114統測數C

已知 $i=\sqrt{-1}$。若將 $(1+2i)(2-i)$ 化成 $a+bi$ 之形式，其中 a、b 為實數，則 $a+b=$？

(A) -2　(B) 0　(C) 4　(D) 7　【114*C01*】

Ans：(D)

$$(1+2i)(2-i)=2-i+4i+2$$
$$=4+3i$$

$$\therefore \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \rightarrow a+b=7 \ \#$$

已知ΔABC 中，$\angle A$ 為直角，試問下列敘述何者正確？

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ (B) $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ (C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ (D) $\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=0$ 【114$C02$】

Ans：(C)

$\because \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 𠄘

下列何者可為函數 $f(x)=x^3+2x-5$ 的反導函數？

(A) $\frac{x^4}{4}+2x^2-5x$ (B) $\frac{x^4}{4}+2x^2-5$ (C) $\frac{x^4}{4}+x^2-5x-3$ (D) $\frac{x^4}{4}+x^2-5$ 【114*C03*】

Ans：(C)

$$\int (x^3+2x-5)\,dx = \frac{x^4}{4}+x^2-5x+C$$

$\therefore$ 可為 $\frac{x^4}{4}+x^2-5x-3$ ※

試求 $\tan 2025^\circ + \sec 2025^\circ =$ ？

(A) $-1-\sqrt{2}$ (B) $1-\sqrt{2}$ (C) $-1+\sqrt{2}$ (D) $1+\sqrt{2}$ 【114*C04*】

Ans：(B)

原式 $= \tan 225^\circ + \sec 225^\circ$

$= \tan(180^\circ+45^\circ) + \sec(180^\circ+45^\circ)$

$= \tan 45^\circ - \sec 45^\circ$

$= 1-\sqrt{2}$ #

360°
720°
1080°
1440°
$1800^\circ \leftarrow 2025^\circ$
2160°

$$\begin{array}{r} 2025^\circ \\ -\ 1800^\circ \\ \hline 225^\circ \end{array}$$

若 $3+2\sqrt{2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}-1}+b(\sqrt{2}-1)$，其中 a、b 為有理數，則 $a^2-b^2=$？

(A) 6　(B) 5　(C) $\dfrac{49}{4}$　(D) $\dfrac{23}{4}$　【114*C05*】

Ans：(A)

$$(3+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=a+b(\sqrt{2}-1)^2$$

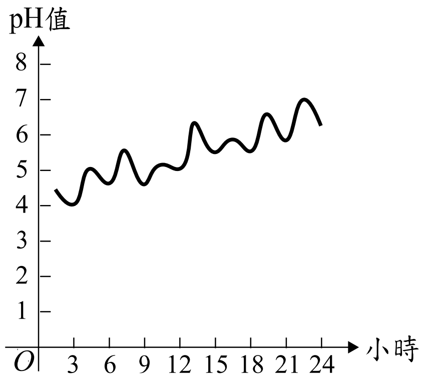
$$3\sqrt{2}-3+4-2\sqrt{2}=a+b(3-2\sqrt{2})$$

$$1+\sqrt{2}=(a+3b)-2b\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a+3b=1 \\ -2b=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$a^2-b^2=\frac{25}{4}-\frac{1}{4}=6 \quad ※$$

溶液酸鹼度的公式為 pH $= -\log[H^+]$，其中 $[H^+]$ 為溶液中的氫離子濃度(單位：莫耳/升)。圖為雨季中某日 24 小時內酸雨檢測站雨水 pH 值與時間之圖形。若當日檢測到氫離子濃度最小值為 a，則當日氫離子濃度最大值約為多少？



(A) $1.5a$

(B) $3a$

(C) $100a$

(D) $1000a$

【114C06】

Ans：(D)

由圖得知

$pH = 7 = -\log[H^+] \rightarrow [H^+] = 10^{-7}$

$\rightarrow a = 10^{-7}$

$pH = 4 = -\log[H^+] \rightarrow [H^+] = 10^{-4}$

$= 10^{3} \times 10^{-7}$

$= 1000a$

#

若數列$-2, a, b, 7$成等差數列，且數列a, b, p, q成等比數列，則$p+q=$？

(A) 60　(B) 70　(C) 80　(D) 90　【114C07】

Ans：(C)

