}$ $2c+3=4$
 $\rightarrow c = \frac{1}{2}$

✖

若 k 為實數，且二元一次聯立方程組 $\begin{cases} kx+3y+k+1=0 \\ x+4(k+1)y+8k^2+1=0 \end{cases}$ 有無限多組解，則 k 可為下列

何值？

- (A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

【110C10】

Ans : (C)

無限多組解 $\rightarrow \frac{k}{1} = \frac{3}{4(k+1)} = \frac{k+1}{8k^2+1}$

$$\underline{4k(k+1)=3} \rightarrow 4k^2+4k-3=0$$

$$\rightarrow (2k-1)(2k+3)=0$$

$$\rightarrow k = \frac{1}{2} \text{ or } k = -\frac{3}{2}$$

① $k = \frac{1}{2}$ 時 $\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{8 \times \frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$

$$\textcircled{2} k = -\frac{3}{2} \text{ 时 } \frac{-\frac{3}{2}}{1} \neq \frac{-\frac{3}{2}+1}{8 \times \frac{9}{4}+1} = \frac{-\frac{1}{2}}{19}$$

故 $k = \frac{1}{2}$ ~~✗~~

若 x, y, z 為相異實數，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix} = ?$

【110CH】

- (A) 0 (B) $(x-y)(y-z)(z-x)$ (C) $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$ (D) $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$

Ans : (A)

$$\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & -y & x \\ z & -z & y \\ x & -x & z \end{vmatrix} = 0$$

Handwritten notes: A red bracket under the first two columns of the first determinant is labeled $\times(-1)$. A green bracket under the first two columns of the second determinant is labeled 成比例 (proportional).

某家口罩工廠擁有 5 台 A 型機器和 3 台 B 型機器來製造口罩，平時每日總產量為 11070 個口罩。今因應肺炎疫情日趨嚴重，緊急添購 3 台 A 型機器和 9 台 B 型機器，並提高所有機器的每日產能至原先的 150%，使得該工廠每日總產量增為 42120 個口罩，試問一台 A 型機器原先的每日產能為多少個？

(A) 1350 (B) 1380 (C) 1410 (D) 1440

【109C19】

Ans : (A)

設 A 原產能 x (個/日)
B “ y (個/日)

$$\text{則 } \begin{cases} 5x + 3y = 11070 \\ (8x + 12y) \times 150\% = 42120 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 11070 - \textcircled{1} \\ 2x + 3y = 7020 - \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } 3x = 4050 \rightarrow x = 1350 \quad \#$$

已知三階行列式 $\begin{vmatrix} a_1-2b_1-3c_1 & a_1-2c_1 & a_1 \\ a_2-2b_2-3c_2 & a_2-2c_2 & a_2 \\ a_3-2b_3-3c_3 & a_3-2c_3 & a_3 \end{vmatrix} = 8$ ，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ?$

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4

【109C20】

Ans : (C)

$$\begin{vmatrix} a_1-2b_1-3c_1 & a_1-2c_1 & a_1 \\ a_2-2b_2-3c_2 & a_2-2c_2 & a_2 \\ a_3-2b_3-3c_3 & a_3-2c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$


 $\times (-1)$

$$= \begin{vmatrix} -2b_1-3c_1 & -2c_1 & a_1 \\ -2b_2-3c_2 & -2c_2 & a_2 \\ -2b_3-3c_3 & -2c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$


 $\times (-\frac{3}{2})$

$$= \begin{vmatrix} -2b_1-2c_1 & a_1 \\ -2b_2-2c_2 & a_2 \\ -2b_3-2c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 8$$


 換2次, 不變號

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2$$

已知下列兩個聯立方程組有相同的解 (x, y, z) ，試問 a 的值為何？

$$\begin{cases} 3x-4y+z=4 \\ 5x+2y-2z=3 \end{cases}, \begin{cases} 2x+3y-2z=a \\ 4x+5y-3z=1 \end{cases}$$

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

【108C04】

Ans : (B)

$$\begin{cases} 3x-4y+z=4 & \text{---①} \\ 5x+2y-2z=3 & \text{---②} \\ 4x+5y-3z=1 & \text{---③} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{①} \times 2 + \text{②} &\text{ 得 } 11x - 6y = 11 \\ \text{①} \times 3 + \text{③} &\text{ 得 } 13x - 6y = 13 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{代回①得 } 3 - 0 + z = 4 \rightarrow z = 1$$

$$\text{以 } x=1, y=0, z=1 \text{ 代入 } 2x+3y-2z=a$$

$$\text{得 } a = 2 + 0 - 2 = 0 \quad \times$$

設 b_1 、 b_2 、 b_3 、 c_1 、 c_2 及 c_3 均為實數，若二階行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 13$ 、 $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 7$ 、 $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$ ，

則三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ?$

(A) 5 (B) 13 (C) 25 (D) 33

【107C03】

Ans : (A)

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 13 - 2 \times 7 + 3 \times 2$$

$$= 13 - 14 + 6$$

$$= 5$$

$$\text{設} \begin{cases} 3x+5y+z=15 \\ 2x+4y+z=12 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}, \text{則 } y=?$$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

【107C10】

Ans : (B)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 2 + 25 - 20 - 3 - 20 = 8$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 2 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$\begin{matrix} \swarrow x(-1) \\ \nwarrow x(-2) \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -27 & 0 \end{vmatrix}$$

(The first row and the third column are crossed out with a green line.)

$$= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -27 \end{vmatrix}$$

$$= 27 - 3$$

$$= 24$$

$$\text{故 } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{24}{8} = 3 \quad \#$$

設 x, y, z 為整數，且 $2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$ ，則 z 可為下列何者？

(A) 0 (B) 3 (C) 5 (D) 11

【106C08】

Ans : (B)

$\therefore x, y, z$ 為整數

$$\therefore 2x+3y-z=0$$

$$2|x+y|+3|x-y-4|=4$$

此時必 $\begin{cases} |x+y|=2 \rightarrow x+y=\pm 2 \\ |x-y-4|=0 \rightarrow x-y-4=0 \end{cases}$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \rightarrow 6-3-z=0 \\ \rightarrow \boxed{z=3}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \rightarrow 2-9-z=0 \\ \rightarrow \boxed{z=-7}$$

故 z 可為 3 *

設 t 為實數，且三元一次聯立方程式
$$\begin{cases} (t+1)x + (t-1)z = 1 \\ (t+1)y + z = 3 \\ (t+1)y + tz = 5 \end{cases}$$
 無解，則 t 可為下列何者？

- (A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

【106C09】

Ans : (C)

$$(A) t = -2 \rightarrow \begin{cases} -x - 3z = 1 \\ -y + z = 3 \\ -y - 2z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{11}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$(B) t = 0 \rightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \\ y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$(C) t = 1 \rightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ 2y + z = 3 \\ 2y + z = 5 \end{cases} > \text{無解}$$

$$(D) t = 2 \rightarrow \begin{cases} 3x + z = 1 \\ 3y + z = 3 \\ 3y + 2z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 2 \end{cases}$$

求三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 10 & 121 \end{vmatrix} = 0$ 所有解的和為何？

- (A) 11 (B) $\frac{34}{3}$ (C) 12 (D) $\frac{40}{3}$

【106C10】

Ans : (D)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 10 & 121 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} x(-1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & 9 & 120 \end{vmatrix}$$

$$= 120(x-1) - 9(x^2-1)$$

$$= -9x^2 + 120x - 111$$

$$= 0$$

$$9x^2 - 120x + 111 = 0$$

$$\alpha + \beta = -\frac{-120}{9} = \frac{40}{3} \quad \#$$

若三元一次聯立方程式
$$\begin{cases} ax - ay = 5 \\ ax - y + (1-a)z = 3 \\ (1-a)y + (2a-3)z = 1 \end{cases}$$
 恰有一解，則 a 可能為下列何值？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【105C09】

Ans : (D)

$$(A) a=0 \rightarrow \begin{cases} 0=5 \rightarrow \text{無解} \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$(B) a=1 \rightarrow \begin{cases} x-y=5 \\ x-y=3 \\ \dots \end{cases} \rightarrow \text{無解}$$

$$(C) a=2 \rightarrow \begin{cases} 2x-2y=5 \\ 2x-y-z=3 \\ -x+z=1 \\ -2x+2z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y-z=-2 \\ -y+z=5 \\ y-z=5 \end{cases} \rightarrow \text{無解}$$

$$(D) a=3 \rightarrow \begin{cases} 3x-3y+0z=5 \\ 3x-y-2z=3 \\ 0x-2y+3z=1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 12 + 27 = 6 \neq 0 \rightarrow \text{恰有一解}$$

$$\therefore a=3 \text{ (合) } \#$$

設 a 、 b 、 c 均為實數，若 $(a-b)(b-c)(c-a) = -2$ ，則 $\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix}$ 之值為何？

(A) -12 (B) -6 (C) 6 (D) 12

【105C10】

Ans : (D)

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{提出 } 3]{\text{提出}} \begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{提出 } 2]{\text{提出}} 6(c-a) \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & c & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 & \quad \quad \quad \xrightarrow{\times(-1)} 6(c-a) \begin{vmatrix} a & b-a & 0 \\ c & 0 & b-c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 & \quad \quad \quad = 6(c-a)(b-a)(b-c) \\
 & \quad \quad \quad = -6(a-b)(b-c)(c-a) \\
 & \quad \quad \quad = (-6) \times (-2) \\
 & \quad \quad \quad = 12
 \end{aligned}$$

若二元一次方程組 $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 的解為 $x=a$ 、 $y=b$ ，則 $a+b=?$

- (A) $-\frac{23}{17}$ (B) $-\frac{21}{17}$ (C) $\frac{21}{17}$ (D) $\frac{23}{17}$

【104C04】

Ans : (A)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{設 } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -17$$

$$\text{則 } A^{-1} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} 16 & -15 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} 1 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{17} \\ -\frac{22}{17} \end{bmatrix}$$

$$a = -\frac{1}{17}, b = -\frac{22}{17} \rightarrow a+b = -\frac{23}{17} \quad \text{✖}$$

若行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2$ ，則 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 + a_1 & b_1 - 2c_1 \\ a_2 & c_2 + a_2 & b_2 - 2c_2 \\ a_3 & c_3 + a_3 & b_3 - 2c_3 \end{vmatrix} = ?$

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4

【104C22】

Ans : (B)

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 + a_1 & b_1 - 2c_1 \\ a_2 & c_2 + a_2 & b_2 - 2c_2 \\ a_3 & c_3 + a_3 & b_3 - 2c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

換1次，要變號

$$= - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -2$$

設 x 、 y 、 k 均為實數，若 $|x+1|+|2x-y+4|+|x+3y+k|=0$ ，則 k 之值為何？

- (A) 3 (B) 1 (C) -4 (D) -5

【103C06】

Ans : (D)

$$x+1=0 \text{ 且 } 2x-y+4=0 \text{ 且 } x+3y+k=0$$

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$-2-y+4=0 \rightarrow y=2$$

$$-1+6+k=0 \rightarrow k=-5$$

三階行列式 $\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 201 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 304 \end{vmatrix}$ 之值為何？

(A) -202 (B) -201 (C) -101 (D) -100

【103C15】

Ans : (D)

$$\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 201 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 304 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 101 & 1 & 2 \\ 201 & 1 & 2 \\ 301 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$\xrightarrow{\times(-1)}$
 $\xrightarrow{\times(-2)}$

$$= \begin{vmatrix} 101 & 1 & 0 \\ 201 & 1 & 0 \\ 301 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 101 & 1 \\ 201 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 101 - 201$$

$$= -100$$

已知 $a > 0$ ，且方程式 $\begin{cases} -x+3y=ax \\ 3x+y=ay \end{cases}$ 有無限多組解，則 $a = ?$

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{10}$

【102C11】

Ans : (D)

$$\begin{cases} -x+3y=ax \\ 3x+y=ay \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a+1)x-3y=0 \\ -3x+(a-1)y=0 \end{cases}$$

$$\frac{a+1}{-3} = \frac{-3}{a-1}$$

$$a^2 - 1 = 9$$

$$a^2 = 10$$

$$a = \pm\sqrt{10}$$

$$\because a > 0$$

$$\therefore a = \sqrt{10} \quad \times$$

若三階行列式 $\begin{vmatrix} x & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$ 之值為 3，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+2 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$ 之值為何？

(A) -9 (B) -3 (C) 3 (D) 9

【102C20】

Ans : (B)

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} x+2 & 13 & 16 \\ 11+0 & 14 & 17 \\ 12+0 & 15 & 18 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 13 & 16 \\ 0 & 14 & 17 \\ 0 & 15 & 18 \end{vmatrix} \\
 &= 3 + 2 \times \begin{vmatrix} 14 & 17 \\ 15 & 18 \end{vmatrix} \\
 &\quad \quad \quad \text{↖ ↗} \\
 &\quad \quad \quad \text{ } \times (-1) \\
 &= 3 + 2 \times \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 3 + 2 \times (-3) \\
 &= 3 + (-6) \\
 &= -3 \quad \times
 \end{aligned}$$

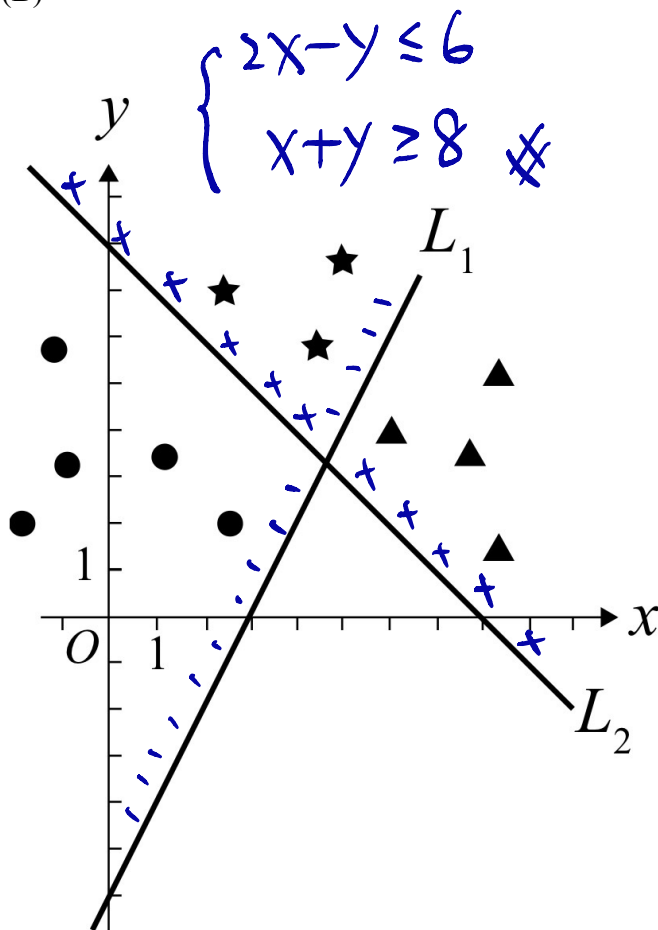
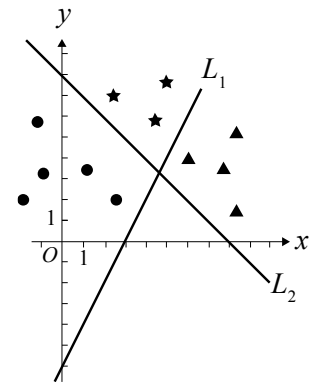
ch12_二元一次不等式與線性規劃

已知在坐標平面上有多筆物件資料，今將其分成三類，分別以▲、●、★表示。若利用兩條直線 $L_1: 2x - y = 6$ 與 $L_2: x + y = 8$ 切割分辨出三類物件資料所屬不同區域，如圖所示，則下列哪一組不等式包含★類所在的區域？

- (A) $\begin{cases} 2x - y \geq 6 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2x - y \leq 6 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 2x - y \geq 6 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2x - y \leq 6 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$

Ans : (B)

【114C10】

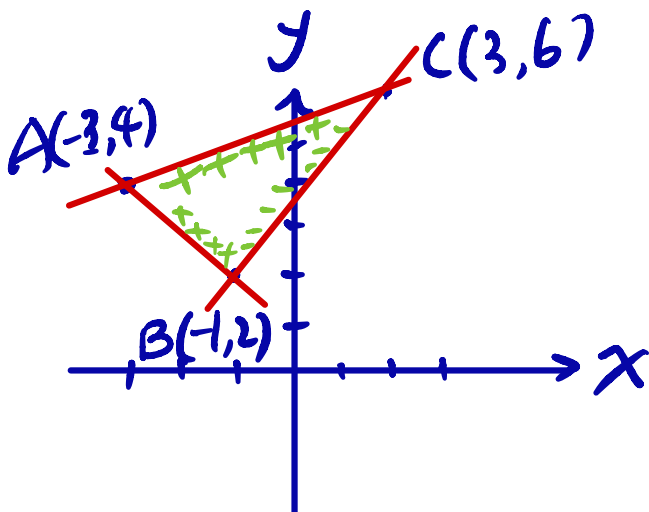


在坐標平面上，若 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別為 $A(-3, 4)$ 、 $B(-1, 2)$ 與 $C(3, 6)$ ，則 $\triangle ABC$ 與其內部區域可由下列哪一組不等式表示？

- (A) $\begin{cases} x-y+3 \leq 0 \\ x+y-1 \geq 0 \\ x-3y+15 \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x-y+3 \geq 0 \\ x+y-1 \geq 0 \\ x-3y+15 \leq 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x-y+3 \geq 0 \\ x+y-1 \leq 0 \\ x-3y+15 \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x-y+3 \leq 0 \\ x+y-1 \leq 0 \\ x-3y+15 \leq 0 \end{cases}$

