1-1

實數與絕對值

趨勢分析

本單元是坐標幾何的基礎，歷年的命題率都偏低，但是之後的單元都需要這些基本公式，不可輕忽，像是「二次函數的極值」、「一元二次不等式」就會常常出現。

焦點主題 1 實數（有理數、無理數）、根式

數線上的點坐標就是實數，而實數（$\mathbb{R}$）可以分成有理數、無理數。

(1) 可以寫成整數比值的實數稱為「有理數」。像是整數（如：$4=\frac{4}{1}$），有限小數（如：$0.5=\frac{1}{2}$）、循環小數（如：$6.\overline{7}=6\frac{7}{9}$）可以寫成分數，都是有理數。

小提醒 有理數形如$\frac{a}{b}$，其中 a、b 為整數且 $b\neq 0$。

(2) 無法寫成整數比值的實數稱為「無理數」。像是不循環的無限小數（如：$\pi=3.1415\cdots$）、開不盡的根號（如：$\sqrt{2}=1.4142\cdots$）無法寫成分數，都是無理數。

(3) 若實數 b 滿足 $b^2=a$，則 b 稱為「a 的平方根（二次方根）」。每一正數 a 都有兩個平方根（一正一負），記作 $\pm\sqrt{a}$。例 9 的平方根是 ± 3，而$\sqrt{9}=3$。

(4) 若 a、$b\geq 0$，則 $\sqrt{a^2}=a$，$\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$。例 $\sqrt{10^2}=10$，$\sqrt{10^2\times 3}=10\sqrt{3}$。

☆ $\sqrt{a^2}=|a|$

觀念是非題 （ X ）1. $\sqrt{5^2}+\sqrt{(-6)^2}+(\sqrt{7})^2=5+(-6)+7=6$。

$\sqrt{(-6)^2}=|-6|=6$

範例 1 老師講解

化簡根式：(1)$\sqrt{36}$ (2)$\sqrt{12}$。

(1) $\sqrt{36}=6$

(2) $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

學生練習

化簡根式：(1)$\sqrt{49}$ (2)$\sqrt{45}$。

(1) $\sqrt{49}=7$

(2) $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

焦點主題 2　根式的運算（加、減）

同類根式可加減合併（如：$3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(3+5)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$），不同類則否。

小提醒　$\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{2}$ 不同類，所以 $\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$ 無法合併。

範例 2　老師講解

化簡 $5\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$。

原式 $=(5\sqrt{3}-\sqrt{3})+(2\sqrt{5}+\sqrt{5})$

$=4\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ ※

學生練習

化簡 $4\sqrt{6}+9\sqrt{7}+3\sqrt{6}-\sqrt{7}$。

原式 $=(4\sqrt{6}+3\sqrt{6})+(9\sqrt{7}-\sqrt{7})$

$=7\sqrt{6}+8\sqrt{7}$ ※

焦點主題 3　根式的運算（乘、除）

若 a、$b>0$，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2=a$、$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。

範例 3　老師講解

試求下列的值：

(1) $\sqrt{3}\times\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$　(2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$。

解題小技巧

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(1) $\sqrt{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$=6-3\sqrt{5}$ ※

(2) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$

$=(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2$

$=2+4\sqrt{3}+6$

$=8+4\sqrt{3}$ ※

學生練習

試求下列的值：

(1) $\sqrt{5}\times(\sqrt{5}+4\sqrt{3})$　(2) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$。

解題小技巧

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(1) $\sqrt{5}(\sqrt{5}+4\sqrt{3})$

$=5+4\sqrt{15}$ ※

(2) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$

$=(\sqrt{7})^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=7-2\sqrt{21}+3$

$=10-2\sqrt{21}$ ※

焦點主題 4 根式的運算（有理化）

當分數的分母有根式時，把分母化成有理數的過程稱為「有理化分母」。

例 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$。

小提醒 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

觀念是非題 （O）2. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$。 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{3\sqrt{6}}{6}+\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

範例 4 老師講解

化簡下列分數（有理化分母）：

(1) $\frac{15}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (3) $\frac{4}{\sqrt{11}-3}$。

(1) $\frac{15}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{3}$ #

(2) $\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$=\frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\frac{\cancel{8}^{4}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\cancel{2}}$

$=4(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ #

(3) $\frac{4}{\sqrt{11}-3}\times\frac{\sqrt{11}+3}{\sqrt{11}+3}$

$=\frac{4(\sqrt{11}+3)}{11-9}$

$=2(\sqrt{11}+3)$ #

學生練習

化簡下列分數（有理化分母）：

(1) $\frac{14}{\sqrt{7}}$ (2) $\frac{30}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$ (3) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$。