$7=-2+3d \rightarrow d=3 \rightarrow \begin{cases} a=-2+3=1 \\ b=1+3=4 \end{cases}$

$1, 4, p, q$成等比 $\rightarrow r=\frac{4}{1}=4$

$p=4\times4=16$, $q=16\times4=64$

故 $p+q=16+64=80$ #

試問點(sin155° – sin55°, cos222° – cos122°)在第幾象限？

(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四　【114*C08*】

Ans：(C)

$\because \sin 155^\circ = \sin(180^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ < \sin 55^\circ$

$\therefore \sin 155^\circ - \sin 55^\circ < 0$

$\because \cos 222^\circ = \cos(180^\circ + 42^\circ) = -\cos 42^\circ$

$\cos 122^\circ = \cos(180^\circ - 58^\circ) = -\cos 58^\circ$

而 $\cos 42^\circ > \cos 58^\circ \rightarrow -\cos 42^\circ < -\cos 58^\circ$

$\therefore \cos 222^\circ < \cos 122^\circ \rightarrow \cos 222^\circ - \cos 122^\circ < 0$

故 $(-,-) \rightarrow$ 在第三象限 #

已知 k 為實數，且一元二次方程式 $x^2+kx=k-3$ 有兩個共軛虛根。若 k 之解的範圍為區間 (a,b)，則 $b-a=$？

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10　【114C09】

Ans：(C)

$\because x^2+kx-(k-3)=0$ 有兩共軛虛根

$\therefore k^2-4\times1\times[-(k-3)]<0$

$k^2+4k-12<0$

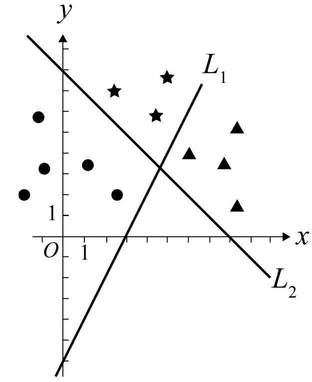
$\begin{matrix} 1 & & -2 \\ 1 & & +6 \end{matrix}$

$(k-2)(k+6)<0$

$-6<k<2$

$\begin{cases} a=-6 \\ b=2 \end{cases} \rightarrow b-a=2-(-6)=2+6=8$ #

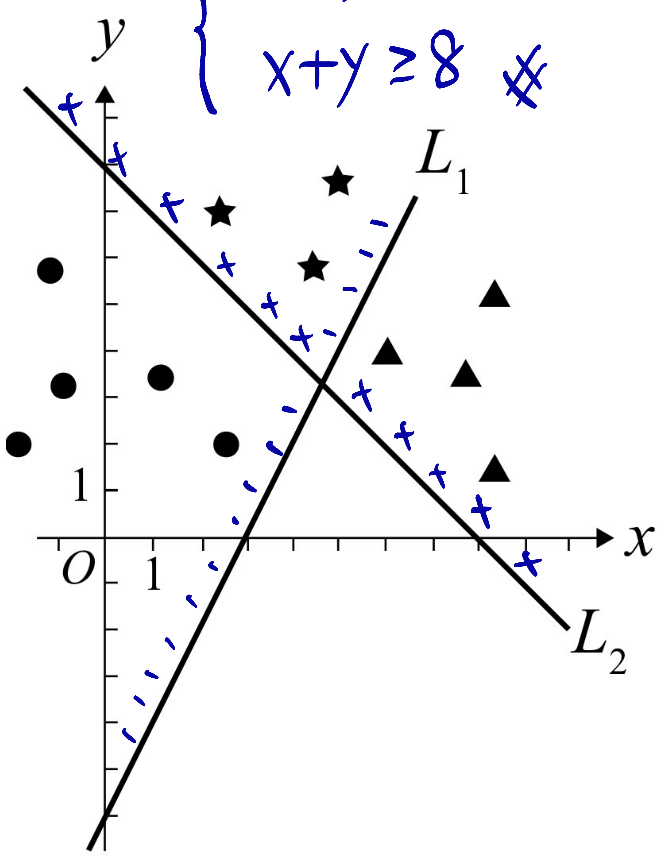
已知在坐標平面上有多筆物件資料，今將其分成三類，分別以▲、●、★表示。若利用兩條直線$L_1: 2x-y=6$與$L_2: x+y=8$切割分辨出三類物件資料所屬不同區域，如圖所示，則下列哪一組不等式包含★類所在的區域？