Ans : (A)

【113C21】



$$\begin{cases} m_{\overline{AB}} = -1 \\ m_{\overline{BC}} = 1 \\ m_{\overline{AC}} = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{由斜率得知}} \begin{cases} \overleftrightarrow{BC}: x-y+3=0 \\ \overleftrightarrow{AB}: x+y-1=0 \\ \overleftrightarrow{AC}: x-3y+15=0 \end{cases}$$

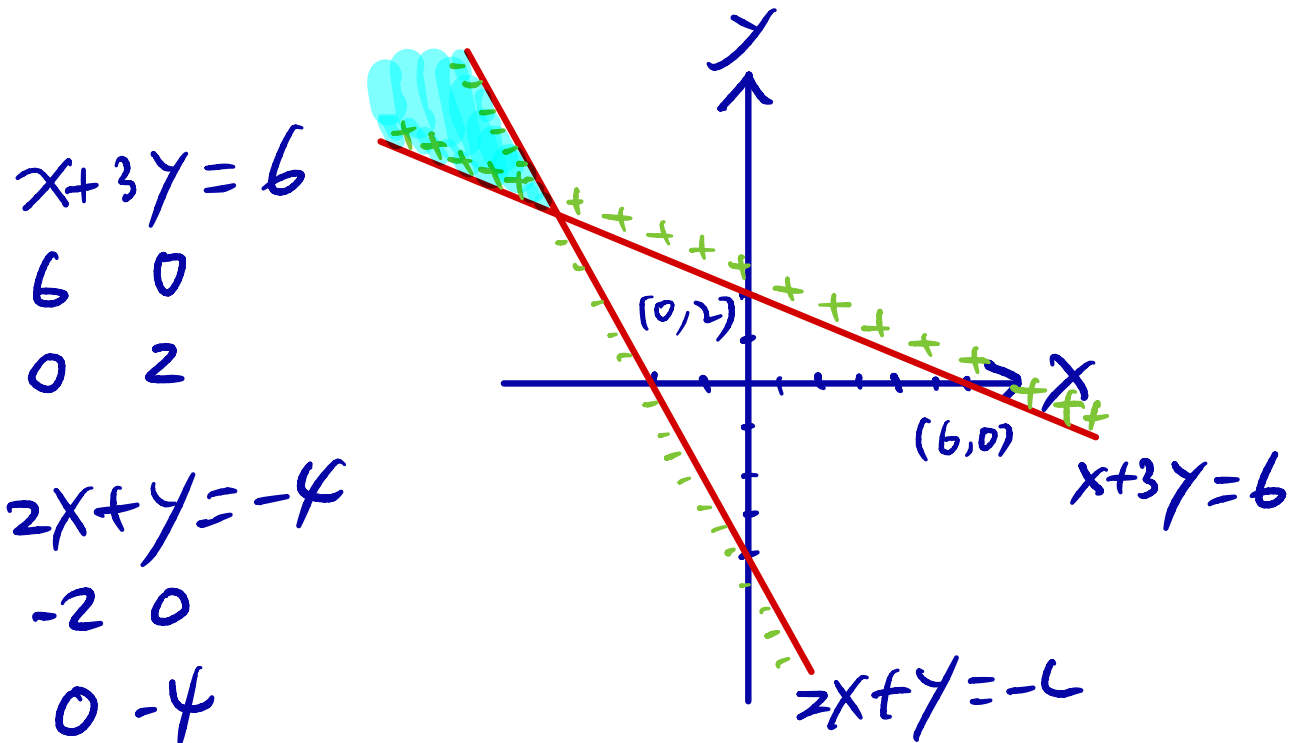
$$\text{由圖得知} \begin{cases} x-y+3 \leq 0 \\ x+y-1 \geq 0 \\ x-3y+15 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{選(A)} *$$

二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+3y \geq 6 \\ 2x+y \leq -4 \end{cases}$ 的圖解區域屬於哪一象限？

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

【112C05】

Ans : (B)



如圖 → 第二象限 *

坐標平面上，若點 $A(a, -6)$ 在直線 $L: 2x - y + 12 = 0$ 之右半平面，則下列何者為 a 的可能值？

(A) -15 (B) -12 (C) -10 (D) -7

【111C06】

Ans : (D)

$$2x - y + 12 = 0 \text{ 之右半平面} \rightarrow 2x - y + 12 \geq 0$$

$$A(a, -6) \text{ 代入得 } 2a + 6 + 12 \geq 0$$

$$2a \geq -18$$

$$a \geq -9 \rightarrow -7 > -9$$

$\rightarrow$ 選 (D) ~~✗~~

在 $\begin{cases} x+2y-6 \geq 0 \\ x+y-10 \leq 0 \\ 2 \leq x \leq 9 \end{cases}$ 的條件下，求其可行解區域的面積(平方單位)為何？

- (A) $\frac{119}{4}$ (B) $\frac{59}{2}$ (C) $\frac{117}{4}$ (D) $\frac{55}{2}$

【109C10】

Ans : (A)

$$x+2y-6=0$$

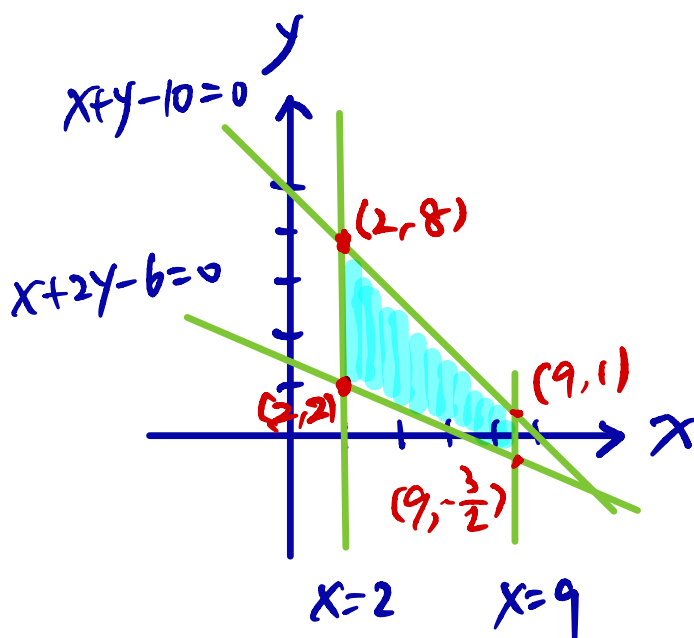
$$6 \quad 0$$

$$0 \quad 3$$

$$x+y-10=0$$

$$10 \quad 0$$

$$0 \quad 10$$



$x=2, x=9$ 為鉛直線

如圖，可行解區域為梯形

$$\text{上底} = 1 - (-\frac{3}{2}) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

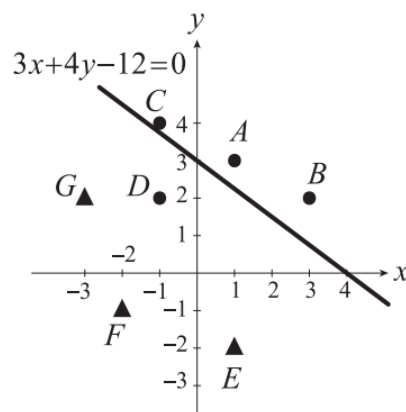
$$\text{下底} = 8 - 2 = 6$$

$$\text{高} = 9 - 2 = 7$$

$$\therefore \text{面積} = \frac{1}{2} \times (\frac{5}{2} + 6) \times 7 = \frac{119}{4} *$$

【109C24】

- Ans* : (D)



如图，

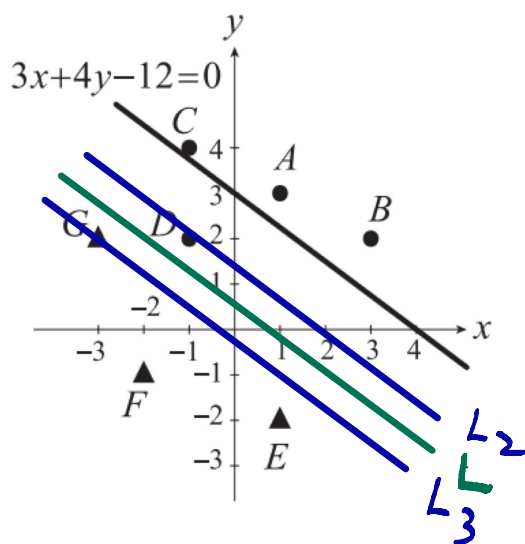
過 $D \rightarrow L_2: 3x + 4y = 5$

過 $G \rightarrow L_3: 3x + 4y = -1$

$$L: 3x + 4y = k$$

$\therefore L$ 介於 L_2, L_3 之間

$$\therefore -1 < k < 5$$



(A) $3x + 4y = -2$ (不合)

(B) $3x + 4y = 6$ (不合)

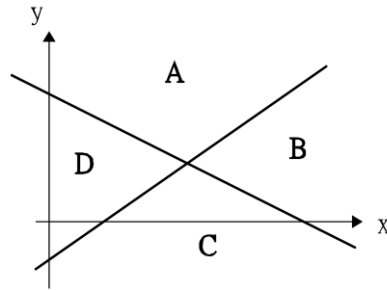
$$(c) \quad 3x + 4y = -\frac{3}{2} \quad (\text{不適合})$$

$$(D) \quad 3x + 4y = \frac{3}{2} \quad (\text{合}) \quad \#$$

有兩條直線 $L_1: 3x-5y=2$ 、 $L_2: x+2y=3$ 將平面分成四個區域，如圖所示，試問區域 A 可用哪一組不等式表示？

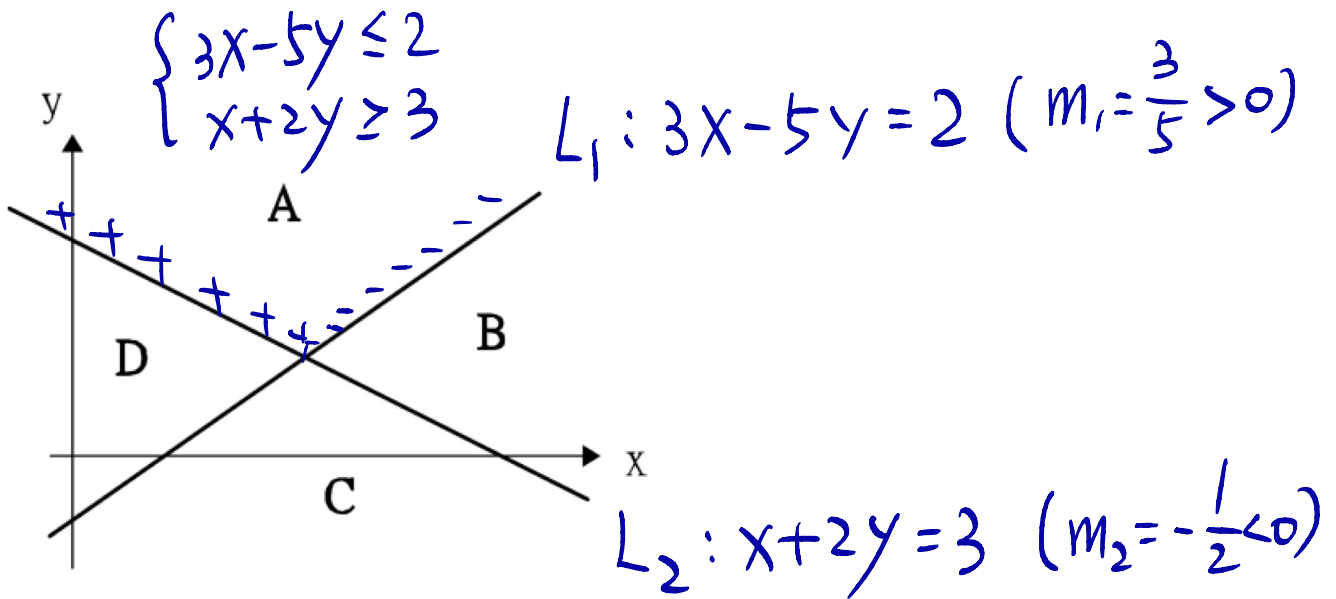
(A) $\begin{cases} 3x-5y \geq 2 \\ x+2y \geq 3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x-5y \leq 2 \\ x+2y \geq 3 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 3x-5y \geq 2 \\ x+2y \leq 3 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 3x-5y \leq 2 \\ x+2y \leq 3 \end{cases}$



【108C03】

Ans : (B)

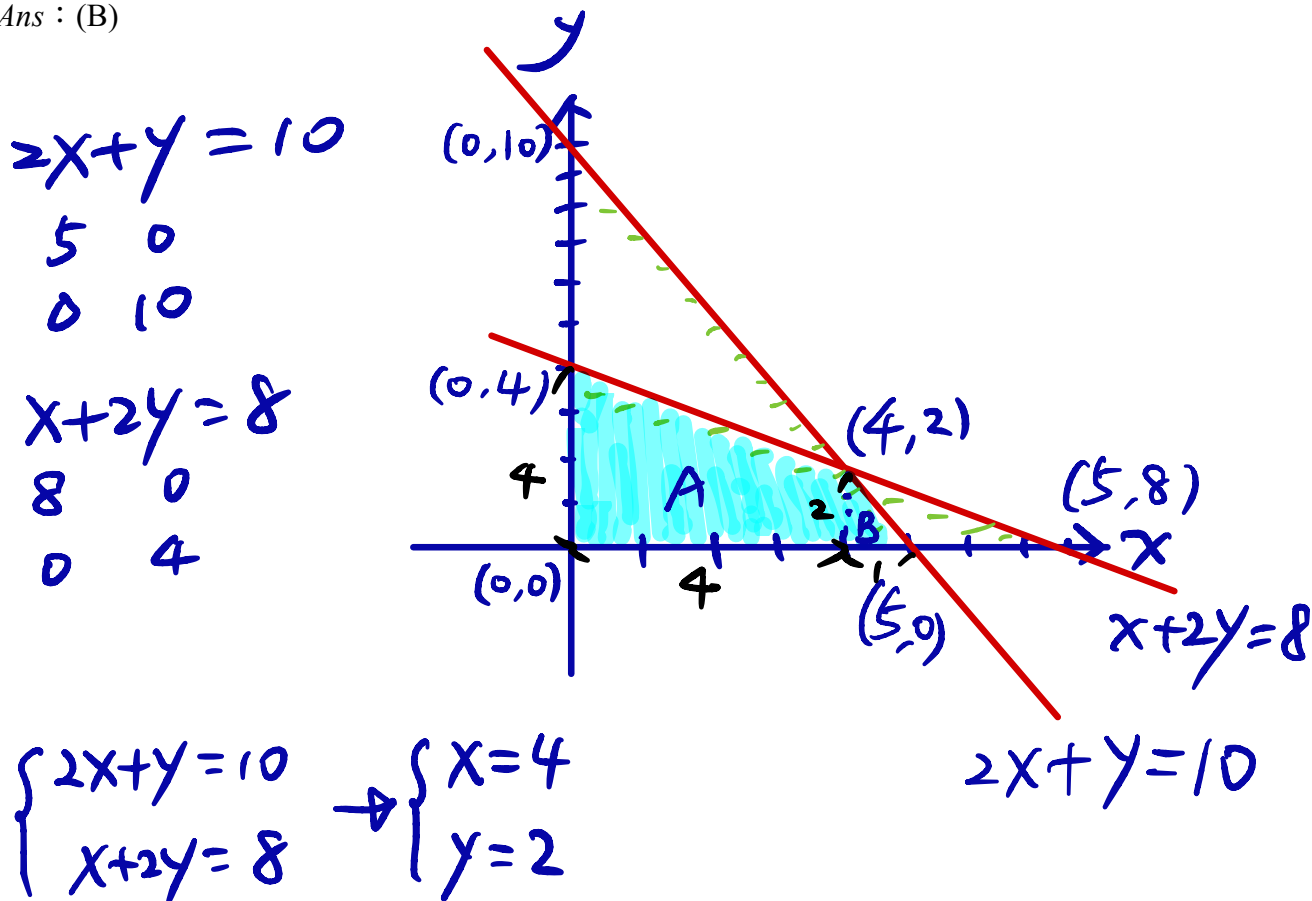


坐標平面上滿足不等式 $\begin{cases} 2x+y \leq 10 \\ x+2y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 的區域面積為何？

(A) 12 (B) 13 (C) 15 (D) 16

【107C05】

Ans : (B)



過 $(4, 2)$ 作垂線(如圖)

$$\begin{aligned} \text{所求} &= A + B = \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times 4 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \\ &= 12 + 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

滿足二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ 3x-y \leq 6 \\ 5x+2y \geq 10 \end{cases}$ 的整數解 (x, y) 共有幾個？