(1) $\frac{14}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{\cancel{14}^{2}\sqrt{7}}{\cancel{7}}=2\sqrt{7}$ #

(2) $\frac{30}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}$

$=\frac{30(\sqrt{11}-\sqrt{6})}{11-6}$

$=6(\sqrt{11}-\sqrt{6})$ #

(3) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$

$=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4}$

$=\sqrt{7}+2$ #

C

1

焦點主題 5　算幾不等式

若 a、b 均為正實數，則 $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$，即 $a+b \ge 2\sqrt{ab}$，等號成立必須 $a=b$。

小提醒 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0 \Rightarrow a-2\sqrt{ab}+b \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$。

a>0, b>0

觀念是非題 （X）3. 對於任意實數 a、b，$a+b \ge 2\sqrt{ab}$ 恆成立。

a>0, b>0

範例 5　老師講解　學生練習

設兩正數 a、b 滿足 $2a+3b=12$，試求 ab 的最大值。6

$\because 2a+3b \ge 2\cdot\sqrt{(2a)\cdot(3b)}$

即 $\overset{6}{\cancel{12}} \ge \cancel{2}\cdot\sqrt{6ab}$

$\therefore 6 \ge \sqrt{6ab}$

$36 \ge 6ab$

$6 \ge ab \rightarrow ab \le \underline{6}$ ※

※亦可由 $2a=3b=6$ 得 $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

設 a、$b>0$，若 $a+2b=8$，試求 ab 的最大值。8

$\because a+2b \ge 2\cdot\sqrt{a\cdot(2b)}$

即 $\overset{4}{\cancel{8}} \ge \cancel{2}\sqrt{2ab}$

$\therefore 4 \ge \sqrt{2ab}$

$16 \ge 2ab$

$8 \ge ab \rightarrow ab \le \underline{8}$ ※

※亦可由 $a=2b=4$ 得 $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$

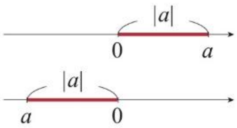
焦點主題 6　絕對值

(1) 數線上，點 a 到原點（0）的距離稱為「a 的絕對值」，記作 $|a|$。

(2) 實數 a 的絕對值 $|a| = \begin{cases} a，當 a \ge 0 \\ -a，當 a<0 \end{cases}$。例 $|2|=2$，$|-3|=3$。

(3) 數線上，兩點 a、b 的距離為 $|a-b|=|b-a|$。

(4) 絕對值方程式：設 k 為正數，若 $|x|=k$，則 $x=\pm k$。



範例 6　老師講解　學生練習

已知絕對值 $|4x-1|=7$，試求 x 之值。

$|4x-1|=7 \rightarrow 4x-1=\pm 7$

① $4x-1=7 \rightarrow x=2$

② $4x-1=-7 \rightarrow x=-\frac{3}{2}$

故 $x=2$ 或 $x=-\frac{3}{2}$ ※

已知絕對值 $|2x+3|=5$，試求 x 之值。

$|2x+3|=5 \rightarrow 2x+3=\pm 5$

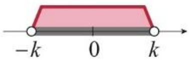
① $2x+3=5 \rightarrow x=1$

② $2x+3=-5 \rightarrow x=-4$

故 $x=1$ 或 $x=-4$ ※

焦點主題 7 絕對值不等式（I）

設 k 為正數，若 $|x|<k$，則 $-k<x<k$。介於兩者之間



小提醒 $|x|\le k \iff -k\le x\le k$。

觀念是非題 （X）4. 若 $|x|<-2$，則 $-2<x<2$。

負的值就錯了！

範例 7 老師講解 學生練習

解不等式 $|x-7|<3$。

※介於兩者之間

$-3<x-7<3$

$-4<x<10$ #

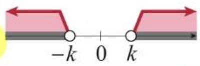
解不等式 $|x+5|<4$。

$-4<x+5<4$

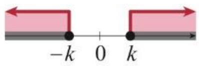
$-9<x<-1$ #

焦點主題 8 絕對值不等式（II）

設 k 為正數，若 $|x|>k$，則 $x>k$ 或 $x<-k$。比大的大或比小的小



小提醒 $|x|\ge k \iff x\ge k$ 或 $x\le -k$。



觀念是非題 （O）5. 不等式 $|x-1|>3$ 與 $|1-x|>3$ 的解是相同的。

在絕對值內可交換成 $x-1$

範例 8 老師講解 學生練習

解不等式 $|5x+4|>11$。

※比小的小或比大的大

$5x+4<-11$ 或 $5x+4>11$

$5x<-15$ 或 $5x>7$

$x<-3$ 或 $x>\frac{7}{5}$ #

解不等式 $|2x-5|>13$。

$2x-5<-13$ 或 $2x-5>13$

$2x<-8$ 或 $2x>18$

$x<-4$ 或 $x>9$ #

1-2

直角坐標系

焦點主題 9 直角坐標距離公式

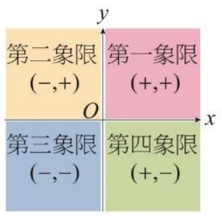
(1) 直角坐標平面上的 x、y 軸把平面分成四個區域，每一個區域稱為「象限」。