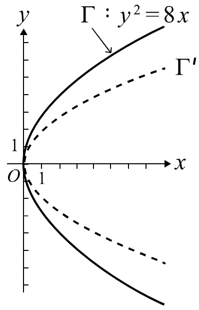
(A)$\begin{cases} 2x-y\ge 6 \\ x+y\le 8 \end{cases}$ (B)$\begin{cases} 2x-y\le 6 \\ x+y\ge 8 \end{cases}$ (C)$\begin{cases} 2x-y\ge 6 \\ x+y\ge 8 \end{cases}$ (D)$\begin{cases} 2x-y\le 6 \\ x+y\le 8 \end{cases}$

Ans：(B) 【114*C10*】

$\begin{cases} 2x-y\le 6 \\ x+y\ge 8 \end{cases}$ #



茗茗幫家裡設計一款拋物線造型的裝飾品，在設計圖的坐標平面上，畫出此拋物線為 $\Gamma: y^2 = 8x$，如圖中的實線。但大家討論後認為 Γ 開口太大，建議保持 Γ 的頂點不變且仍維持拋物線造型，並調整開口如圖(三)中的虛線 Γ'。若 Γ' 的正焦弦長為 4 單位長，則下列有關 Γ' 的敘述何者正確？



(A) 焦點坐標為(1 , 0)　　(B)方程式為 $y^2 = 6x$

(C)焦距為 2　　(D)準線為 $x = -2$

Ans：(A)　　【114*C11*】

正焦弦長為 $4c = 4 \rightarrow \Gamma': y^2 = 4x$, $c = 1$

$\rightarrow V(0,0)$, $F(1,0)$ #

試問函數 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ 在下列哪個區間內為為遞增？

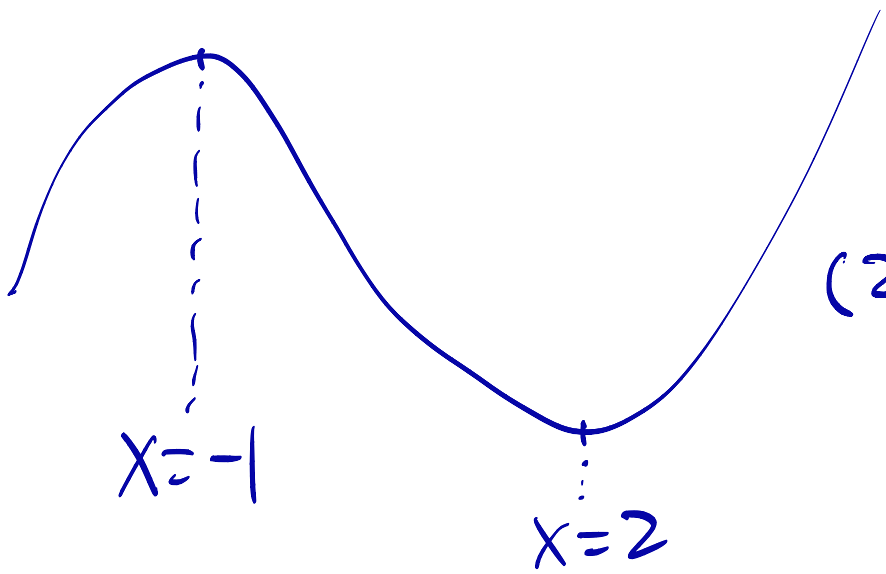
(A) $(-2, 1)$　　(B) $(-1, 2)$　　(C) $(-\infty, 1)$　　(D) $(2, \infty)$　　【114C12】

Ans：(D)

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-x-2=0 \rightarrow x=-1$ or 2

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & +1 \\ 1 & & -2 \end{array}$$



$(2, \infty)$ ↑ #

若 $x=a$、$y=b$ 為聯立方程組 $\begin{cases}3x+4y=114\\4x+5y=2025\end{cases}$ 的解，則 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=$?