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

【105C12】

Ans : (B)

$$x+y=4$$

$$4 \ 0$$

$$0 \ 4$$

$$3x-y=6$$

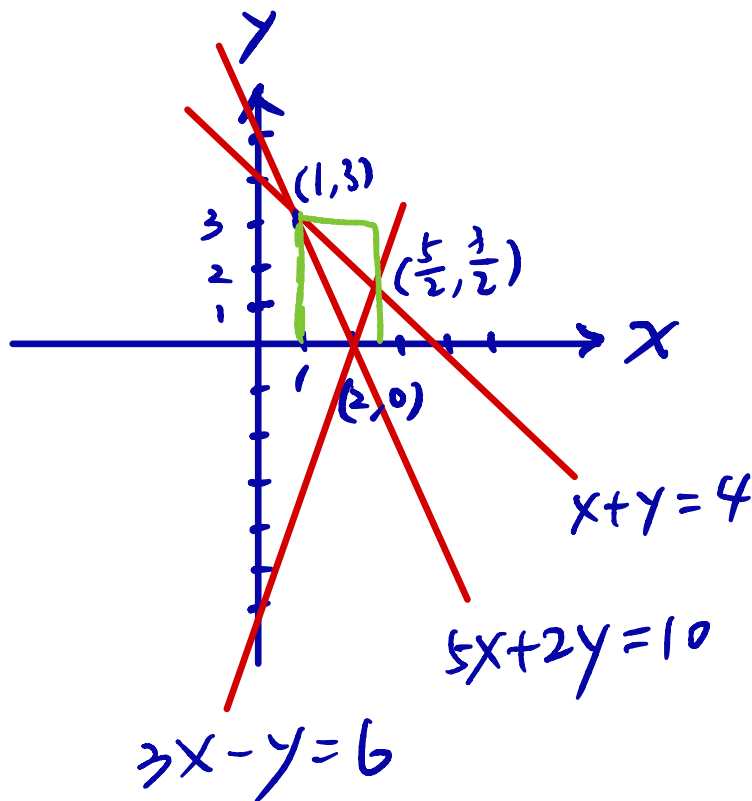
$$2 \ 0$$

$$0 \ -6$$

$$5x+2y=10$$

$$2 \ 0$$

$$0 \ 5$$



由圖可知, $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$, $0 \leq y \leq 3$

此時檢驗 $(1,3)$ 、 $(2,0)$ 、 $(2,1)$ 、 $(2,2)$ 即可

$$\begin{cases} 1+3 \leq 4 \\ 3-3 \leq 6 \text{ (合)} \\ 5+6 \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+0 \leq 4 \\ 6-0 \leq 6 \text{ (合)} \\ 10+0 \geq 10 \end{cases}, \begin{cases} 2+1 \leq 4 \\ 6-1 \leq 6 \text{ (合)} \\ 10+2 \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+2 \leq 4 \\ 6-2 \leq 6 \text{ (合)} \\ 10+4 \geq 10 \end{cases}$$

故 (x, y) 有 4 個

✱

若在聯立不等式 $\begin{cases} 2x-y \geq 0 \\ x+3y \leq 7 \\ x-4y \leq 0 \end{cases}$ 的條件下，目標函數 $f(x,y)=2x-3y-2$ 的最大值為 M ，最小值

為 m ，則 $M+m=?$

(A) -5 (B) -3 (C) 3 (D) 5

【104CH】

Ans : (B)

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+3y=7 \end{cases} \rightarrow (1, 2)$$

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-4y=0 \end{cases} \rightarrow (0, 0)$$

$$\begin{cases} x+3y=7 \\ x-4y=0 \end{cases} \rightarrow (4, 1)$$

(x, y)	$(1, 2)$	$(0, 0)$	$(4, 1)$
$2x-3y-2$	-6	-2	3

$$\therefore M=3, m=-6$$

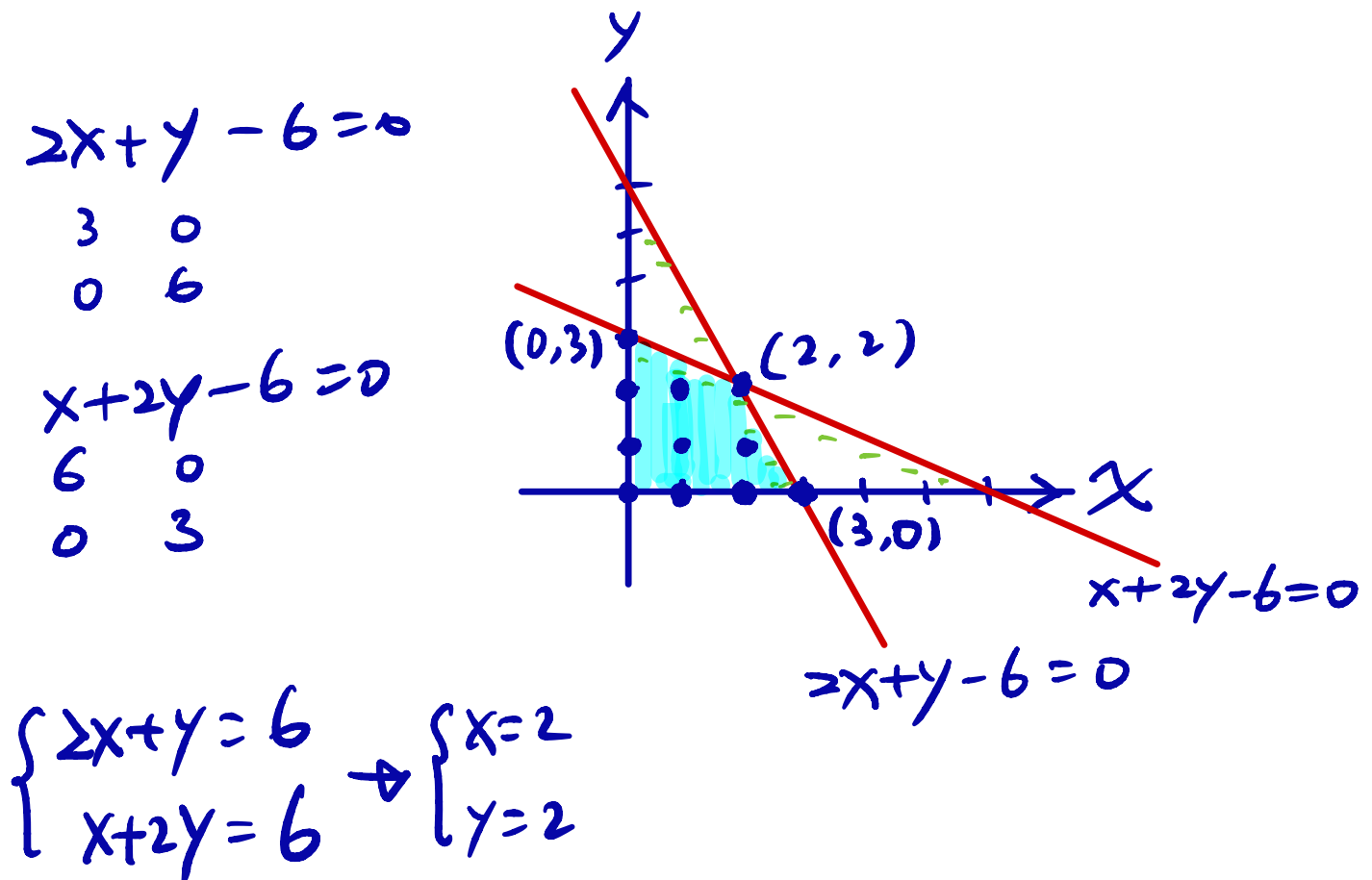
$$\text{故 } M+m=3+(-6)=-3 \quad *$$

在聯立不等式組 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y - 6 \leq 0$, $x + 2y - 6 \leq 0$ 的可行解區域中, x 、 y 均為整數解的點坐標 (x, y) 共有多少個?

- (A) 8 (B) 9 (C) 11 (D) 無限多個

【103C19】

Ans : (C)



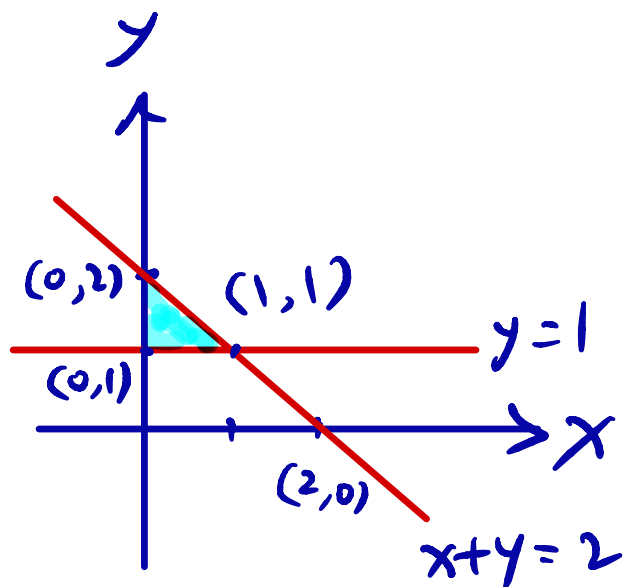
由圖可知滿足的 (x, y) 共有 11 個

在 $x \geq 0$, $y \geq 1$, $x+y \leq 2$ 的條件下 , $2x-y$ 的最大值為何 ?

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

【101C02】

Ans : (C)



如圖,

(x, y)	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(0, 2)$
$2x - y$	-1	1	-2

最大值為 1 *

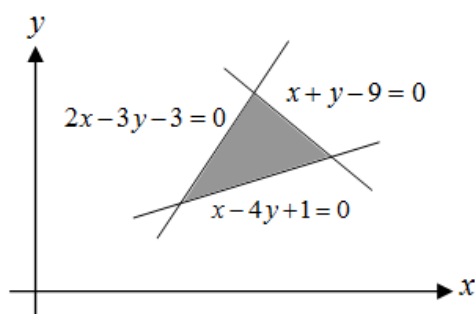
下列二元一次聯立不等式中，何者代表圖(一)所示之三角區域？

(A) $\begin{cases} x-4y+1 \leq 0 \\ 2x-3y-3 \geq 0 \\ x+y-9 \leq 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x-4y+1 \leq 0 \\ 2x-3y-3 \leq 0 \\ x+y-9 \leq 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x-4y+1 \geq 0 \\ 2x-3y-3 \geq 0 \\ x+y-9 \geq 0 \end{cases}$

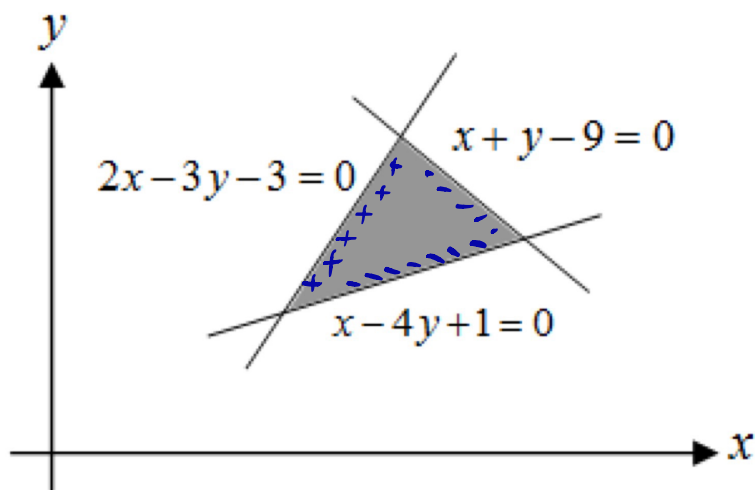
(D) $\begin{cases} x-4y+1 \geq 0 \\ 2x-3y-3 \leq 0 \\ x+y-9 \leq 0 \end{cases}$



【100C02】

圖(一)

Ans : (A)



$$\begin{cases} x-4y+1 \leq 0 \\ 2x-3y-3 \geq 0 \\ x+y-9 \leq 0 \end{cases}$$

~~XX~~

聯立不等式 $\begin{cases} x+y \geq 10 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$ 的可行解區域是圖(一)的哪一個部分？

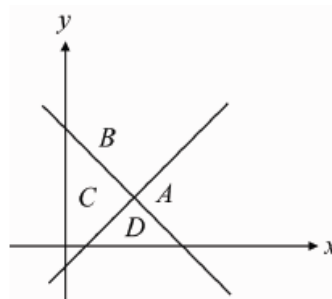
(A) A

(B) B

(C) C

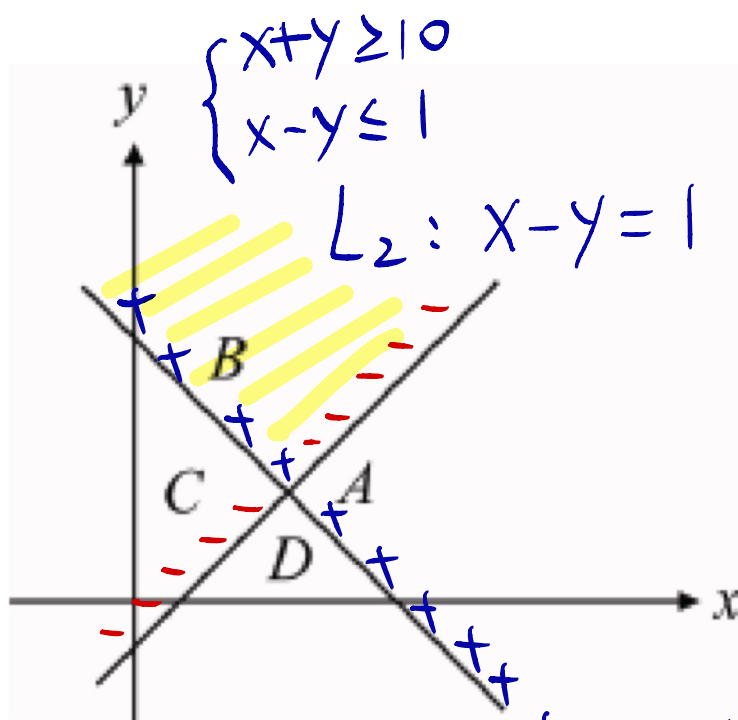
(D) D

Ans : (B)



圖(一)

【99CII】



$$L_1: x+y=10 \quad (m_1=-1 < 0)$$

在坐標平面上，滿足不等式方程組 $\begin{cases} 2x+y-6 \leq 0 \\ 3x-y+3 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的區域，其面積為何？

- (A) $\frac{22}{5}$ (B) $\frac{32}{5}$ (C) $\frac{42}{5}$ (D) $\frac{48}{5}$

【98C16】

Ans : (D)

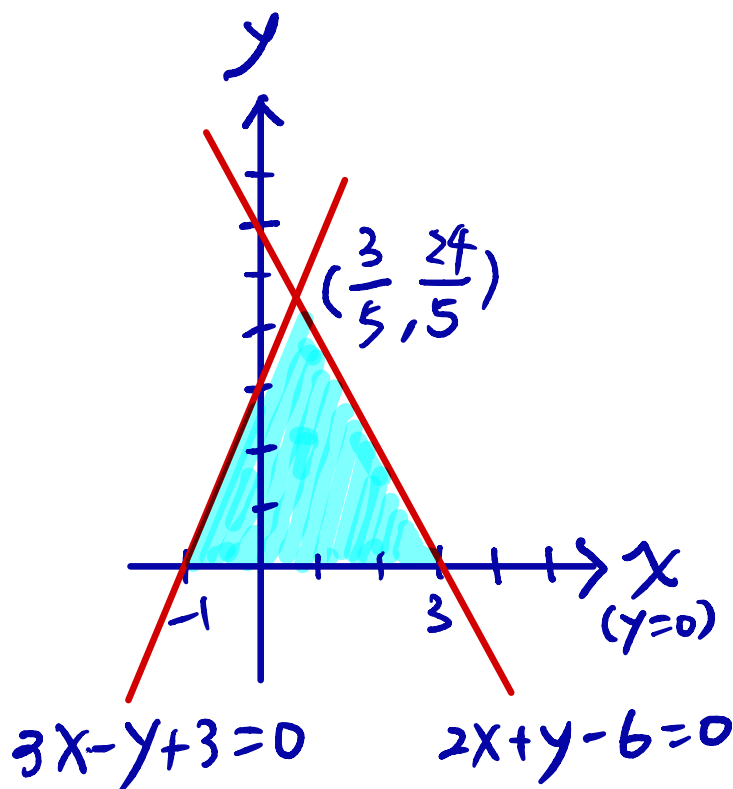
$$2x + y - 6 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{array}$$

$$3x - y + 3 = 0$$

$$\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}$$

$$y=0 \rightarrow x \text{ 軸}$$



$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = -3 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{3}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

Δ 之底長為 $3 - (-1) = 3 + 1 = 4$ ，高為 $\frac{24}{5}$

$$\Delta = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{24}{5} = \frac{48}{5} *$$

ch13_二次曲線

茗茗幫家裡設計一款拋物線造型的裝飾品，在設計圖的坐標平面上，畫出此拋物線為

$\Gamma: y^2 = 8x$ ，如圖中的實線。但大家討論後認為 Γ 開口太大，建議保持 Γ 的頂點不變且仍維持

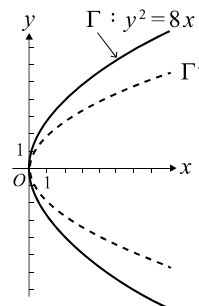
拋物線造型，並調整開口如圖(三)中的虛線 Γ' 。若 Γ' 的正焦弦長為4單位長，則下列有關

Γ' 的敘述何者正確？

(A)焦點坐標為 $(1, 0)$ (B)方程式為 $y^2 = 6x$

(C)焦距為2 (D)準線為 $x = -2$

Ans : (A)



【114CII】

正焦弦長為 $4c = 4 \rightarrow \Gamma': y^2 = 4x, c = 1$

$\rightarrow V(0,0), F(1,0) \#$

已知 $a > 0$ ，拋物線 $y = ax^2$ 的正焦弦 $\overline{F_1F_2}$ 長度為 8，且其頂點為 V ，則 $\triangle VF_1F_2$ 的面積為何？