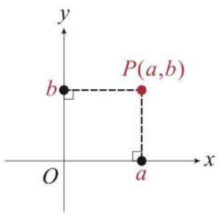
(2) 當坐標平面上有一點 P，自 P 點分別對 x、y 軸作垂線，且交 x、y 軸的點所對應的數分別為 a、b，則以 (a, b) 表示 P 點的坐標，記為 $P(a, b)$，其中 a 為 P 點的 x 坐標，b 為 P 點的 y 坐標。

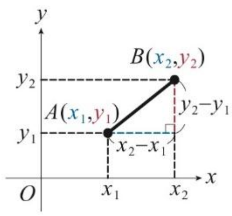
(3) 兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_1, y_2)$ 在同一鉛垂線上，$\overline{AB} = |y_2 - y_1|$。

(4) 兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_1)$ 在同一水平線上，$\overline{AB} = |x_2 - x_1|$。

(5) 兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 之間的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$。







觀念是非題

（✗）1. 兩點 $P(4, 2)$、$Q(3, 3)$ 到原點的距離相等。

$\sqrt{4^2+2^2} \neq \sqrt{3^2+3^2}$

範例 9 老師講解 　 學生練習

坐標平面上有一圓的圓心為 $Q(5, 1)$，而圓通過點 $P(17, 6)$，試求此圓的直徑長。

$r = \overline{PQ} = \sqrt{(17-5)^2+(6-1)^2}$

$= \sqrt{12^2+5^2}$

$= 13$

直徑 $= 2r = 26$ ※

坐標平面上有兩點 $A(3, 2)$、$B(11, 8)$，試求 A、B 之間的距離。

$\overline{AB} = \sqrt{(11-3)^2+(8-2)^2}$

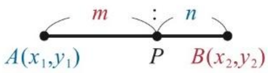
$= \sqrt{8^2+6^2}$

$= 10$ ※

焦點主題 10　直角坐標（分點公式）

坐標平面上有兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，若點 P 在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$，

則 $P\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$，即 $P = \dfrac{nA+mB}{m+n}$。



小提醒　分子為交叉相乘的和。　＊比例相加當分母，交叉相乘再相加當分子！

範例 10　老師講解

坐標平面上有兩點 $A(1, 17)$、$B(9, 1)$，且 P 點在 $\overline{AB}$ 上，若 $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 5$，試求 P 點坐標。

$3 : 5$

$A(1,17)\quad P(x,y)\quad B(9,1)$

$x = \dfrac{5\times1+3\times9}{3+5} = \dfrac{32}{8} = 4$

$y = \dfrac{5\times17+3\times1}{3+5} = \dfrac{88}{8} = 11$

$\therefore P(4,11)$ ＊

學生練習

坐標平面上有兩點 $A(3, 20)$、$B(15, 2)$，且 P 點在 $\overline{AB}$ 上，若 $\overline{AP} : \overline{PB} = 5 : 1$，試求 P 點坐標。