(A) $\begin{bmatrix}5&-4\\-4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}-5&4\\4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}5&4\\-4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-5&-4\\-4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$ 【114*C13*】

Ans：(B)

$$\begin{bmatrix}3&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\4&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}5&-4\\-4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5&4\\4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$$ #

從 1 到 9 中取出兩個相異的奇數及兩個相異的偶數排成一個四位數。若要求兩個奇數不相鄰且兩個偶數也不相鄰，則滿足此條件的四位數共有幾個？

(A) 120　(B) 480　(C) 720　(D) 800　【114*C14*】

Ans：(B)

① 奇偶奇偶 $C^5_1 \times C^4_1 \times C^4_1 \times C^3_1 = 240$

② 偶奇偶奇 $C^4_1 \times C^5_1 \times C^3_1 \times C^4_1 = 240$

$\boxed{\text{奇} \to 5 \quad \text{偶} \to 4}$

$240 + 240 = 480$ ※

已知 A 為 $3\times n$ 階矩陣、B 為 $k\times 4$ 階矩陣，試問下列敘述何者正確？

(A)若 AB 有意義，則 $n=k$

(B)若 $A+B$ 有意義，則 $n=k$

(C)若 AB 有意義，則 $n=3$ 且 $k=4$

(D)若 $A+B$ 有意義，則 $n=3$ 且 $k=4$ 【114$C15$】

Ans：(A)

$$AB=\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}_{3\times n}\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}_{k\times 4} \to (A) \quad \#$$

$n=k$ 時才可乘！

在某金屬容器中放置質量 1 公克的放射性物質 A。經過 x 年後，該容器中的物質 A 質量剩下 $f(x)$ 公克。已知 $f(x)$ 滿足關係式：$f(x)=a^x$，其中 $a>0$、$a\neq1$，且經過 T 年後，物質 A 質量剩下 $\frac{1}{2}$ 公克，試問下列敘述何者正確？

(A)經過 $4T$ 年後，物質 A 所剩質量大於 $\frac{1}{10}$ 公克

(B)經過 $6T$ 年後，物質 A 所剩質量大於 $\frac{1}{50}$ 公克

(C)經過 $8T$ 年後，物質 A 所剩質量少於 $\frac{1}{500}$ 公克

(D)經過 $10T$ 年後，物質 A 所剩質量少於 $\frac{1}{1000}$ 公克 【114*C16*】

Ans：(D)

$\because a^T=\frac{1}{2}$

$\therefore$ (A) $a^{4T}=(a^T)^4=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}<\frac{1}{10}$

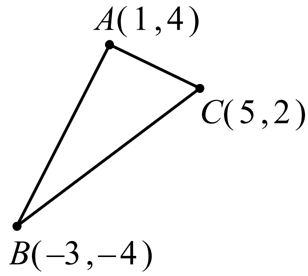
(B) $a^{6T}=(a^T)^6=(\frac{1}{2})^6=\frac{1}{64}<\frac{1}{50}$

(C) $a^{8T}=(a^T)^8=(\frac{1}{2})^8=\frac{1}{256}>\frac{1}{500}$

(D) $a^{10T}=(a^T)^{10}=(\frac{1}{2})^{10}=\frac{1}{1024}<\frac{1}{1000}$ 正確

#

已知坐標平面上三點 $A(1,4)$、$B(-3,-4)$、$C(5,2)$形成一個直角三角形，如圖所示，試問下列何者為 ΔABC 的外接圓方程式？



(A) $(x+1)^2+y^2=20$

(B) $(x+1)^2+y^2=25$

(C) $(x-1)^2+(y+1)^2=20$

(D) $(x-1)^2+(y+1)^2=25$ 【114*C17*】

Ans：(D)