- (A) 8 (B) 16 (C) 24 (D) 32

【113C13】

Ans : (A)

$$4c = 8 \rightarrow c = 2$$

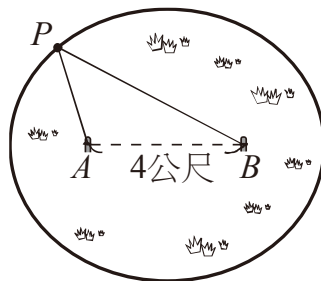
$$\triangle VF_1F_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8 \quad \#$$

農夫將一隻牛的項圈串上一條長 8 公尺的繩子，並將繩子的兩端分別套在相距 4 公尺的兩根木樁上。假設牛在草地上移動的最大範圍為一橢圓形區域，如圖所示，其中 A 、 B 為木樁位置，而 P 為牛的位置，且 $\overline{PA} + \overline{PB} \leq 8$ (公尺)，則牛離兩根木樁連線 $\overline{AB}$ 的最遠距離約為多少公尺？

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 12

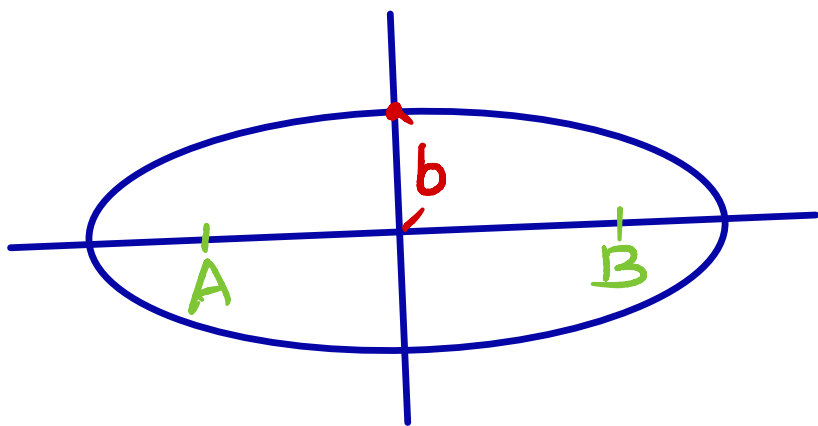
【112C21】

Ans : (B)



$$\begin{cases} \overline{PA} + \overline{PB} = 2a = 8 \\ \overline{AB} = 2c = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12 \rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{✗}$$



若 $P(x, y)$ 為橢圓 $4x^2 + 6y^2 - 12y - 6 = 0$ 上任意一點，則 $x + 3y$ 的最大值為何？

- (A) $3 + 7\sqrt{3}$ (B) $3 + 5\sqrt{3}$ (C) $3 + 3\sqrt{5}$ (D) $3 + \sqrt{21}$

【111C24】

Ans : (D)

$$4x^2 + 6(y^2 - 2y + 1) = 6 + 6$$

$$4x^2 + 6(y-1)^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1 \rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3}} = \cos\theta \\ \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\sin\theta + 1 \end{cases}$$

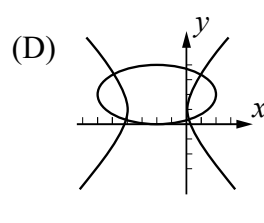
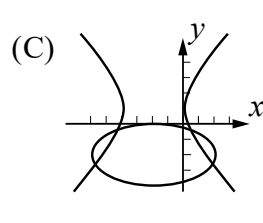
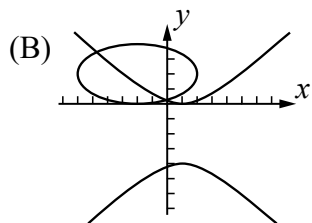
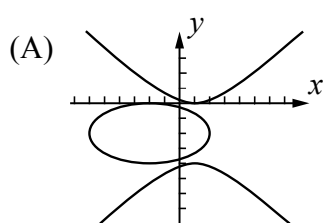
$$x + 3y = \sqrt{3}\cos\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta + 3$$

$$\therefore -\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2} \leq \sqrt{3}\cos\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta \leq \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2}$$

$$\text{即 } -\sqrt{21} \leq \sqrt{3}\cos\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta \leq \sqrt{21}$$

$$3 - \sqrt{21} \leq \sqrt{3}\cos\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta + 3 \leq \underline{3 + \sqrt{21}} \quad *$$

若有兩個二次曲線方程式，分別為 $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y + 4 = 0$ 與 $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$ ，則下列何者為此兩曲線的圖形組合？



Ans : (D)

【110C09】

$$(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 4y + 4) = -4 + 4 + 16$$

$$(x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 16$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \rightarrow \text{中心}(-2, 2)$$

$\rightarrow$ 排除(A)、(C)

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1 \rightarrow \text{左右型且中心}(-2, 1)$$

$\rightarrow$ 排除(A)、(B)

故選 (D) *

若給定一橢圓標準式 $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{144} = 1$ ，則下列何者正確？

(A) $(4, -2)$ 為其中一焦點 (B) $(9, -2)$ 為其中一長軸頂點

(C) $(4, 10)$ 為其中一短軸頂點 (D) 正焦弦長為 $\frac{25}{6}$

【109C07】

Ans : (D)

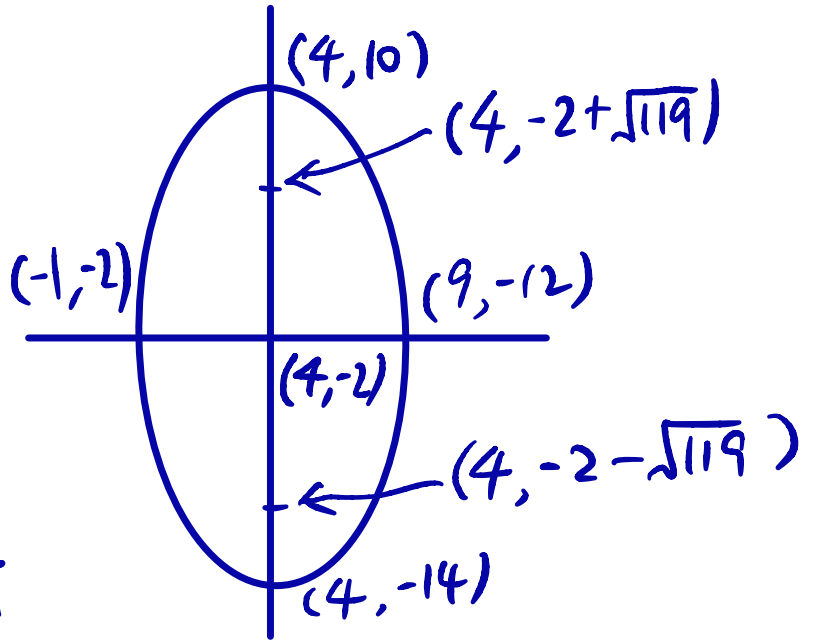
$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{144} = 1$$

① 上下型

② 中心 $(4, -2)$

$$\textcircled{3} \begin{cases} a^2 = 144 \rightarrow a = 12 \\ b^2 = 25 \rightarrow b = 5 \\ c^2 = 119 \rightarrow c = \sqrt{119} \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \text{正焦弦長} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 25}{12} = \frac{25}{6} \times$$

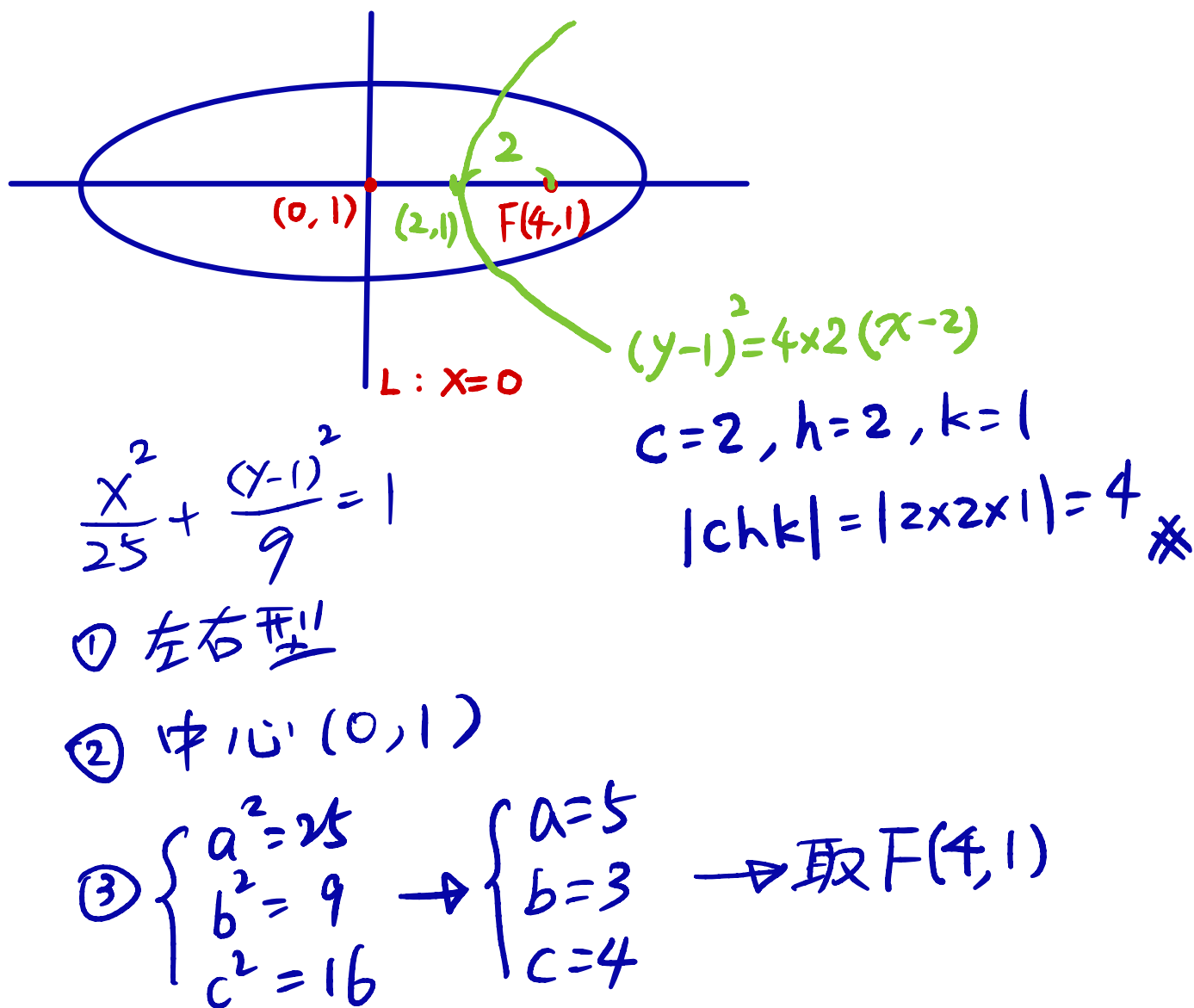


已知點 F 及直線 L 分別為橢圓 $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ 的焦點及短軸。若以直線 L 為準線及點 F 為焦點所作出拋物線的方程式為 $4c(x-h) = (y-k)^2$ ，則 $|chk| = ?$

(A) 12 (B) 8 (C) 6 (D) 4

【108C22】

Ans : (D)



已知 F_1, F_2 為橢圓 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ 的焦點，且 F_3, F_4 為雙曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦點。若 P 點為上述橢圓與雙曲線之交點，則下列何者正確？

(A) $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 24$ (B) $\overline{PF_3} + \overline{PF_4} = 26$ (C) $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 6$ (D) $|\overline{PF_3} - \overline{PF_4}| = 6$ 【108C23】

Ans : (B)

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} a^2 = 169 \rightarrow a = 13 \\ b^2 = 144 \\ c^2 = 25 \rightarrow c = 5 \end{array} \right)$$

$$F_1(-5, 0), F_2(5, 0), \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2 \times 13 = 26$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} A^2 = 16 \rightarrow A = 4 \\ B^2 = 9 \\ c^2 = 25 \rightarrow c = 5 \end{array} \right)$$

$$F_3(-5, 0), F_4(5, 0), |\overline{PF_3} - \overline{PF_4}| = 2 \times 4 = 8$$

$$\therefore F_1 = F_3 \text{ 且 } F_2 = F_4$$

$$\therefore \underline{\overline{PF_3} + \overline{PF_4} = 26} \text{ 且 } |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 8 *$$

若雙曲線 $4x^2 - 16y^2 + 4x + 16y + 1 = 0$ 的實軸長及正焦弦長分別為 i 、 j ，則 $i + j = ?$

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 5

【106C21】

Ans : (D)

$$4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 16\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = -1 + 1 - 4$$

$$4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 16\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -4$$

$$4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{1} = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow 2a = 1 \rightarrow i = 1$$

$$b^2 = 1$$

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 1}{\frac{1}{2}} = 4 \rightarrow j = 4$$

$$\text{故 } i + j = 1 + 4 = 5$$

已知一橢圓之焦點分別為 $(3, 3)$ 及 $(-1, 3)$ ，且過點 $(3, 6)$ ，則下列何者為橢圓上的點？

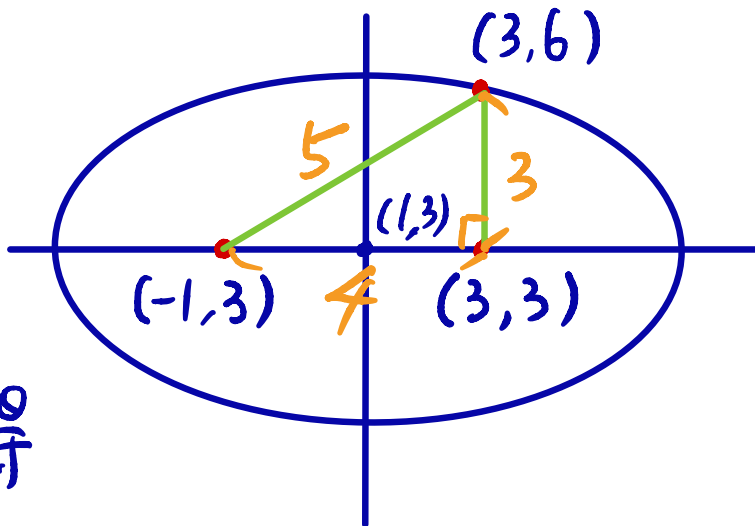
- (A) $(-1, 0)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(2, 3)$ (D) $(4, 5)$

【105C21】

Ans : (A)

依題意可作如圖

$$\Gamma: \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1$$



(A) 以 $(-1, 0)$ 代入得

$$\frac{1}{\cancel{16}^4} + \frac{3}{\cancel{12}^4} = 1 \quad (\text{合})$$

$(-1, 0)$ 在 Γ 上 *

$$2a = 5 + 3 = 8 \rightarrow a = 4 \\ \rightarrow a^2 = 16$$

$$2c = 4 \rightarrow c = 2 \rightarrow c^2 = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$$

橢圓 $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y - 284 = 0$ 之兩焦點在哪兩個象限？

- (A) 一、二 (B) 二、三 (C) 三、四 (D) 一、四

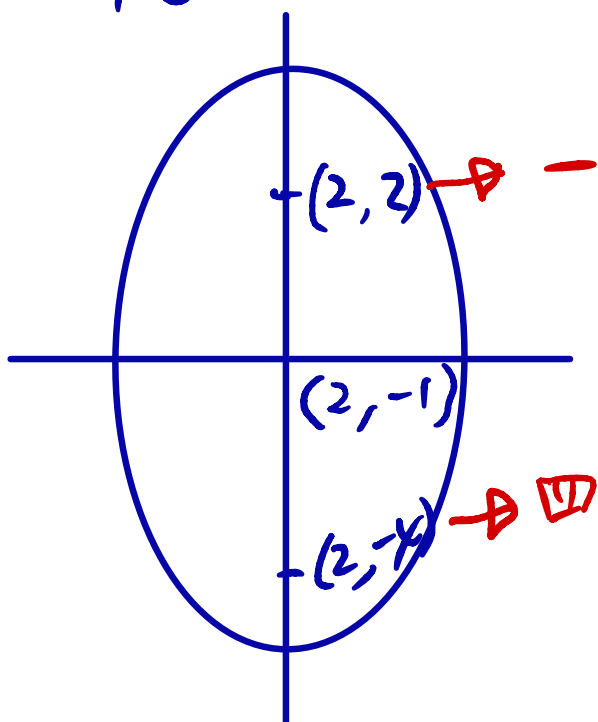
【104C19】

Ans : (D)

$$25(x^2 - 4x + 4) + 16(y^2 + 2y + 1) = 284 + 100 + 16$$

$$25(x-2)^2 + 16(y+1)^2 = 400$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \\ c^2 = 9 \rightarrow c = 3 \end{array} \right)$$



設 F 、 F' 為橢圓 $25x^2 + 9y^2 = 225$ 的兩焦點，點 $P(-3, 0)$ 為橢圓上一點，則 $\overline{PF} + \overline{PF'}$ 之值為何？

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 15

【103C02】

Ans : (C)

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} a^2 = 25 \rightarrow a = 5 \\ b^2 = 9 \\ c^2 = 16 \end{array} \right)$$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a = 2 \times 5 = 10 \quad \#$$