$5 : 1$

$A(3,20)\quad P(x,y)\quad B(15,2)$

$x = \dfrac{1\times3+5\times15}{5+1} = \dfrac{78}{6} = 13$

$y = \dfrac{1\times20+5\times2}{5+1} = \dfrac{30}{6} = 5$

$\therefore P(13,5)$ ＊

焦點主題 11　直角坐標（中點公式）

坐標平面上有兩點 A、B，則線段 $\overline{AB}$ 的中點 $M = \dfrac{A+B}{2}$。

範例 11　老師講解

坐標平面上有一圓的直徑兩端點為 $A(7, 3)$、$B(5, 13)$，試求此圓的圓心坐標。

$O\left(\dfrac{7+5}{2}, \dfrac{3+13}{2}\right) = O(6,8)$ ＊

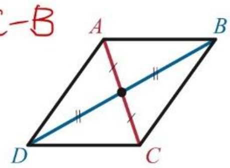
學生練習

坐標平面上有兩點 $A(1, 17)$、$B(9, 1)$，試求線段 $\overline{AB}$ 的中點坐標。

$M\left(\dfrac{1+9}{2}, \dfrac{17+1}{2}\right) = M(5,9)$ ＊

焦點主題 12　直角坐標（平行四邊形的頂點）

坐標平面上有平行四邊形 $ABCD$，頂點關係為 $A+C=B+D$。∴ $D=A+C-B$



小提醒　對角線互相平分，中點重合：$\frac{A+C}{2}=\frac{B+D}{2}$。

範例 12　老師講解　學生練習

平行四邊形 $ABCD$ 中，若 A、B、C 三點的坐標分別為 $(1, 13)$、$(6, 4)$、$(10, 1)$，試求 D 點坐標。

$D=A+C-B$

設 $D(x, y)$

則 $\begin{cases} x=1+10-6=5 \\ y=13+1-4=10 \end{cases}$

∴ $D(5, 10)$ ※

平行四邊形 $ABCD$ 中，若 A、B、C 三點的坐標分別為 $(2, 1)$、$(8, 5)$、$(6, 15)$，試求 D 點坐標。

$D=A+C-B$

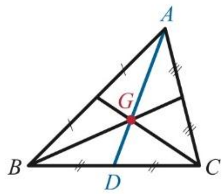
設 $D(x, y)$

則 $\begin{cases} x=2+6-8=0 \\ y=1+15-5=11 \end{cases}$

∴ $D(0, 11)$ ※

焦點主題 13　直角坐標（三角形的重心）

三角形的三條中線交點為重心，在坐標平面上的△ ABC 之重心為 $G=\frac{A+B+C}{3}$。



小提醒　$\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$。

範例 13　老師講解　學生練習

三角形三頂點的坐標分別為 $A(2, 4)$、$B(0, 2)$、$C(7, 0)$，試求三角形的重心坐標。

設 $G(x, y)$

則 $\begin{cases} x=\frac{2+0+7}{3}=3 \\ y=\frac{4+2+0}{3}=2 \end{cases}$

∴ $G(3, 2)$

坐標平面上有三點 $A(1, 13)$、$B(6, 4)$、$C(5, 1)$，試求△ ABC 的重心坐標。

設 $G(x, y)$

則 $\begin{cases} x=\frac{1+6+5}{3}=4 \\ y=\frac{13+4+1}{3}=6 \end{cases}$

∴ $G(4, 6)$ ※

1-3 函數及其圖形

焦點主題 14 函數的意義

(1) 設 x、y 是兩個變數，當 x 的值給定時，y 的值依照某種規則而唯一確定，則此種對應關係稱為「y 是 x 的函數」。如果將這個函數命名為 f，則可以記作 $y=f(x)$，而 $f(x)$ 在 $x=a$ 的函數值為 $f(a)$。

小提醒 如果把對應的函數命名為 g，則記作 $y=g(x)$。

(2) 設函數 $y=f(x)$，則 x 的有效範圍稱為「定義域」，函數值 y 的範圍稱為「值域」。

觀念是非題 （O）1. 設 $f(x)=2x^2+ax+5$，若 $f(1)=9$，則 $a=2$。

範例 14 老師講解

若 $f(x)=\begin{cases}4x+1，x\geq 0\\ |x-1|，x<0\end{cases}$，試求 $f(3)$、$f(-3)$ 的值。

$\because 3\geq 0 \therefore f(x)=4x+1$

$f(3)=12+1=13$ #

$\because -3<0 \therefore f(x)=|x-1|$

$f(-3)=|-3-1|=4$ #

學生練習

若 $f(x)=\begin{cases}x^2+3，x\geq 2\\ 7，x<2\end{cases}$，試求 $f(4)$、$f(0)$ 的值。

$\because 4\geq 2 \therefore f(x)=x^2+3$

$f(4)=4^2+3=19$ #

$\because 0<2 \therefore f(x)=7$

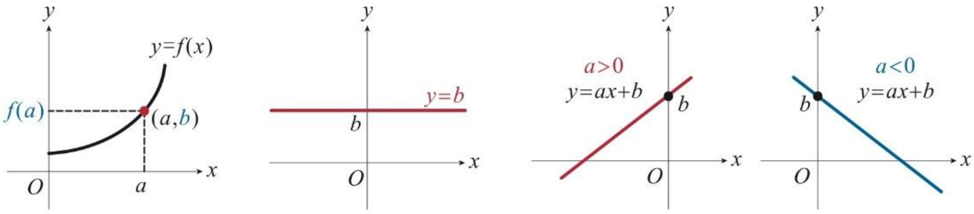
$f(0)=7$ #

焦點主題 15　線型函數（常數與一次函數）

(1) 坐標平面滿足函數 $y=f(x)$ 的所有點坐標 (x,y) 所形成的圖形，就是函數 f 的圖形。
(2) 若函數 f 的圖形通過點 (a,b)，則 $f(a)=b$。
(3) 形如 $y=b$ 或 $f(x)=b$（常數）的函數稱為「常數函數」，圖形是水平直線。
(4) 設 $a\neq 0$，形如 $y=ax+b$ 或 $f(x)=ax+b$ 的函數稱為「一次函數」，圖形是斜直線。當 $a>0$ 時，圖形由左往右上升；當 $a<0$ 時，圖形由左往右下降。