$\because \angle A=90^\circ$ (可由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 得知)

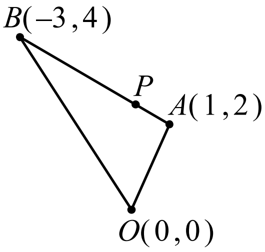
$\therefore \overline{BC}$ 為直徑(由半圓的圓周角是直角得知)

故 $\overline{BC}$ 中點 $O\left(\frac{-3+5}{2},\frac{-4+2}{2}\right)=O(1,-1)$ 為圓心

$\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(5+3)^2+(2+4)^2}=\frac{1}{2}\times 10=5$ 為半徑

得圓方程式為 $(x-1)^2+(y+1)^2=25$ #

已知坐標平面上四點 $O, P, A(1,2), B(-3,4)$，其中 O 為原點，且點 P 在線段 $\overline{AB}$ 上，如圖所示。若 ΔOAP 的面積：ΔOBP 的面積=2：7，則點 P 的坐標為何？



(A) $(\frac{1}{9},\frac{22}{9})$　　(B) $(\frac{-19}{9},\frac{32}{9})$

(B) (C) $(\frac{-23}{5},\frac{24}{5})$　　(D) $(\frac{13}{5},\frac{6}{5})$　　【114C18】

Ans：(A)

$\because$ ΔOAP面積：ΔOBP面積

$= \overline{AP} : \overline{BP}$

$= 2:7$ (兩Δ等高)

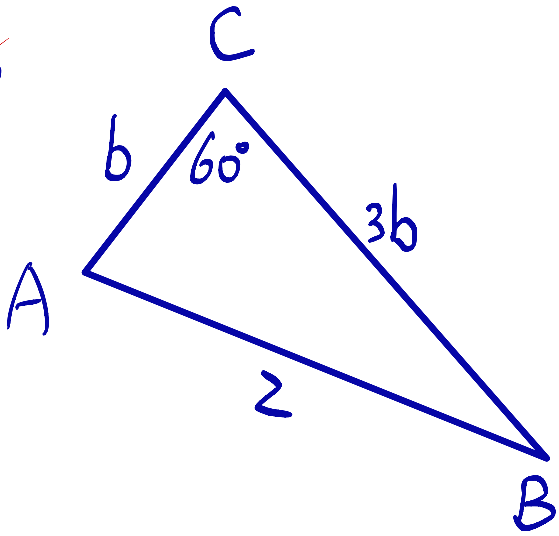
$\therefore P\left(\frac{7\times1+2\times(-3)}{2+7}, \frac{7\times2+2\times4}{2+7}\right)=P\left(\frac{1}{9},\frac{22}{9}\right)$ #

已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=2$ 且 $\angle C=60^\circ$。若 $\overline{AC}:\overline{BC}=1:3$，則 ΔABC 的面積為何？

(A) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{7}$ (C) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ (D) $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ 【114*C19*】

Ans：(B)

$$2^2 = b^2 + (3b)^2 - \cancel{2} \times b \times (3b) \times \cancel{\cos 60^\circ}$$



$$4 = b^2 + 9b^2 - 3b^2$$

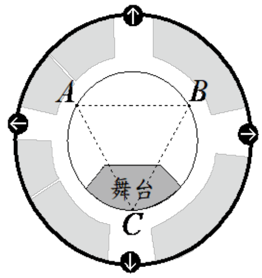
$$4 = 7b^2 \rightarrow b^2 = \frac{4}{7}$$

$$\Delta ABC\text{面積} = \frac{1}{2} \times b \times (3b) \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{7} \quad \#$$

某攝影師參觀一棟圓樓建築，從地面上兩個不同位置點 A、B 拍攝一樓圓型展演劇場舞台上位於 C 點的擺飾，如圖所示。已知 A、B、C 三點所在之圓的半徑為 10 公尺，且 $\angle ACB = 60°$，則 A、B 兩點的距離為多少公尺？