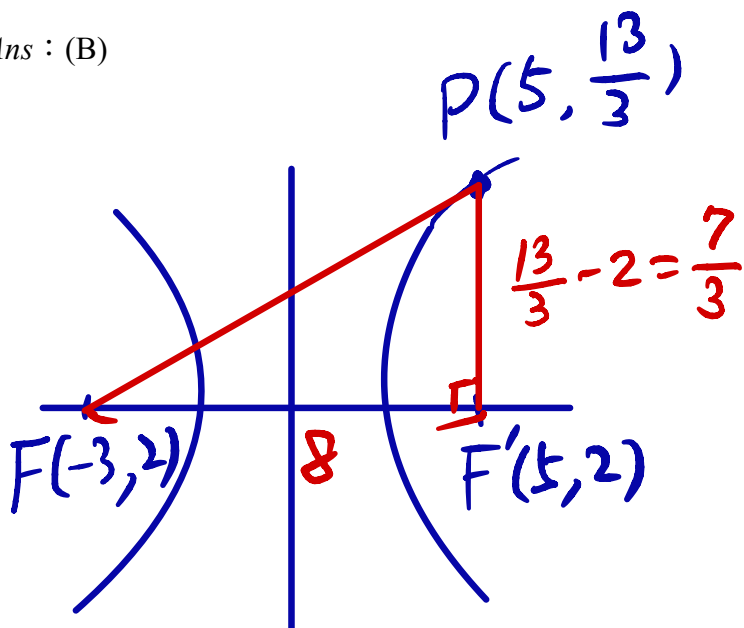
設雙曲線的兩焦點分別為 $F(-3, 2)$ 、 $F'(5, 2)$ ，且此雙曲線過 $P(5, \frac{13}{3})$ ，則此雙曲線的實

軸長為何？

(A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 14

【102C08】

Ans : (B)



$$\therefore \overline{PF'} : \overline{FF'} = \frac{7}{3} : 8 = 7 : 24$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PF'} : \overline{FF'} : \overline{PF} &= 7 : 24 : 25 \\ &= \frac{7}{3} : 8 : \frac{25}{3} \end{aligned}$$

$$\overline{PF} = \frac{25}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } |\overline{PF} - \overline{PF'}| &= 2a \rightarrow 2a = \frac{25}{3} - \frac{7}{3} \\ &= \frac{18}{3} \\ &= 6 \end{aligned}$$

已知點 $P(x, 6)$ 為拋物線 $y^2 = 8x$ 上一點， F 為此拋物線的焦點， L 為過 P 且與 x 軸垂直的直線，如圖(二)。求由 $\overline{PF}$ 、 L 與 x 軸所圍成的三角形面積為何？

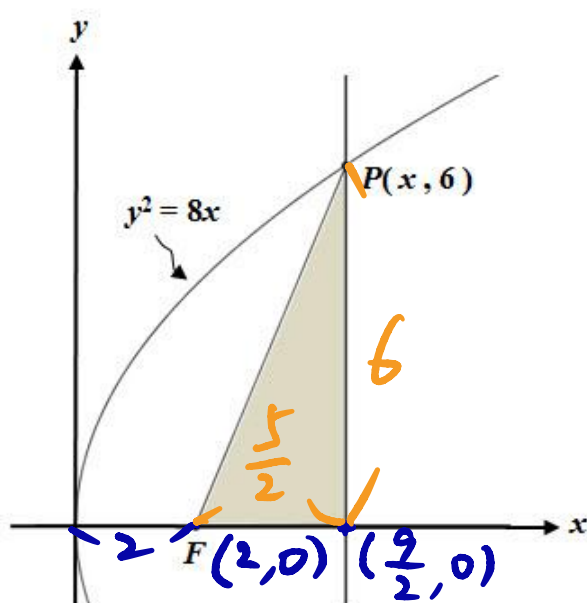
(A) $\frac{15}{2}$

(B) 8

(C) $\frac{17}{2}$

(D) 9

Ans : (A)



【102C15】

圖(二)

$$6^2 = 8x \rightarrow x = \frac{9}{2} \rightarrow P\left(\frac{9}{2}, 6\right)$$

$$y^2 = 8x \rightarrow 4c = 8 \rightarrow c = 2 \rightarrow F(2, 0)$$

$$\frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 6 = \frac{15}{2} \quad \#$$

設拋物線 $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 之頂點為 V 且與直線 $L: y = 1$ 相交於 A 、 B 兩點，則 $\triangle ABV$ 之面積為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

【101C03】

Ans : (B)

$$(x^2 - 2x + 1) = 4y$$

$$(x-1)^2 = 4y \rightarrow V(1, 0)$$

$$y=1 \rightarrow x^2 - 2x - 4 + 1 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad +1 \\ \times \\ 1 \quad -3 \end{array}$$

$$\rightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$\rightarrow x = -1 \text{ 或 } x = 3$$

取 $A(-1, 1)$, $B(3, 1)$

$$\vec{VA} = (-2, 1)$$

$$\vec{VB} = (2, 1)$$

$$\triangle ABV = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

已知一橢圓方程式為 $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ 。若點 $P(x, y)$ 為此橢圓上任一點，則

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = ?$$

(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10

【100C04】

Ans : (D)

$$P(x, y), F_1(-5, 1), F_2(3, 1)$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\text{而 } a^2 = 25 \rightarrow a = 5$$

$$\text{故所求} = 2a = 2 \times 5 = 10$$

設拋物線的對稱軸平行 x 軸，且過 $(8, -3)$ 、 $(8, 1)$ 、 $(2, -2)$ 三點，則此拋物線之頂點坐標為何？

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(-1, 1)$ (C) $(0, -1)$ (D) $(1, -1)$

【100C18】

Ans : (C)

對稱軸平行 x 軸 $\rightarrow$ 左右型

設 $x = ay^2 + by + c$

則可得

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 8 \\ a + b + c = 8 \\ 4a - 2b + c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8a - 4b = 0 \rightarrow b = 2a \\ 3a - 3b = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a - 6a = -6 \\ -3a = -6 \\ a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$2 + 4 + c = 8 \rightarrow c = 2$$

$$\text{故 } x = 2y^2 + 4y + 2$$

$$= 2(y^2 + 2y + 1)$$

$$= 2(y+1)^2 \rightarrow V(0, -1) \times$$

關於拋物線 $P: x = 4y^2 + 8y$ ，下列敘述何者正確？

(A) 開口向下 (B) 頂點在 $(-4, -1)$ (C) 準線是 $y = -1$ (D) 正焦弦長為 4

【99C02】

Ans : (B)

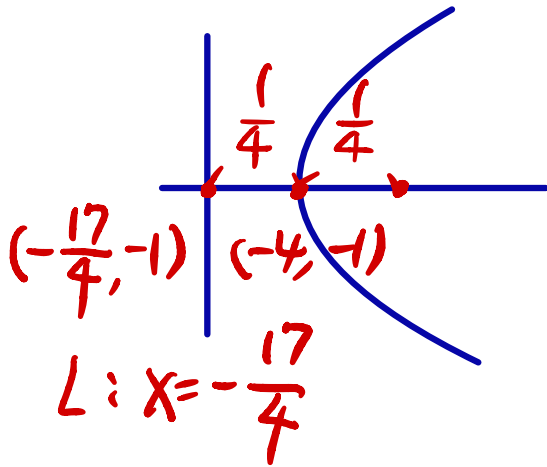
$$4(y^2 + 2y + 1) = x + 4$$

$$4(y+1)^2 = (x+4) \rightarrow (y+1)^2 = \frac{1}{4}(x+4)$$

→ 開口向右, $V(-4, -1)$ *

$$4c = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow c = \frac{1}{16}$$



若雙曲線 $H: 9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$ ，則下列直線何者是雙曲線 H 的漸近線？

(A) $L_1: 2x + 3y - 14 = 0$ (B) $L_2: 2x - 3y + 10 = 0$

(C) $L_3: 3x + 2y - 14 = 0$ (D) $L_4: 3x - 2y + 10 = 0$

【98C18】

Ans : (C)

$$9(x^2 - 8x + 16) - 4(y^2 - 2y + 1) = -176 + 144 - 4$$

$$9(x-4)^2 - 4(y-1)^2 = -36$$

$\overset{3^2}{\underset{3^2}{9}} \quad \overset{2^2}{\underset{2^2}{4}}$

$$\text{取 } (3x-12)^2 - (2y-2)^2 = 0$$

$$(3x-12+2y-2)(3x-12-2y+2) = 0$$

$$(3x+2y-14)(3x-2y-10) = 0$$

兩漸近線為 $3x+2y-14=0$ 、 $3x-2y-10=0$

ch14_微分

試問函數 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ 在下列哪個區間內為遞增？

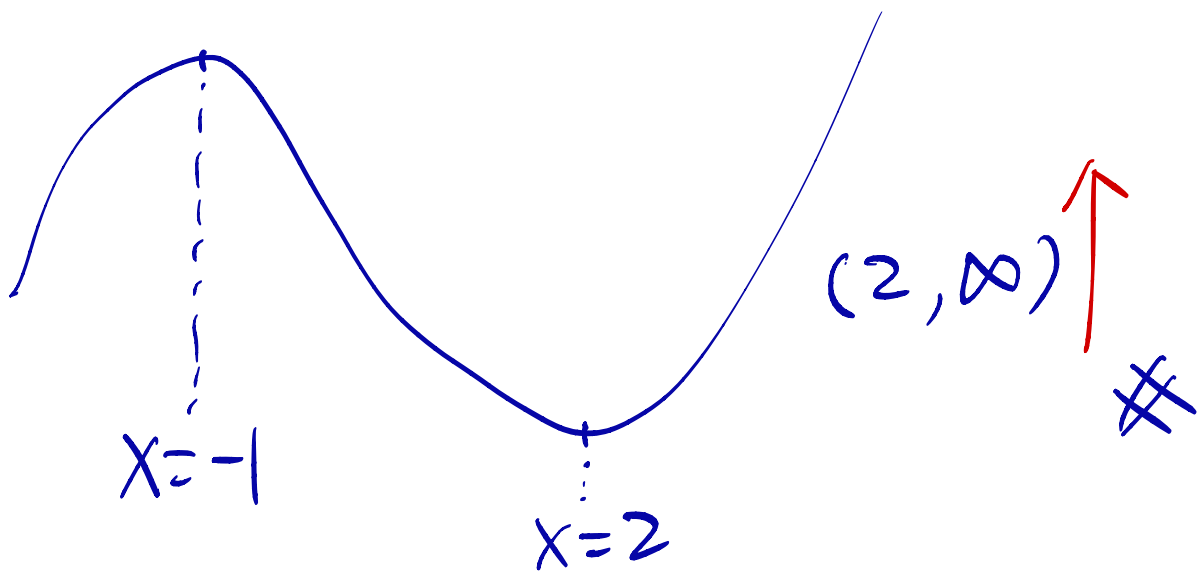
- (A) $(-2, 1)$ (B) $(-1, 2)$ (C) $(-\infty, 1)$ (D) $(2, \infty)$

【114C12】

Ans : (D)

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \underset{\substack{| \\ X \\ -2}}{x^2} - \underset{\substack{| \\ X \\ -2}}{x} - \underset{\substack{| \\ X \\ -2}}{2} = 0 \rightarrow x = -1 \text{ or } 2$$



芳芳用一張長度為3尺、寬度為2尺的紙板設計紙盒，從長度為3尺的兩邊 A_i 點剪至 B_i 點，再將 A_i 點對折至 B_i 點，並將長方形 $A_i B_i D_i C_i$ 插入內部以固定紙盒，其中 $i=1, 2, 3, 4$ ，作法如圖所示。設 $\overline{B_i D_i} = a$ 尺，且 $\overline{A_i B_i} = 2a$ 尺， $i=1, 2, 3, 4$ 。若摺出的紙盒有最大體積，則

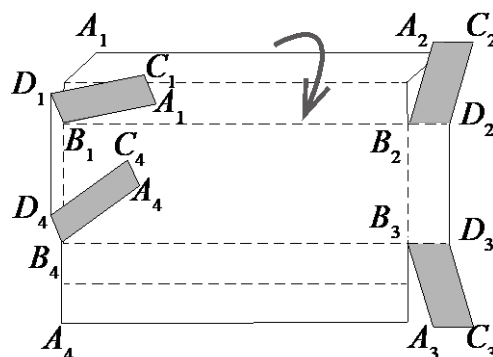
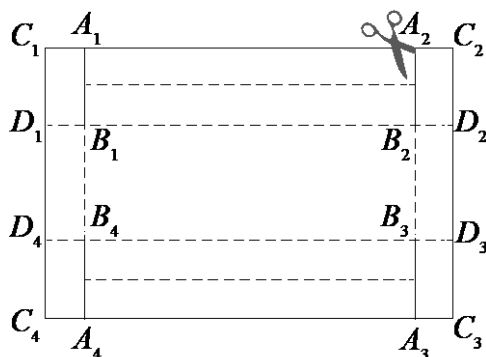
$a = ?$

(A) $\frac{3-\sqrt{7}}{6}$

(B) $\frac{4-\sqrt{7}}{6}$

(C) $\frac{5-\sqrt{7}}{12}$

(D) $\frac{6-\sqrt{7}}{12}$



Ans : (B)

【114C25】

$$V(x) = x(3-2x)(2-4x)$$

$$= 8x^3 - 16x^2 + 6x$$

$$V'(x) = 24x^2 - 32x + 6$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16x + 3 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 144}}{24} = \frac{16 \pm \sqrt{112}}{24} = \frac{16 \pm 4\sqrt{7}}{24} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{6}$$

得 $a = \frac{4-\sqrt{7}}{6}$

$$\left\{ \begin{array}{l} V''(x) = 48x - 32 \\ V''\left(\frac{4+\sqrt{7}}{6}\right) > 0 \\ V''\left(\frac{4-\sqrt{7}}{6}\right) < 0 \Rightarrow a = \frac{4-\sqrt{7}}{6} \end{array} \right.$$

若實係數多項式函數 $f(x) = ax^4 + bx^2 - 2x + c$ ，其導函數為 $f'(x) = 8x^3 - 6x + d$ 且 $f(1) = 5$ ，則 $a + b + c + d = ?$

(A) 11 (B) 9 (C) 7 (D) 5

【113CII】

Ans : (D)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4ax^3 + 2bx - 2 \\ &= 8x^3 - 6x + d \end{aligned}$$

$$4a = 8 \rightarrow a = 2$$

$$2b = -6 \rightarrow b = -3$$

$$d = -2$$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 2x + c$$

$$f(1) = 5 \rightarrow 2 - 3 - 2 + c = 5 \rightarrow c = 8$$

$$\text{故 } a + b + c + d = 2 + (-3) + 8 + (-2) = 5_{*}$$

下列哪一函數在 $x=1$ 的極限存在，但不連續？

(A) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (C) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ (D) $f(x) = (x-1)^2$ 【113C23】

Ans : (A)

$$(A) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 1+1=2 \rightarrow \text{存在}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \rightarrow x \neq 1 \rightarrow \text{在 } x=1 \text{ 處不連續}$$

故選 (A)

$$(B) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \text{ 不存在}$$

$$(C) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{-(x-1)}}{\cancel{x-1}} = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} \text{ 不存在}$$

$$(D) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 \rightarrow \text{存在}$$

$$f(x) = (x-1)^2 \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow \text{連續}$$

已知 a, b 為實數， $f(x) = \sqrt{x} - x$ ， $g(x) = ax^3 + bx$ 的圖形均通過點 $(1,0)$ 。若 $f(x)$ 以 $(1,0)$ 為切點的切線 L_1 ，與 $g(x)$ 以 $(1,0)$ 為切點的切線 L_2 相互垂直，則下列何者為真？

- (A) $a = -1$ (B) $b = 1$ (C) $ab = 1$ (D) $ab = -1$

【112C23】

Ans : (D)

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 \rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$g(x) = ax^3 + bx$$
$$g'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow g'(1) = 3a + b$$

$$\because L_1 \perp L_2 \quad \therefore \left(-\frac{1}{2}\right) \times (3a + b) = -1$$

$$\text{即 } 3a + b = 2 \quad \text{--- ①}$$

$$g(1) = a + b = 0 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{解 ①, ② 得 } a = 1, b = -1 \rightarrow ab = -1$$

若 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x - 74$ ，則下列何者為真？

(A) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x = 6$ (B) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x = 4$

(C) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x = -1$ (D) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x = -6$ 【112C24】

Ans : (D)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x - 74$$

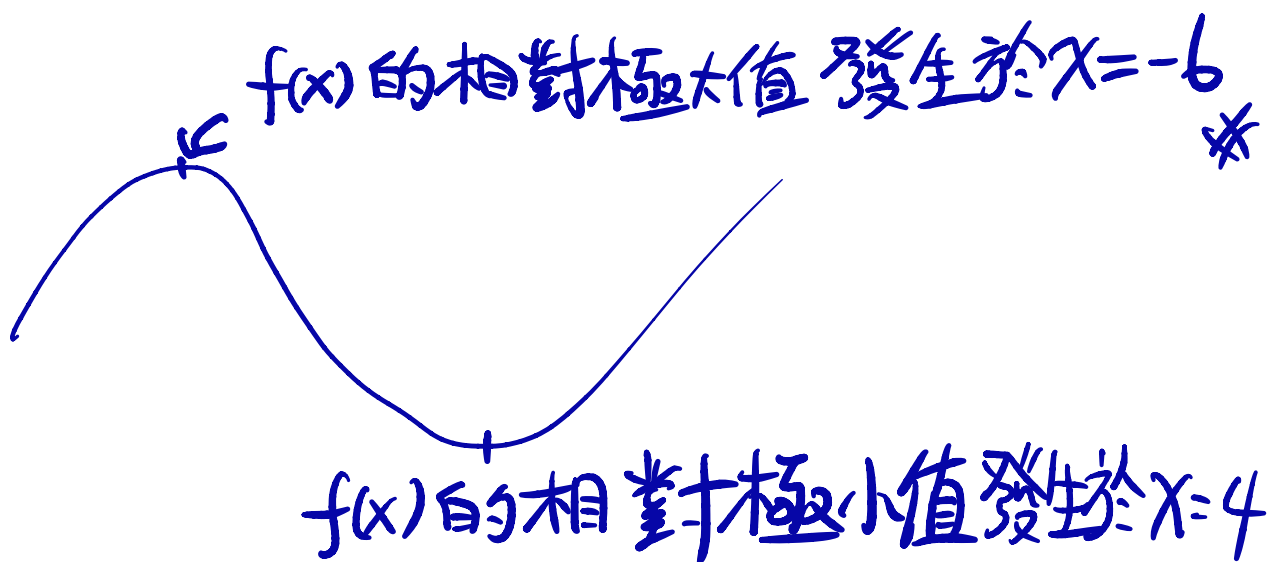
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 72$$

$$= 3(x^2 + 2x - 24)$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad \times \quad -4 \\ \quad \quad \quad +6 \end{array}$$

$$= 3(x-4)(x+6)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 4 \text{ or } x = -6$$