C
1

小提醒　函數 $y=ax+b$ 就是直線的斜截式，其中 a 為斜率，b 為 y 截距。
① 當 $a>0$，圖形由左往右上升；當 $a<0$，圖形由左往右下降。
② 當 $b>0$，圖形通過 y 軸的正向；當 $b<0$，圖形通過 y 軸的負向。



觀念是非題　（X）2. 若函數圖形為一直線，則此函數為一次函數。
水平線 → 常數函數

範例 15　老師講解　學生練習

若 $y=f(x)$ 的函數圖形是一通過 $(1,1)$、$(2,3)$ 兩點的直線，試求 $f(-1)$。

設 $f(x)=ax+b$

則 $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

$\therefore f(x)=2x-1$

故 $f(-1)=2\times(-1)-1=-2-1=-3$ ※

若 $f(x)=ax+b$ 且 $f(0)=-2$，$f(2)=4$，試求 $f(3)$。

$\begin{cases} f(0)=-2 \\ f(2)=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=-2 \\ 2a+b=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$

$\therefore f(x)=3x-2$

故 $f(3)=3\times3-2=9-2=7$ ※

焦點主題 16　二次函數

(1) 設 $a \neq 0$，形如 $y = ax^2 + bx + c$ 或 $y = a(x-h)^2 + k$ 的函數稱為「二次函數」，圖形為拋物線。當 $a > 0$ 時，圖形開口向上，有最低點；當 $a < 0$ 時，圖形開口向下，有最高點。

> **小提醒**　二次函數圖形的最低點、最高點就是拋物線的頂點。且 $|a|$ 的值愈大，開口愈小。

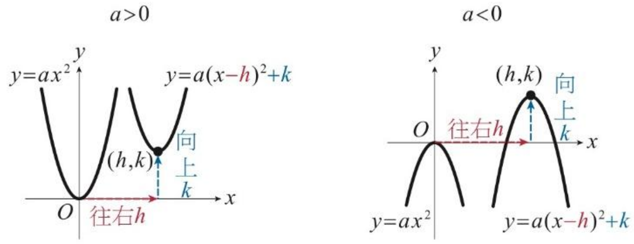
(2) 二次函數 $y = ax^2$ 的圖形頂點在原點 $(0, 0)$，其對稱軸為 y 軸。

(3) 二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ 的頂點坐標為 (h, k)，其對稱軸為 $x = h$。→鉛直線

(4) 若 h、$k > 0$，二次函數 $y = ax^2$ 與 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形關係如下：

> **小提醒**　兩個二次函數的 x^2 項係數相等，則其圖形形狀相同，只是位置不同。

$y = ax^2$ 的圖形 → 往右平移 $\boxed{h}$ 單位 → $y = a(x - \boxed{h})^2$ 的圖形 → 向上平移 $\boxed{k}$ 單位 → $y = a(x-h)^2 + \boxed{k}$ 的圖形



★平移
右移h：x換成x−h
左移h：x換成x+h
上移k：y換成y−k
下移k：y換成y+k

觀念是非題

(X) 3. 將 $y = 3x^2$ 的圖形向右平移 1 單位，再向上平移 2 單位後，恰與 $y = 3(x+1)^2 + 2$ 的圖形重合。

$y=3x^2 \xrightarrow[\text{上移2}]{\text{右移1}} y-2=3(x-1)^2$

得 $y=3(x-1)^2+2$

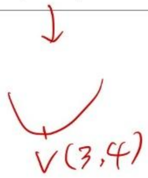
範例 16　老師講解　　　學生練習

試填寫下列表格：

	二次函數	頂點坐標
(1)	$y = 4x^2$	(0,0)
(2)	$y = -6(x-1)^2 + 5$	(1,5)

試填寫下列表格：

	二次函數	頂點坐標
(1)	$y = -3x^2$	(0,0)
(2)	$y = 2(x-3)^2 + 4$	(3,4)



焦點主題 17　二次函數的頂點與配方

*配方法

$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

除以2,再平方

二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。 $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

小提醒　配方 $ax^2+bx+c=a\left[x^2+2\times\dfrac{b}{2a}\times x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right]+c-\dfrac{b^2}{4a}=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

C

1

範例 17　老師講解　　　學生練習

利用配方法，把 $y=3x^2+24x+50$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並求其頂點坐標。