(A) $5\sqrt{3}$　(B) 10　(C) $10\sqrt{3}$　(D) 20

【114C20】

Ans：(C)

$$\frac{c}{\sin 60°} = 2\times 10$$

$$c = 2\times 10\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$ #

已知 L 是坐標平面上通過點$(1,-1)$的直線，且其 x 截距為 a，試問下列敘述何者正確？

(A)若 L 的 y 截距為正，則 $0<a<1$

(B)若 L 的 y 截距為負，則 $a<-1$

(C)若 L 的斜率為正，則 $a>2$

(D)若 L 的斜率為負，則 $a<0$ 【114*C21*】

Ans：(A)

$$L: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

以 $(1,-1)$ 代入得 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a} \rightarrow b=\frac{a}{1-a}$$

(A) $b>0 \rightarrow \frac{a}{1-a}>0 \rightarrow a(1-a)>0$

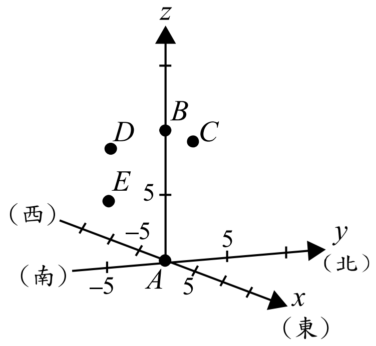
$\rightarrow a(a-1)<0$

$\rightarrow 0<a<1$

#

小華遙控一台空拍機。今空拍機從點 A 出發，首先垂直上升 10 公尺(至點 B)，往東飛了 5 公尺(至點 C)，再往南飛 7 公尺(至點 D)，然後下降 4 公尺到達點 E，如圖所示。試問此時空拍機和原出發點間的距離約為多少公尺？

(A) $\sqrt{74}$　　(B) $\sqrt{110}$　　(C) $\sqrt{174}$　　(D) $\sqrt{270}$　　【114C22】



Ans：(B)

$A(0,0,0)$

$\downarrow$

$B(0,0,10)$

$\downarrow$

$C(5,0,10)$

$\downarrow$

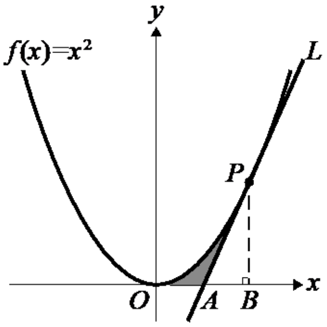
$D(5,-7,10)$

$\downarrow$

$E(5,-7,6)$

$\therefore \overline{AE}=\sqrt{5^2+(-7)^2+6^2}=\sqrt{25+49+36}=\sqrt{110}$ #

已知直線 L 為函數 $f(x)=x^2$ 圖形在 $P(4,16)$ 的切線，A 點為 L 與 x 軸交點，且 B 點為 P 點在 x 軸上的投影點，如圖所示。試問 $f(x)$ 的圖形與 x 軸及直線 L 所圍成陰影區域之面積為多少平方單位？



(A) $\frac{10}{3}$　(B) $\frac{11}{3}$　(C) $\frac{14}{3}$　(D) $\frac{16}{3}$　【114C23】

Ans：(D)

$f'(x)=2x$

切線斜率 $m=f'(4)=2\times4=8$

$L: y-16=8(x-4) \xrightarrow{y=0} -16=8(x-4)$

$\rightarrow x=2$

$\rightarrow A(2,0)$

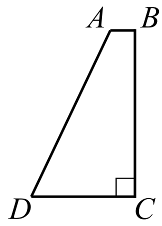
又 $B(4,0)$，$\triangle PAB=\frac{1}{2}\times2\times16=16$