若四次多項式 $ax^4 + bx^3 + 6x^2 + 5x + 2$ 除以 $(x+1)^2$ 所得的餘式為 $3x+4$ ，則 $a+b = ?$

(A) -12 (B) -6 (C) -4 (D) -2

【111C10】

Ans : (B)

$$ax^4 + bx^3 + 6x^2 + 5x + 2 = (x+1)^2 \cdot Q(x) + 3x + 4$$

$$ax^4 + bx^3 + 6x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 \cdot Q(x)$$

$$x = -1 \rightarrow a - b + 6 - 2 - 2 = 0$$

$$\rightarrow a - b = -2 \text{ --- ①}$$

$$4ax^3 + 3bx^2 + 12x + 2 = 2(x+1) \cdot Q(x) + (x+1)^2 \cdot Q'(x)$$

$$x = -1 \rightarrow -4a + 3b - 12 + 2 = 0$$

$$\rightarrow 4a - 3b = -10 \text{ --- ②}$$

解①, ②得 $a = -4$, $b = -2$

故 $a+b = (-4) + (-2) = -6$ ✱

已知函數 $f(x) = x^3 + \frac{12}{x}$ 圖形在切點 (a, b) 的切線斜率為 9。若 $a > 0$ ，則 $a + b = ?$

(A) -8 (B) 11 (C) 14 (D) 16

【111C18】

Ans : (D)

$$f(x) = x^3 + 12x^{-1}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x^{-2}$$

$$f'(a) = 3a^2 - 12a^{-2} = 9$$

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$$

$$(a^2)^2 - 3 \cdot (a^2) - 4 = 0$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \end{array} \times \begin{array}{c} +1 \\ -4 \end{array}$$

$$(a^2 + 1)(a^2 - 4) = 0 \rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{a > 0} a = 2$$

$$f(2) = b \rightarrow 2^3 + \frac{12}{2} = b \rightarrow b = 14$$

$$\text{故 } a + b = 2 + 14 = 16 \quad \times$$

若函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+a}{x^2-2x-3}, & x > 3 \\ \frac{x-5}{x-b}, & x \leq 3 \end{cases}$ 在 $x=3$ 連續，則 $a+b = ?$

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

【111C25】

Ans : (C)

$\therefore f(x)$ 在 $x=3$ 連續

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+a}{x^2-2x-3} = \frac{3-5}{3-b} = \frac{-2}{3-b} \text{ 存在}$$

故 $\begin{cases} \textcircled{1} 2 \times 3 + a = 0 \rightarrow a = -6 \\ \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+a}{x^2-2x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{2x-2} = \frac{2}{2 \times 3 - 2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{-2}{3-b} = \frac{1}{2} \rightarrow 3-b = -4 \rightarrow b = 7$$

$$a+b = (-6) + 7 = 1 \quad \#$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(3+h)+2} - \frac{1}{3+2}}{h} = ?$$

(A) $-\frac{1}{25}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{25}$

【110C05】

Ans : (A)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h+5} - \frac{1}{5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{h+5}\right)' - 0}{1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(h+5)^2}$$

$$= \frac{-1}{5^2}$$

$$= -\frac{1}{25} \quad \text{xx}$$

若直線 $y = mx$ 與拋物線 $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ 相切，且切點在第一象限內，則 $m = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

【110C22】

Ans : (B)

設切點為 (x_0, y_0)

$$\text{則} \begin{cases} y_0 = mx_0 & \text{--- ①} \\ y_0 = -x_0^2 + 4x_0 - 1 & \text{--- ②} \\ f'(x) = -2x + 4 \rightarrow -2x_0 + 4 = m & \text{--- ③} \end{cases}$$

$$\text{以 ① 代入 ② 得 } mx_0 = -x_0^2 + 4x_0 - 1 \quad \text{--- ④}$$

$$\text{以 ③ 代入 ④ 得 } (-2x_0 + 4)x_0 = -x_0^2 + 4x_0 - 1$$

$$\begin{aligned} -2x_0^2 + 4x_0 &= -x_0^2 + 4x_0 - 1 \rightarrow x_0^2 = 1 \\ &\rightarrow x_0 = \pm 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ 切點在第一象限內

$$\therefore x_0 = 1 \xrightarrow{\text{代入 ②}} y_0 = -1 + 4 - 1 = 2$$

$$\text{故由 ① 得 } 2 = m \times 1 \rightarrow m = 2 \quad \times$$

關於下列各極限，何者錯誤？

(A) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[3]{x-2} = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x-2} = 0$ (C) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[3]{x-2} = 0$ (D) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$

【109C01】

Ans : (B)

(B) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x-2}$ 不存在

根號內為負，不合！

設 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ 在閉區間 $[-3, 3]$ 內的最大值與最小值分別為 m 、 n ，則 $m - n = ?$

(A) 90 (B) 98 (C) 100 (D) 108

【109C13】

Ans : (B)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$

$$= 3(x^2 - 2x - 8)$$
$$\quad \quad \quad \begin{array}{c} 1 \quad \quad 2 \\ | \quad \times \quad - \\ 1 \quad \quad 4 \end{array}$$

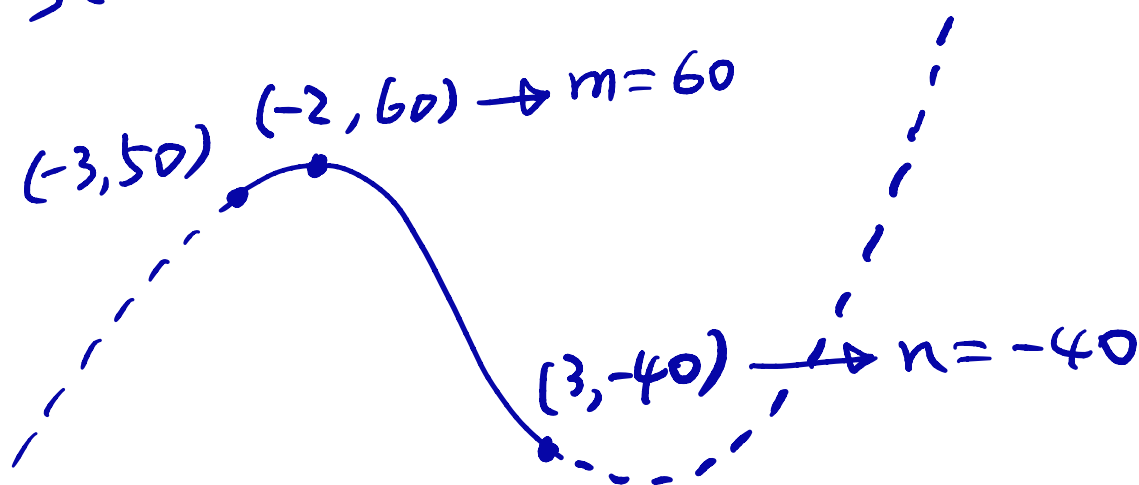
$$= 3(x+2)(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -2 \text{ or } x = 4$$

$$f(-3) = -27 - 27 + 72 + 32 = 50$$

$$f(-2) = -8 - 12 + 48 + 32 = 60$$

$$f(3) = 27 - 27 - 72 + 32 = -40$$



故 $m - n = 60 - (-40) = 60 + 40 = 100$ ✖

設 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 2 \\ x^2-2x+3, & x \leq 2 \end{cases}$ ，則 $f'(2) = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不存在

【109C17】

Ans : (B)

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2x+3-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 2$$

$$2 = 2 \rightarrow f'(2) = 2 \quad \times$$

已知函數 $f(x)$ 的導函數為 $g(x) = x^2 - 4x + 2$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

【108C15】

Ans : (B)

$$f'(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$$= 1 - 4 + 2$$

$$= -1 \quad \times$$

小明設計了一款迴力鏢，已知將此迴力鏢擲出後，迴力鏢經過了時間 t 秒後與小明的距離為

$f(t) = \frac{100t}{t^2+9}$ 公尺，若在 t_0 秒時，迴力鏢離小明最遠，則 $t_0 = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【108C25】

Ans : (C)

$$f(t) = \frac{100t}{t^2+9}$$

$$f'(t) = \frac{100(t^2+9) - 100t \cdot (2t)}{(t^2+9)^2} = \frac{-100t^2+900}{(t^2+9)^2}$$

$$f'(t) = 0 \rightarrow -100t^2 + 900 = 0$$

$$\rightarrow t^2 = 9$$

$$\rightarrow t = 3$$

$$\ast f''(t) = \frac{-200t(t^2+9)^2 - (-100t^2+900) \cdot 2(t^2+9)(2t)}{(t^2+9)^4}$$

$$f''(3) = \frac{-600 \times 18^2 + 0}{18^4} = -\frac{600}{18^2} < 0$$

在 $t_0 = 3$ 時有 max.

若直線 L 過點 $(9, 5)$ ，且與函數 $y = f(x)$ 的圖形相切於點 $(3, 1)$ ，則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = ?$

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3

【107C17】

Ans : (B)

$$y = f(x) \text{ 在 } x=3 \text{ 處之切線斜率} = \frac{5-1}{9-3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{即 } f'(3) = \frac{2}{3}$$

$$\text{而 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = \frac{2}{3} \quad \times$$

若函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ ，且 $f(0) = 6$ ，則 $f(x)$ 的相對極小值為何？

(A) -5 (B) -4 (C) -3 (D) -2

【107C18】

Ans : (C)

由 $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ 可知

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C$$

$$f(0) = 6 \rightarrow C = 6$$

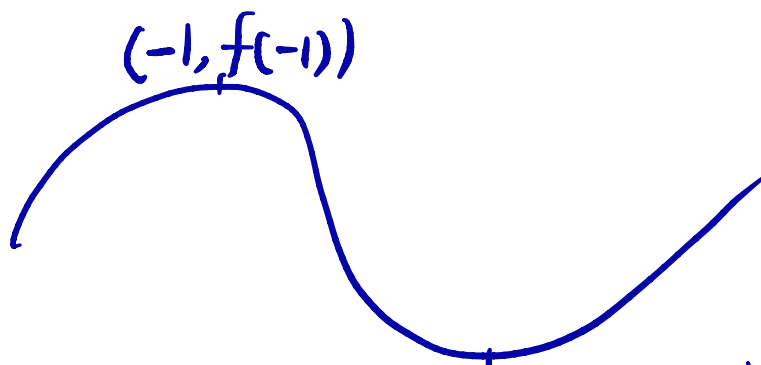
$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 6$$

$$\text{而 } f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$\begin{array}{c} | \quad \times \quad | \\ | \quad \times \quad | \\ | \quad \times \quad | \end{array}$

$$\rightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$\rightarrow x = -1 \text{ 或 } x = 3$$



$$\begin{aligned} (3, f(3)) &\rightarrow \min. = f(3) \\ &= 9 - 9 - 9 + 6 \\ &= -3 \end{aligned}$$

已知 a 、 b 為實數，且 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 13$ 。若 $f'(-1) = 1$ 且 $f'(0) = 2$ ，則 $a + b = ?$

(A) -1 (B) 0 (C) 3 (D) 4

【106C22】

Ans : (D)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 13$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} f'(-1) = 1 \\ f'(0) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 - 2a + b = 1 \\ b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{故 } a + b = 2 + 2 = 4 \quad *$$

若 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$ 的相對極大值為 a ，相對極小值為 b ，則 $a+b = ?$

- (A) $\frac{-27}{2}$ (B) $\frac{-3}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) $\frac{27}{2}$

【106C23】

Ans : (C)

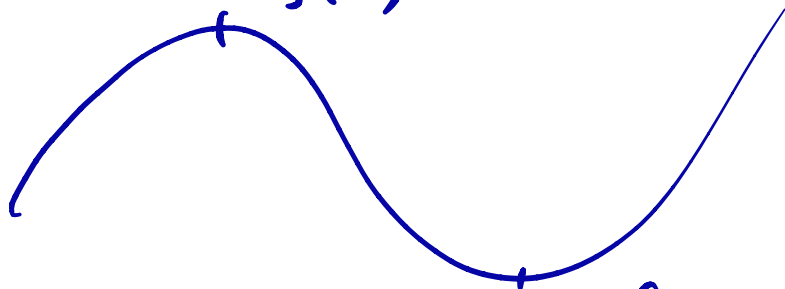
$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3x - 6 \\ &= 3(x^2 - x - 2) \\ &\quad \quad \quad \begin{array}{c} | \quad \times \quad + \\ \quad \quad \quad -2 \end{array} \end{aligned}$$

$$= 3(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ 或 } x = 2$$

$$\text{max.} = f(-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 + 3 = \frac{13}{2}$$



$$\text{min.} = f(2) = 8 - 6 - 12 + 3 = -7$$

$$\text{故 } a = \frac{13}{2}, b = -7 \rightarrow a+b = \frac{13}{2} + (-7) = -\frac{1}{2} *$$

若 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < -1 \\ 2, & x = -1 \\ 6 - 3x^2, & x > -1 \end{cases}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = ?$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【106C25】

Ans : (D)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 2) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (6 - 3x^2) = 6 - 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3 \quad \text{✗}$$

已知 $f(x) = \frac{x(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}$ ，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的導數 $f'(0)$ 之值。

- (A) $-\frac{16}{3}$ (B) $-\frac{8}{3}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$

【105C22】

Ans : (A)

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}} \\ &= \frac{(-1) \times 16}{3} \\ &= -\frac{16}{3} \quad * \end{aligned}$$

求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2-h}}{h} = ?$

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【104C12】

Ans : (D)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^{\frac{1}{2}} - (2-h)^{\frac{1}{2}}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot (2+h)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (2-h)^{-\frac{1}{2}} \times (-1)}{1} \\&= \frac{1}{2} \times 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times 2^{-\frac{1}{2}} \\&= 2^{-\frac{1}{2}} \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \# \end{aligned}$$

已知 a 、 b 為實數，若過函數 $f(x) = ax^2 + bx$ 圖形上一點 $P(1, 5)$ 的切線斜率為 3，則 $f'(2) = ?$

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

【104C20】

Ans : (B)

$$f(1) = 5 \rightarrow a + b = 5 \text{ --- ①}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(1) = 3 \rightarrow 2a + b = 3 \text{ --- ②}$$

$$\text{解 ①, ② 得 } a = -2, b = 7$$

$$\text{故 } f'(x) = -4x + 7$$

$$f'(2) = -8 + 7 = -1 \quad \times$$

設直線 $8x + y = c$ 為拋物線 $y = 4(x-1)^2$ 之切線，則 c 之值為何？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

【103C10】

Ans : (A)

$$8x + y = c \rightarrow y = -8x + c \rightarrow \text{切線斜率} = -8$$

設切點 (x_0, y_0)

$$\text{則 } 8x_0 + y_0 = c \quad \text{--- ①}$$

$$\text{且 } y' = 8(x-1) \rightarrow 8(x_0-1) = -8 \quad \text{--- ②}$$

$$\begin{aligned} \text{由 ② 得 } x_0 - 1 &= -1 \rightarrow x_0 = 0 \\ &\rightarrow y_0 = 4 \times (0-1)^2 = 4 \end{aligned}$$

切點為 $(0, 4)$

$$\text{代入 } 8x + y = c \text{ 得 } c = 4 \quad *$$

設 $f(x) = \frac{x(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}$ ，則導數 $f'(0)$ 之值為何？

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 2

【103C21】

Ans : (D)

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{(-1) \times (-4)}{1 \times 2}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

已知 a, b 為實數， $f(x) = (ax+b)^3$ 。若 $f(2)=1$ 且 $f'(2)=6$ ，則 $a-b = ?$

(A) -2 (B) -1 (C) 3 (D) 5

【102C16】

Ans : (D)

$$f(2) = (2a+b)^3 = 1 \rightarrow 2a+b=1 \text{ --- ①}$$

$$f'(x) = 3(ax+b)^2 \cdot a$$

$$f'(2) = 3a(2a+b)^2 = 6 \text{ --- ②}$$

$$\text{以 ① 代入 ② 得 } 3a = 6 \rightarrow a=2$$

$$\text{以 } a=2 \text{ 代入 ① 得 } 4+b=1 \rightarrow b=-3$$

$$\text{故 } a-b = 2 - (-3) = 2+3 = 5$$

已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{5x^2-2x-3}, & x \neq 1 \\ C, & x = 1 \end{cases}$ 。若 f 在 $x=1$ 處連續，則 $C=?$

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

【102C23】

Ans : (B)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{5x^2-2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{10x-2} = \frac{2}{10-2} = \frac{1}{4}$$

故 $C = \frac{1}{4}$ *

若函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x) = x^2 - 6x$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ 之值為何？

- (A) 0 (B) 1 (C) 6 (D) 不存在

【101C04】

Ans : (A)

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 6^2 - 6 \times 6 = 0 \quad \text{✱}$$