$y=3x^2+24x+50$

$=3(x^2+8x+16)+50-48$

$=3(x+4)^2+2$

$V(-4,2)$ ※

利用配方法，把 $y=2x^2-4x+5$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並求其頂點坐標。

$y=2x^2-4x+5$

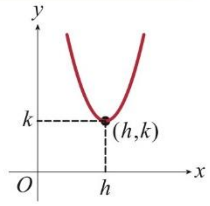
$=2(x^2-2x+1)+5-2$

$=2(x-1)^2+3$

$V(1,3)$ ※

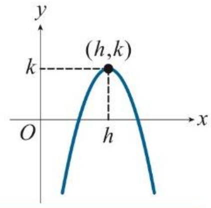
焦點主題 18　二次函數的極值

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的極值（最大值或最小值）會發生在頂點處。



(1) 當 $a>0$ 時，函數 f 有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，此時 $x=-\dfrac{b}{2a}$。

(2) 當 $a<0$ 時，函數 f 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，此時 $x=-\dfrac{b}{2a}$。



小提醒　極值就是頂點的 y 坐標，如果頂點是 (h,k)，則極值就是 k。

範例 18　老師講解　　　學生練習

試求函數 $y=-2x^2+3x+4$ 的最大值。

$y=-2x^2+3x+4$

$=-2(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16})+4+\frac{9}{8}$

$=-2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{41}{8}$

當 $x=\frac{3}{4}$ 時，y 有最大值 $\frac{41}{8}$ ※

試求函數 $y=5x^2+4x+1$ 的最小值。

$y=5x^2+4x+1$

$=5(x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{25})+1-\frac{4}{5}$

$=5(x+\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}$

當 $x=-\frac{2}{5}$ 時，y 有最小值 $\frac{1}{5}$ ※

1-3　邁向統測之路

二次函數的圖形判斷係數之正負

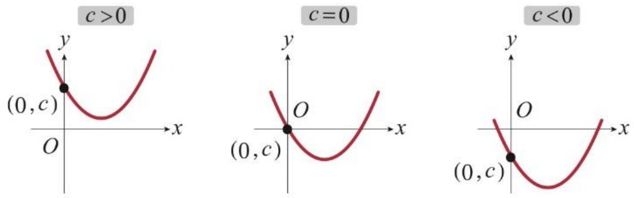
已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為拋物線，

(1) 若圖形開口向上，則 $a>0$；若開口向下，則 $a<0$。

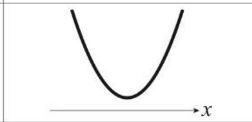
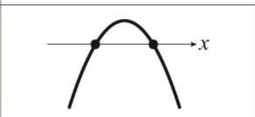
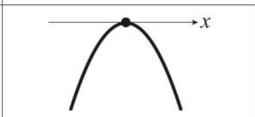
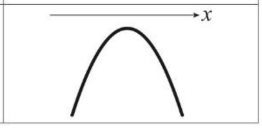
(2) 圖形頂點 x 坐標的位置，可知 $-\dfrac{b}{2a}$ 的正負，進而判斷 b 的正負。

(3) 圖形與 y 軸的交點坐標為 $(0,c)$，則交點在

①y 軸正向 $\Leftrightarrow$ $c>0$　②原點 $\Leftrightarrow$ $c=0$　③y 軸負向 $\Leftrightarrow$ $c<0$。



(4) 令 $D=b^2-4ac$，則 D 的正負、圖形與 x 軸的交點數之關係如下：

	$D=b^2-4ac>0$	$D=b^2-4ac=0$	$D=b^2-4ac<0$
與 x 軸的交點個數	2 個	1 個	0 個
$a>0$			
$a<0$			

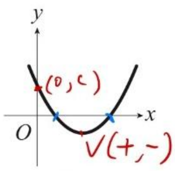
老師講解	學生練習

老師講解

若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下，判斷下列各數的正負：

(1) a　(2) b

(3) c　(4) b^2-4ac。



(1) 開口向上 → $a>0$

(2) $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right) \to (+,-)$

$\because -\dfrac{b}{2a}>0$ 且 $a>0$ $\therefore b<0$

(3) 圖形與y軸交點 $(0,c)$ 在原點上方 → $c>0$

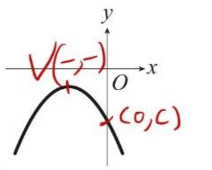
(4) 圖形與x軸交相異兩點 → $b^2-4ac>0$ ✻

學生練習

若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下，判斷下列各數的正負：

(1) a　(2) b

(3) c　(4) b^2-4ac。



(1) 開口向下 → $a<0$

(2) $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right) \to (-,-)$

$\because a<0$ $\therefore b<0$, $b^2-4ac<0$

(3) $(0,c)$ 在原點下方 → $c<0$

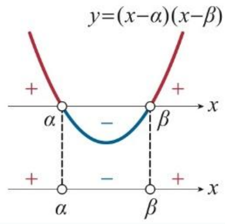
(4) 圖形與x軸沒交點 → $b^2-4ac<0$ ✻

1-4

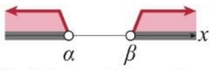
一元二次不等式

焦點主題 19 一元二次不等式（I）

設 α、β 為相異實數，則方程式 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 有兩相異實根 α、β（$\alpha<\beta$）。