所求 $=\int_0^4 x^2dx-16$

$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^4-16$

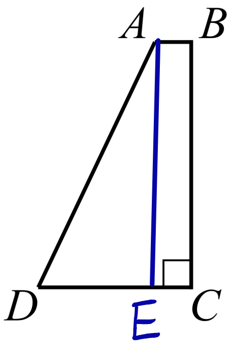
$=\frac{64}{3}-16=\frac{16}{3}$ #

已知空間中一梯形 $ABCD$，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 平行，且 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 垂直，其中三個頂點坐標分別為 $A(4,-3,-2)$、$C(3,0,2)$、$D(1,1,0)$，如圖所示，試求 $\overline{AB}=$？



(A) 1　(B) $\frac{5}{3}$　(C) 2　(D) $\frac{7}{3}$　【114C24】

Ans：(A)



$\overrightarrow{DA}=(3,-4,-2)$

$\overrightarrow{DC}=(2,-1,2)$

$\overrightarrow{DA}$ 在 $\overrightarrow{DC}$ 上的正射影

$$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DC}|^2}\right)\overrightarrow{DC}=\left(\frac{6+4-4}{4+1+4}\right)(2,-1,2)$$

$$=\frac{2}{3}(2,-1,2)$$

$$=\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

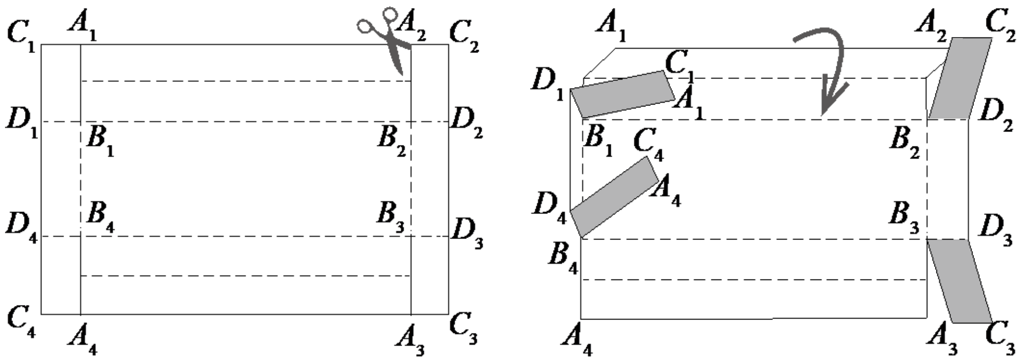
$$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DE}=\left(2-\frac{4}{3},-1+\frac{2}{3},2-\frac{4}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$|\overrightarrow{EC}|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=1$$

即 $\overline{AB}=1$ #

芳芳用一張長度為 3 尺、寬度為 2 尺的紙板設計紙盒，從長度為 3 尺的兩邊 A_i 點剪至 B_i 點，再將 A_i 點對折至 B_i 點，並將長方形 $A_iB_iD_iC_i$ 插入內部以固定紙盒，其中 $i=1,2,3,4$，作法如圖所示。設 $\overline{B_iD_i}=a$ 尺，且 $\overline{A_iB_i}=2a$ 尺，$i=1,2,3,4$。若摺出的紙盒有最大體積，則 $a=$？



(A) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{6}$

(B) $\dfrac{4-\sqrt{7}}{6}$

(C) $\dfrac{5-\sqrt{7}}{12}$

(D) $\dfrac{6-\sqrt{7}}{12}$

Ans：(B)　【114*C*25】

$$V(x)=x(3-2x)(2-4x)$$

$$=8x^3-16x^2+6x$$

$$V'(x)=24x^2-32x+6$$

$$V'(x)=0 \rightarrow 12x^2-16x+3=0$$

$$x=\frac{16\pm\sqrt{256-144}}{24}=\frac{16\pm\sqrt{112}}{24}=\frac{16\pm4\sqrt{7}}{24}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{6}$$

得 $a=\dfrac{4-\sqrt{7}}{6}$ #

$$\left(\begin{array}{l} V''(x)=48x-32 \\ V''\left(\frac{4+\sqrt{7}}{6}\right)>0 \\ V''\left(\frac{4-\sqrt{7}}{6}\right)<0 \rightarrow a=\frac{4-\sqrt{7}}{6} \end{array}\right)$$