設拋物線 $y = ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 處之切線方程式為 $y - 2 = 4(x - 1)$ ，則 $3a - 2b$ 之值為何？

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

【101C07】

Ans : (B)

$$y - 2 = 4(x - 1) \rightarrow \begin{cases} \text{切點}(1, 2) \\ \text{切線斜率 } f'(1) = 4 \end{cases}$$

$$(1, 2) \rightarrow a + b = 2 \text{ --- ①}$$

$$y' = 2ax + b \xrightarrow{x=1} 2a + b = 4 \text{ --- ②}$$

$$\text{解 ①, ② 得 } a = 2, b = 0$$

$$\text{故 } 3a - 2b = 6 - 0 = 6 \text{ *}$$

若 $f(x) = (x-1)^5$ ，且 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的一階導函數，則 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} = ?$

(A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) 20

【100C07】

Ans : (D)

$$f(x) = (x-1)^5$$

$$f'(x) = 5(x-1)^4$$

$$f''(x) = 20(x-1)^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} = f''(2) = 20 \times (2-1)^3 = 20$$

已知函數 $f(x) = x^2 - 3x + 5$ 與函數 $g(x) = |2x + 1|$ 圖形相交於兩點，而其 x 坐標分別為 a 與

b ，其中 $a < b$ 。若 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值分別為 m_1 與 m_2 ，則 $m_1 + m_2 = ?$

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

【99C10】

Ans : (D)

$$g(x) = |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1, & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} x^2 - 3x + 5 = 2x + 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$1 \times -4$$

$$(x-1)(x-4) = 0 \rightarrow x=1 \text{ 或 } x=4$$

$$\textcircled{2} x^2 - 3x + 5 = -2x - 1$$

$$x^2 - x + 6 = 0 \rightarrow D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 6 < 0$$

$\rightarrow$ 無實根

$$\therefore a=1, b=4$$

$$f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(1) = \underline{-1}, f'(4) = 5$$

$$g(x) = 2x + 1 \rightarrow g'(x) = 2 \rightarrow g'(1) = g'(4) = \underline{2}$$

$$\text{故 } m_1 = -1, m_2 = 2 \rightarrow m_1 + m_2 = 1$$

關於函數的導函數，下列何者正確？

(A) $f(x) = (4x+5)(6x+7)$ ，則 $f'(x) = 24$

(B) $f(x) = \sqrt[3]{x^7} + 4x$ ，則 $f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + 4$

(C) $f(x) = (4x+5)^2$ ，則 $f'(x) = 2(4x+5)$

(D) $f(x) = \frac{4x+4}{x+1}$ ，則 $f'(x) = 4$

【99C15】

Ans : (B)

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad f'(x) &= 4(6x+7) + (4x+5) \cdot 6 \\ &= 48x + 58 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad f(x) &= x^{\frac{7}{3}} + 4x \\ f'(x) &= \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + 4 \quad * \end{aligned}$$

$$\text{(C)} \quad f'(x) = 2(4x+5) \cdot 4 = 8(4x+5)$$

$$\text{(D)} \quad f(x) = \frac{\cancel{4(x+1)}}{\cancel{x+1}} = 4 \rightarrow f'(x) = 0$$

若 $f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{x-5}$ ，則 $f'(0) = ?$

- (A) $-\frac{2}{5}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

【98C22】

Ans : (A)

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x-2)}{x-5}$$

$$= \frac{(-1) \cdot (-2)}{-5}$$

$$= -\frac{2}{5} \quad \text{✗}$$

下列各曲線中，何者在 $x=1$ 處的切線斜率為 12？

(A) $y=(x^2+1)^3$ (B) $y=(2x+1)(4x^2-3)$ (C) $y=\frac{x-47}{x+1}$ (D) $y=(3x+1)^2$ 【98C23】

Ans : (C)

$$(A) \ y' = 3(x^2+1)^2 \cdot (2x) \xrightarrow{x=1} m = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

$$(B) \ y' = 2(4x^2-3) + (2x+1) \cdot (8x) \xrightarrow{x=1} m = 2 \times 1 + 3 \times 8 = 2 + 24 = 26$$

$$(C) \ y' = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-47) \cdot 1}{(x+1)^2} \xrightarrow{x=1} m = \frac{2 - (-46)}{4} = \frac{48}{4} = 12 \quad *$$

$$(D) \ y' = 2(3x+1) \cdot 3 \xrightarrow{x=1} m = 2 \times 4 \times 3 = 24$$

ch15_積分

下列何者可為函數 $f(x) = x^3 + 2x - 5$ 的反導函數？

- (A) $\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 5x$ (B) $\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 5$ (C) $\frac{x^4}{4} + x^2 - 5x - 3$ (D) $\frac{x^4}{4} + x^2 - 5$ 【114C03】

Ans : (C)

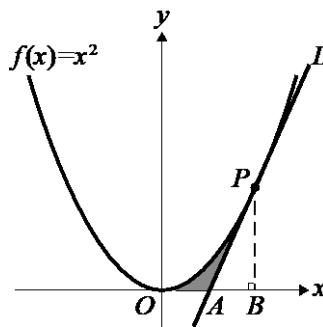
$$\int (x^3 + 2x - 5) dx = \frac{x^4}{4} + x^2 - 5x + C$$

$$\therefore \text{可為 } \frac{x^4}{4} + x^2 - 5x - 3 \quad \#$$

已知直線 L 為函數 $f(x) = x^2$ 圖形在 $P(4, 16)$ 的切線， A 點為 L 與 x 軸交點，且 B 點為 P 點在 x 軸上的投影點，如圖所示。試問 $f(x)$ 的圖形與 x 軸及直線 L 所圍成陰影區域之面積為多少平方單位？

- (A) $\frac{10}{3}$ (B) $\frac{11}{3}$ (C) $\frac{14}{3}$ (D) $\frac{16}{3}$

【114C23】



$$f'(x) = 2x$$

$$\text{切線斜率 } m = f'(4) = 2 \times 4 = 8$$

$$L: y - 16 = 8(x - 4) \xrightarrow{y=0} -16 = 8(x - 4)$$

$$\rightarrow x = 2$$

$$\rightarrow A(2, 0)$$

$$\text{又 } B(4, 0), \Delta PAB = \frac{1}{2} \times 2 \times 16 = 16$$

$$\text{所求} = \int_0^4 x^2 dx - 16$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^4 - 16$$

$$= \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3} \quad \#$$

若 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1, & 0 \leq x < 1 \\ x^2+x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 則 $\int_0^2 f(x) dx = ?$

- (A) $\frac{9}{2}$ (B) $\frac{11}{2}$ (C) $\frac{13}{2}$ (D) $\frac{19}{3}$

【113C14】

Ans : (B)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}}+1) dx + \int_1^2 (x^2+x) dx \\ &= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{2}{3} + 1 \right) + \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} + 1 + \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n}{n+1} - \frac{n^2 + 3n}{n+2} \right) = ?$$

(A) 0 (B) -1 (C) -2 (D) -3

Ans : (D)

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - n)(n+2) - (n^2 + 3n)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^3} + n^2 - 2n - \cancel{n^3} - 4n^2 - 3n}{n^2 + 3n + 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 - 5n}{n^2 + 3n + 2}$$

$$= \frac{-3}{1}$$

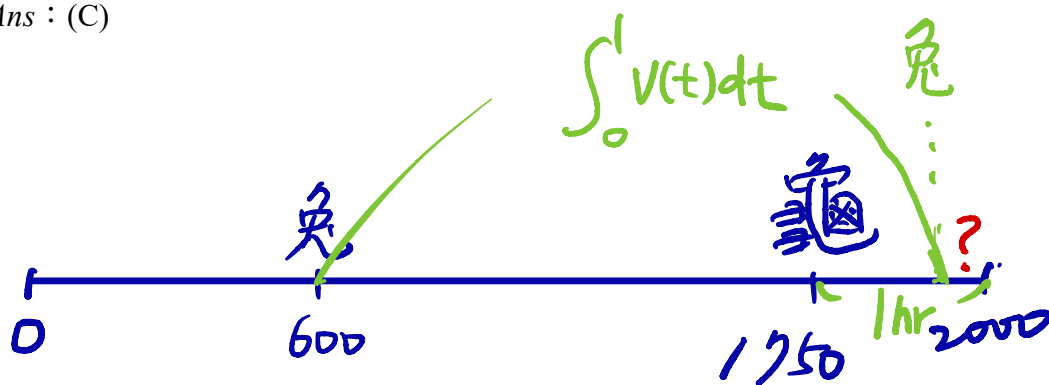
$$= -3 \quad \times$$

兔子和烏龜在一條筆直的路上賽跑，起點到終點的距離為 2000 公尺，兔子和烏龜同時從起點出發，烏龜從頭到尾都是以 250 公尺/小時的速度前進。半小時過後，兔子已經到了離起點 600 公尺處，發現烏龜還在後面慢慢地爬，兔子認為比賽太輕鬆了，於是就地睡覺，結果兔子睡了 6.5 小時。當兔子醒來發現烏龜已經超過牠了，兔子立刻以 $v(t) = 27t^2 + 52t + 1262$ (公尺/小時) 的速度去追趕，其中 $t \geq 0$ 。若烏龜先到達終點，則此時兔子離終點還有多少公尺？

(A) 57 (B) 82 (C) 103 (D) 158

【112C14】

Ans : (C)



$$\begin{aligned} & \int_0^1 (27t^2 + 52t + 1262) dt \\ &= (9t^3 + 26t^2 + 1262t) \Big|_0^1 \\ &= 9 + 26 + 1262 \\ &= 1297 \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\therefore 2000 - 600 - 1297 = 103 \text{ (m)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 8n - 3} - \sqrt{n^2 + 2n + 5}) = ?$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【112C15】

Ans : (D)

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 8n - 3} - \sqrt{n^2 + 2n + 5})(\sqrt{n^2 + 8n - 3} + \sqrt{n^2 + 2n + 5})}{\sqrt{n^2 + 8n - 3} + \sqrt{n^2 + 2n + 5}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 8n - 3) - (n^2 + 2n + 5)}{\sqrt{n^2 + 8n - 3} + \sqrt{n^2 + 2n + 5}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n - 8}{\sqrt{n^2 + 8n - 3} + \sqrt{n^2 + 2n + 5}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{8}{n}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}}$$

$$= \frac{6}{1+1}$$

$$= \frac{6}{2}$$

$$= 3 \quad \#$$

不定積分 $\int \frac{x+3}{2\sqrt{x}} dx = ?$

- (A) $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}} + C$ (B) $\frac{\frac{x^3}{2} + 3x}{x^{\frac{3}{2}}} + C$ (C) $\frac{\frac{x^2}{2} + 3x}{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}} + C$ (D) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + C$ 【111C18】

Ans : (D)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2} \int (x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} \right) + C \\ &= \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + C \quad \times\end{aligned}$$

小明計畫由基隆沿國道一號開車南下高雄渡假。早上 8:00 經過中興隧道 0 公里處的起點，經紀錄儀錶板上車速變化，在 8:00 開始後，時間 t (小時) 的速度函數為 $v(t) = -1.5t^2 + 6t + 90$ (公里/小時)。若依此速度變化，則 11:00 時小明應該最接近哪一個服務區？

(A) 泰安服務區(158 公里處) (B) 西螺服務區(229 公里處)

(C) 新營服務區(284 公里處) (D) 仁德服務區(335 公里處)

【111C20】

Ans : (C)

$$\begin{aligned} & \int_0^3 (-1.5t^2 + 6t + 90) dt \\ &= \left(-0.5t^3 + 3t^2 + 90t \right) \Big|_0^3 \\ &= -\frac{27}{2} + 27 + 270 \\ &= 283.5 \text{ (km)} \rightarrow \text{選 (C)} \end{aligned}$$

$$\int_1^4 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx = ?$$

(A) $\frac{57}{5}$ (B) $\frac{77}{5}$ (C) $\frac{87}{5}$ (D) $\frac{107}{5}$

【110C23】

Ans : (A)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_1^4 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) dx \\ &= \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}\right) \Big|_1^4 \\ &= \left(\frac{64}{5} + 1\right) - \left(\frac{2}{5} + 2\right) \\ &= \frac{64}{5} + 1 - \frac{2}{5} - 2 \\ &= \frac{57}{5} \quad \# \end{aligned}$$

設 $g(x) = 2x - 1$ ，已知在閉區間 $[-1, 1]$ 上 $f(x) \geq 0$ 且 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 5$ ，則此兩曲線 $y = f(x)$ 與

$y = g(x)$ 在閉區間 $[-1, 1]$ 所圍成區域的面積為何？

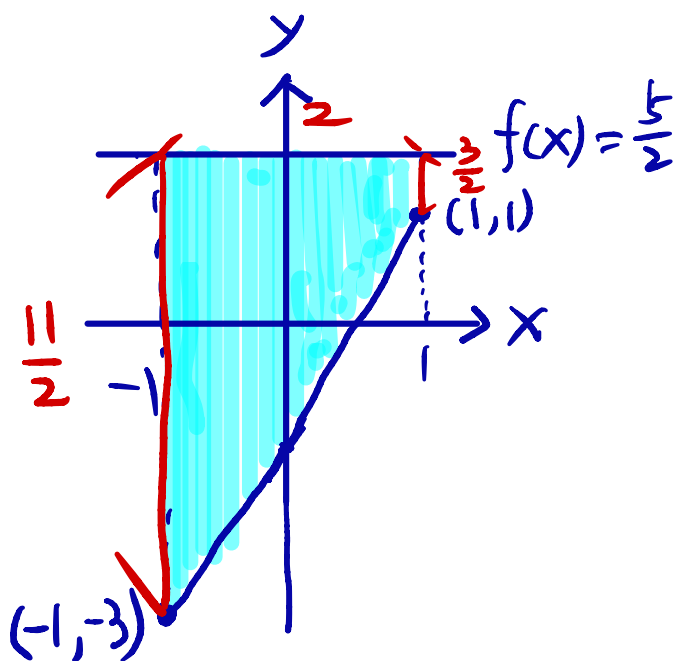
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

【109C25】

Ans : (D)

依題意可設 $f(x) = \frac{5}{2}$ (滿足 $\int_{-1}^1 \frac{5}{2} dx = \frac{5}{2}x \Big|_{-1}^1 = 5$)

作如下圖



$$\text{所求} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} + \frac{11}{2} \right) \times 2 = 7 \quad \#$$

已知 $F(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_1^x (t^2 + 1) dt \right]$ ，則 $F(1) = ?$

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

【108C14】

Ans : (D)

$$F(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x (t^2 + 1) dt = x^2 + 1$$

$$F(1) = 1^2 + 1 = 2 \quad \#$$

計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n}) = ?$

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{8}$

【108C21】

Ans : (A)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 + \frac{1}{n} k) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{n} \times n + \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{2} \times n \times (n+1) \\ &= 1 + \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

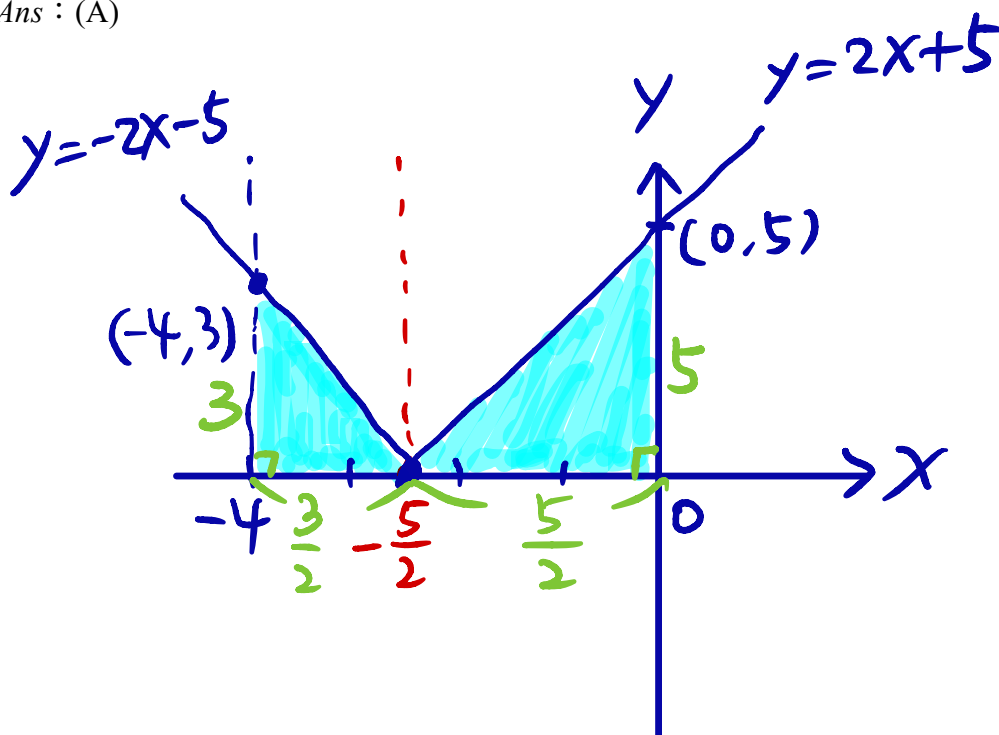
$$\therefore \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{3}{2} *$$

$$\int_{-4}^0 |2x+5| dx = ?$$

- (A) $\frac{17}{2}$ (B) 8 (C) $\frac{17}{4}$ (D) 4

【107C16】

Ans : (A)



$$\begin{aligned} \int_{-4}^0 |2x+5| dx &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \\ &= \frac{34}{4} \\ &= \frac{17}{2} \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (4x-1)^3 dx = ?$$