(1) 不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 的解：$x<\alpha$ 或 $x>\beta$。



比小的小或比大的大

(2) 不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 的解：$\alpha<x<\beta$。

介於兩者之間

小提醒 當不等式的不等號為 $\geq$ 或 $\leq$ 時，圖解的空心圓圈○改成實心圓圈●。

觀念是非題 （O）1. 不等式 $(x-3)(x-8)<0$ 的解為 $3<x<8$。

範例 19 老師講解 ｜ 學生練習

老師講解：

試解下列的不等式：

(1) $(x-1)(x+5)>0$　(2) $(x-1)(x+5)<0$。

(1) $x<-5$ 或 $x>1$

(2) $-5<x<1$

學生練習：

試解下列的不等式：

(1) $(x+2)(x-7)>0$　(2) $(x+2)(x-7)<0$。

(1) $x<-2$ 或 $x>7$

(2) $-2<x<7$

焦點主題 20 一元二次不等式（II）

當 $A>0$ 時，若 Ax^2+Bx+C 可因式分解成 $A(x-\alpha)(x-\beta)$ 且 $\alpha<\beta$，則

(1) $Ax^2+Bx+C>0 \iff A(x-\alpha)(x-\beta)>0 \iff x<\alpha$ 或 $x>\beta$。

(2) $Ax^2+Bx+C<0 \iff A(x-\alpha)(x-\beta)<0 \iff \alpha<x<\beta$。

(3) $Ax^2+Bx+C\geq 0 \iff A(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0 \iff x\leq\alpha$ 或 $x\geq\beta$。

(4) $Ax^2+Bx+C\leq 0 \iff A(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0 \iff \alpha\leq x\leq\beta$。

範例 20 老師講解 學生練習

試解下列的不等式：
(1)$x^2+4x+3\ge 0$ (2)$x^2+4x+3\le 0$。

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

1 ╳ +1
1 ╳ +3

(1) $(x+1)(x+3)\ge 0$
$x\le -3$ 或 $x\ge -1$ ※

(2) $(x+1)(x+3)\le 0$
$-3\le x\le -1$ ※

試解下列的不等式：
(1)$x^2+7x+10\ge 0$ (2)$x^2+7x+10\le 0$。

$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$

1 ╳ +2
1 ╳ +5

(1) $(x+2)(x+5)\ge 0$
$x\le -5$ 或 $x\ge -2$ ※

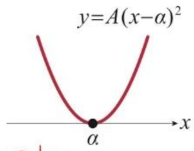
(2) $(x+2)(x+5)\le 0$
$-5\le x\le -2$ ※

焦點主題 21 一元二次不等式（III）

當 $A>0$ 時，若 Ax^2+Bx+C 可因式分解成 $A(x-\alpha)^2$，而 $A(x-\alpha)^2$ 恆正或零，則

(1) $Ax^2+Bx+C\ge 0 \iff A(x-\alpha)^2\ge 0$：解為任意實數。

(2) $Ax^2+Bx+C>0 \iff A(x-\alpha)^2>0$：解為 $x\neq\alpha$ 的任意實數。



觀念是非題 （✗）2. 不等式 $5x^2\ge 0$ 與 $5(x-1)^2\ge 0$ 的解並不相同。

$x\in R$ $x\in R$ 均為 $x\in R$

範例 21 老師講解 學生練習

試解下列的不等式：
(1)$x^2-14x+49\ge 0$
(2)$x^2-14x+49>0$。

$x^2-14x+49=(x-7)^2$

(1) $(x-7)^2\ge 0\rightarrow x\in R$

(2) $(x-7)^2>0\rightarrow x\in R$
但 $x\neq 7$
※

試解下列的不等式：
(1)$x^2-10x+25\ge 0$
(2)$x^2-10x+25>0$。

$x^2-10x+25=(x-5)^2$

(1) $(x-5)^2\ge 0\rightarrow x\in R$

(2) $(x-5)^2>0\rightarrow x\in R$
但 $x\neq 5$
※

C

1

焦點主題 22 一元二次不等式（IV）

當 $A>0$ 時，若 Ax^2+Bx+C 可因式分解成 $A(x-\alpha)^2$，而 $A(x-\alpha)^2$ 恆正或零，則

(1) $Ax^2+Bx+C\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad A(x-\alpha)^2\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-\alpha)^2=0$：解為 $x=\alpha$。