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$

【107C19】

Ans : (A)

$$\text{令 } u = 4x - 1 \rightarrow du = 4 dx \rightarrow dx = \frac{1}{4} du$$

$$\text{則原式} = \int_0^1 u^3 \cdot \frac{1}{4} du$$

$$= \frac{1}{16} u^4 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{16} *$$

設 $f(x)$ 為多項式函數，若 $\int_1^3 f(x)dx=1$ 、 $\int_2^5 f(x)dx=4$ 且 $\int_2^3 f(x)dx=2$ ，則 $\int_1^5 f(x)dx=?$

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7

【106C24】

Ans : (B)

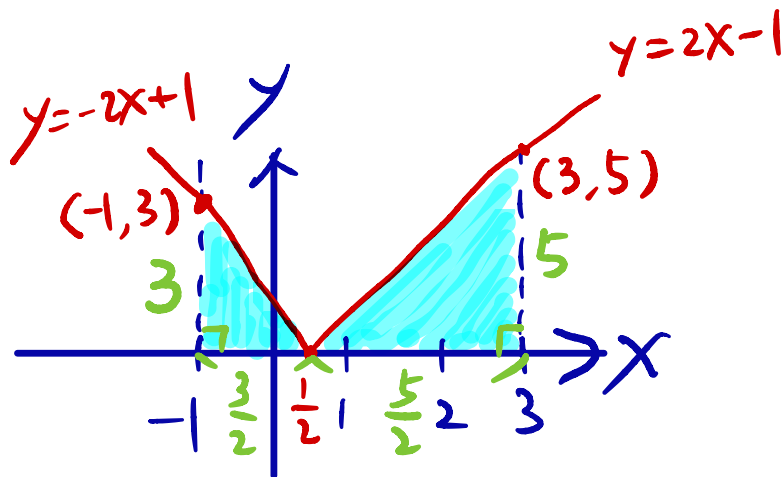
$$\begin{aligned}\int_1^5 f(x)dx &= \int_1^3 f(x)dx + \int_3^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx \\&= \int_1^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx \\&= 1 - 2 + 4 \\&= 3\end{aligned}$$

試求定積分 $\int_{-1}^3 |2x-1| dx$ 之值。

- (A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{17}{2}$ (C) $\frac{19}{2}$ (D) $\frac{21}{2}$

【105C23】

Ans : (B)



$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 |2x-1| dx &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \\ &= \frac{34}{4} \\ &= \frac{17}{2} \quad \times\end{aligned}$$

試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+1}{n} - \frac{2n^2+n+2}{n+2} \right)$ 之值。

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【105C24】

Ans : (D)

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2+1)(n+2) - (2n^2+n+2)n}{n(n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2n^3} + 4n^2 + n + 2 - \cancel{2n^3} - n^2 - 2n}{n^2 + 2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 2}{n^2 + 2n}$$

$$= \frac{3}{1}$$

$$= 3 \quad \#$$

設 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 、 $g(x) = 4$ ，則兩函數 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 之圖形所圍成的封閉區域面積為何？

- (A) $\frac{11}{4}$ (B) $\frac{27}{4}$ (C) $\frac{91}{4}$ (D) $\frac{221}{4}$

【105C25】

Ans : (B)

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$= 3x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ 或 } x = -2$$

$$f(-2) = -8 + 12 = 4$$

$$\text{解 } x^3 + 3x^2 = 4 \rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

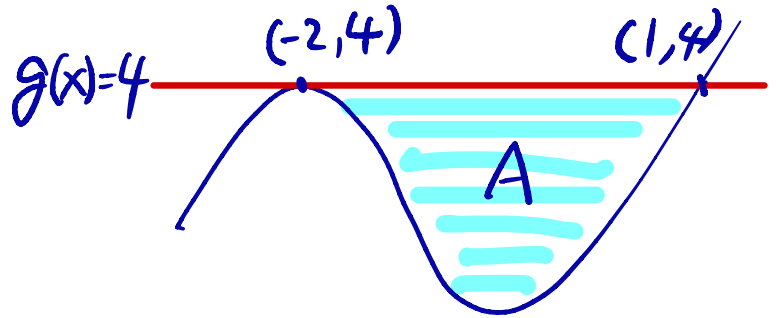
$$\rightarrow (x+2)^2(x-1) = 0$$

$$f(1) = 1 + 3 = 4$$

$$A = \int_{-2}^1 [4 - (x^3 + 3x^2)] dx = \left(-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right) \Big|_{-2}^1$$

$$= \left(-\frac{1}{4} - 1 + 4 \right) - (-4 + 8 - 8)$$

$$= -\frac{1}{4} - 1 + 4 + 4 = \frac{27}{4} \quad \times$$



$$\begin{array}{r|l} 1 & 1+3+0-4 \\ +1 & +1+4+4 \\ \hline 1 & 1+4+4+0 \\ & x^2+4x+4 = (x+2)^2 \end{array}$$

求 $\int_{-3}^3 (1-2x)(1+2x)dx = ?$

(A) -66 (B) -33 (C) 33 (D) 66

【104C13】

Ans : (A)

$$\text{原式} = \int_{-3}^3 (1-4x^2)dx$$

$$= \left(x - \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_{-3}^3$$

$$= (3-36) - (-3+36)$$

$$= 3-36+3-36$$

$$= -66$$

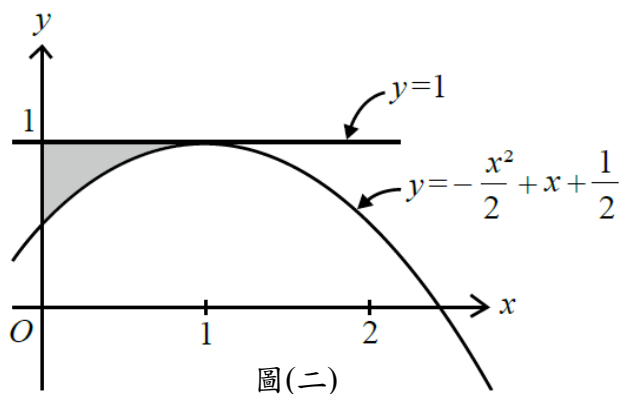
由 $y = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$ ， $y = 1$ 和 $x = 0$ 所圍成的區域，如圖(二)陰影部分，則此區域面積可由下列何式求得？

(A) $\int_0^1 (-\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}) dx$

(B) $\int_0^1 (\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}) dx$

(C) $\int_0^1 (-\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}) dx$

(D) $\int_0^1 (\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}) dx$



【104C21】

Ans : (D)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[1 - \left(-\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \right) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) dx \quad \# \end{aligned}$$

設 $f(x) = 2x^2 - 3$ ， $g(x) = 3 - x^2$ ，則定積分 $\int_{-3}^3 [f(x) - g(x)] dx$ 之值為何？

(A) 0 (B) 18 (C) 42 (D) 54

【103C03】

Ans : (B)

$$\text{原式} = \int_{-3}^3 [(2x^2 - 3) - (3 - x^2)] dx$$

$$= \int_{-3}^3 (3x^2 - 6) dx$$

$$= (x^3 - 6x) \Big|_{-3}^3$$

$$= (27 - 18) - (-27 + 18)$$

$$= 9 - (-9)$$

$$= 9 + 9$$

$$= 18$$

求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}) dx = ?$

- (A) $\frac{97}{36}$ (B) $\frac{49}{18}$ (C) $\frac{17}{6}$ (D) $\frac{26}{9}$

【102C05】

Ans : (D)

$$\text{原式} = \left(x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{16} + \frac{3}{8} \right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{72} \right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{9}{16} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{72}$$

$$= \frac{26}{9} \quad \times$$

已知 $y = f(x)$ 與 $x - 2y = 0$ 相交於 $(2, 1)$ 、 $(6, 3)$ 兩點，如圖(三)。若陰影部分的面積為 $\frac{16}{3}$

且 $\int_0^2 f(x) dx = -\frac{13}{3}$ ，則 $\int_0^6 f(x) dx = ?$

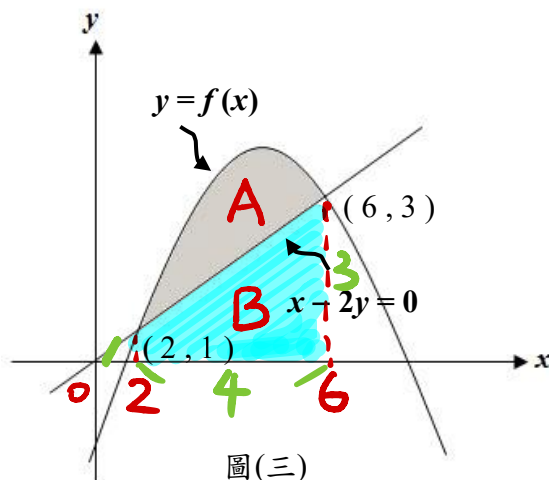
(A) 7

(B) 8

(C) 9

(D) 10

Ans : (C)



【102C21】

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx \\&= -\frac{13}{3} + A + B \\&= -\frac{13}{3} + \frac{16}{3} + \frac{1}{2} \times (1+3) \times 4 \\&= -\frac{13}{3} + \frac{16}{3} + 8 \\&= 9\end{aligned}$$

若函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x) = 3x^2 + 6x$ 且 $f(1) = 3$ ，則 $\int_0^2 f(x)dx$ 之值為何？

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 20

【101C19】

Ans : (A)

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + C$$

$$f(1) = 3 \rightarrow 1 + 3 + C = 3 \rightarrow C = -1$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

$$\text{故原式} = \int_0^2 (x^3 + 3x^2 - 1) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x \right) \Big|_0^2$$

$$= 4 + 8 - 2$$

$$= 10$$

若無窮等比級數 $(0.4) + (0.4)^2 + (0.4)^3 + \cdots + (0.4)^n + \cdots$ 的和為 a ，無窮等比級數

$(0.2) + (0.2)^2 + (0.2)^3 + \cdots + (0.2)^n + \cdots$ 的和為 b ，則 $\frac{a}{b} = ?$

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) 2 (C) $\frac{8}{3}$ (D) 4

【100C05】

Ans : (C)

$$a = \frac{0.4}{1-0.4} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3}$$

$$b = \frac{0.2}{1-0.2} = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{2 \times 4}{3 \times 1} = \frac{8}{3} \quad \times$$

設 $f(x) = \sqrt{2x-1}$ ，且 $f''(x)$ 為 $f(x)$ 的二階導函數，則 $\int_1^5 f''(x)dx = ?$

- (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

【100C19】

Ans : (A)

$$f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (2x-1)^{-\frac{1}{2}} \times 2 = (2x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_1^5 f''(x)dx = f'(x) \Big|_1^5$$

$$= f'(5) - f'(1)$$

$$= 9^{-\frac{1}{2}} - 1^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} - 1$$

$$= -\frac{2}{3} \quad \text{✱}$$

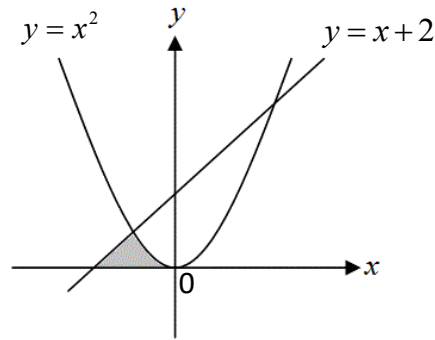
求陰影部份之面積為何？

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{5}{6}$

(C) 1

(D) $\frac{4}{3}$



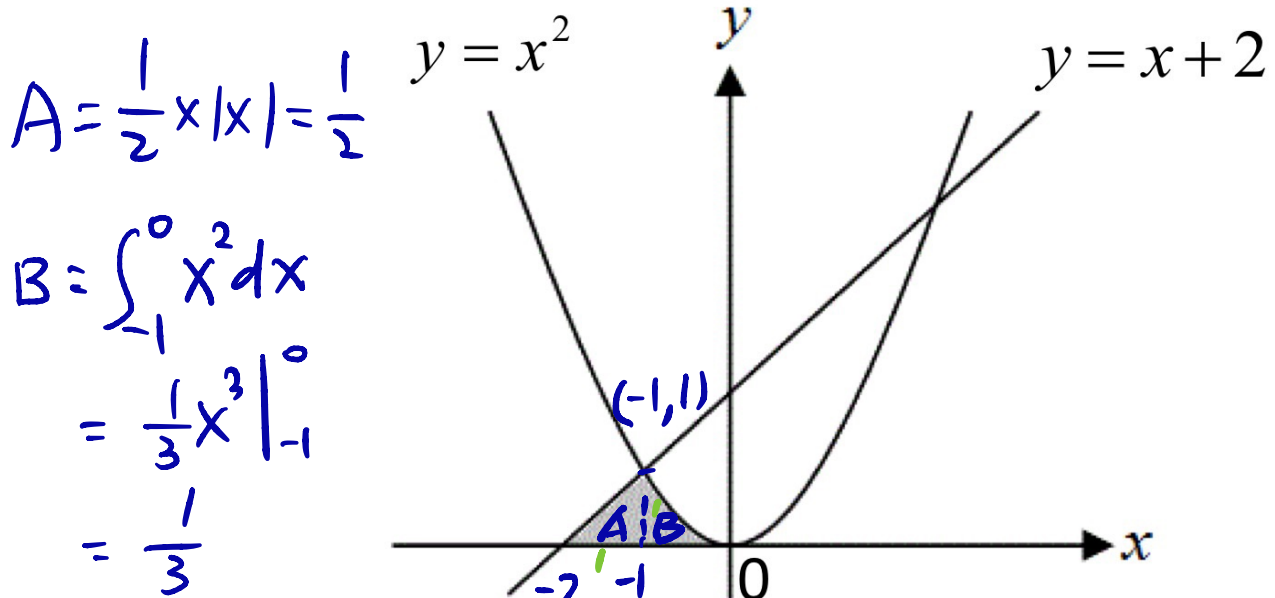
【100C20】

Ans : (B)

$$\text{解 } x^2 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$
$$\quad \quad \quad \begin{array}{c} +1 \\ -2 \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow (x+1)(x-2) = 0$$

$$\rightarrow x = -1 \text{ or } x = 2$$



$$A = \frac{1}{2} \times |x| = \frac{1}{2}$$

$$B = \int_{-1}^0 x^2 dx$$
$$= \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^0$$
$$= \frac{1}{3}$$

$$\text{故 } A+B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

關於下列各極限，何者正確？

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n} = 1 \quad (B) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n+9}{n^2+5n-1} = 0 \quad (C) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.01n}{5n-1} = 0 \quad (D) \lim_{n \rightarrow \infty} n - \sqrt{n^2-1} = 1$$

Ans : (B)

【99C16】

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{3}{5} \right)^n - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right] = 0 - 0 = 0$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n+9}{n^2+5n-1} = 0 \quad \times$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.01n}{5n-1} = \frac{0.01}{5} = \frac{1}{500}$$

$$(D) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2-1})(n + \sqrt{n^2-1})}{n + \sqrt{n^2-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n^2-1)}{n + \sqrt{n^2-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}}$$

$$= 0$$

無窮級數 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k+1}} + \cdots = ?$

- (A) $\frac{41}{24}$ (B) $\frac{59}{24}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$

【99C19】

Ans : (A)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{32+9}{24} \\ &= \frac{41}{24} \quad \times\end{aligned}$$

已知 $\int_a^b f(x)dx = 6$, $\int_a^b g(x)dx = 12$, $\int_a^b h(x)dx = 4$, 且 $\int_a^b (mf(x) + ng(x))dx = 13$,

$\int_a^b (mg(x) - nh(x))dx = 5$, 則 $6m + 8n = ?$

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

【98C24】

Ans : (C)

$$m \int_a^b f(x)dx + n \int_a^b g(x)dx = 13 \rightarrow 6m + 12n = 13 \text{---} \textcircled{1}$$

$$m \int_a^b g(x)dx - n \int_a^b h(x)dx = 5 \rightarrow 12m - 4n = 5 \text{---} \textcircled{2}$$

$$\text{解 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 得 } m = \frac{2}{3}, n = \frac{3}{4}$$

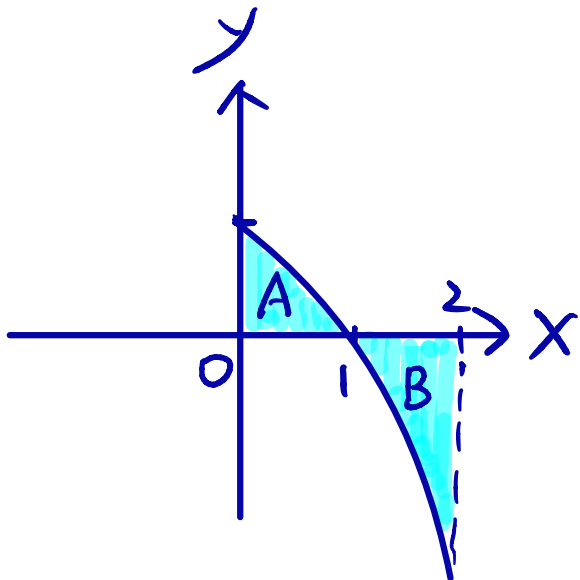
$$\text{故 } 6m + 8n = 4 + 6 = 10 \quad \times$$

函數 $f(x)=1-x^2$ 的圖形與 x 軸在區間 $[0, 2]$ 所圍區域面積為何？

- (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) 2

【98C25】

Ans : (D)



$$A = \int_0^1 (1-x^2) dx = \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$B = \int_1^2 [0 - (1-x^2)] dx$$

$$= \int_1^2 (x^2 - 1) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{故 } A+B = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 *$$