(2) $Ax^2+Bx+C<0 \quad\Leftrightarrow\quad A(x-\alpha)^2<0$：無實數解。

範例 22 老師講解 學生練習

試解下列的不等式：

(1)$x^2+12x+36\le 0$

(2)$x^2+12x+36<0$。

$x^2+12x+36=(x+6)^2$

(1) $(x+6)^2\le 0 \rightarrow x=-6$

(2) $(x+6)^2<0 \rightarrow$ 無解

試解下列的不等式：

(1)$x^2+16x+64\le 0$

(2)$x^2+16x+64<0$。

$x^2+16x+64=(x+8)^2$

(1) $(x+8)^2\le 0 \rightarrow x=-8$

(2) $(x+8)^2<0 \rightarrow$ 無解

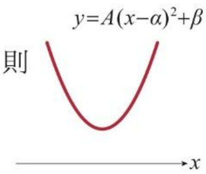
焦點主題 23 一元二次不等式（V）

當 $A>0$ 時，若 Ax^2+Bx+C 無法因式分解（此時 $B^2-4AC<0$），

則可將 Ax^2+Bx+C 配方成 $A(x-\alpha)^2+\beta$（β 為正數），而 $A(x-\alpha)^2+\beta$ 恆正，則

(1) $Ax^2+Bx+C>0$ 或 $Ax^2+Bx+C\ge 0$ 的解：任意實數。

(2) $Ax^2+Bx+C<0$ 或 $Ax^2+Bx+C\le 0$ 的解：無實數解。



範例 23 老師講解 學生練習

試解下列的不等式：

(1)$x^2-4x+7>0$ (2)$x^2-4x+7<0$。

$\begin{cases} ① a>0 \\ ② D=b^2-4ac<0 \end{cases} \rightarrow$ 恆正

(1) $\because \begin{cases} ① 1>0 \\ ② D=(-4)^2-4\times1\times7<0 \end{cases}$

x^2-4x+7 恆正

即 $x^2-4x+7>0 \rightarrow x\in R$ ※

(2) $x^2-4x+7<0 \rightarrow$ 無解 ※

試解下列的不等式：

(1)$x^2-6x+11>0$ (2)$x^2-6x+11<0$。

$\because \begin{cases} ① 1>0 \\ ② D=(-6)^2-4\times1\times11<0 \end{cases}$

$\therefore x^2-6x+11$ 恆正

(1) $x^2-6x+11>0 \rightarrow x\in R$ ※

(2) $x^2-6x+11<0 \rightarrow$ 無解 ※

統測常考題

範例 1 反求一元二次不等式

設 a、b 均為實數，若不等式 $ax^2+3x+b\geq 0$ 的解為 $-\frac{1}{2}\leq x\leq 5$，則 $3a+6b=$

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。 [統測]

解題小技巧

(1) 設 $\alpha<\beta$，則

① $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$。

② $(x-\alpha)(x-\beta)>0 \Rightarrow x<\alpha$ 或 $x>\beta$。

(2) 設 $A>0$、$B<0$，則

① $f(x)>0 \Rightarrow Af(x)>0$，$Bf(x)<0$。

② $f(x)<0 \Rightarrow Af(x)<0$，$Bf(x)>0$。

解：$-\frac{1}{2}\leq x\leq 5 \Rightarrow \left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right](x-5)\leq 0 \overset{\times 2}{\Rightarrow} (2x+1)(x-5)\leq 0$

$\Rightarrow 2x^2-9x-5\leq 0 \overset{\div(-3)}{\Rightarrow} -\frac{2}{3}x^2+3x+\frac{5}{3}\geq 0$

與 $ax^2+3x+b\geq 0$ 比較係數，得 $a=-\frac{2}{3}$，$b=\frac{5}{3}$

因此 $3a+6b=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)+6\times\frac{5}{3}=8$

類題 1 設 a 和 b 均為實數，若不等式 $ax^2+bx-5<0$ 的解為 $-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$，則 $a+b=$ ？__________

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{7}{3}$ (C) 5 (D) 7。 [統測]

類題 2 若一元二次不等式 $ax^2+bx-6\geq 0$ 的解為 $2\leq x\leq 3$，則數對 (a,b) 為下列何者？__________

(A) $(-1,-5)$ (B) $(-1,5)$ (C) $(1,-5)$ (D) $(1,5)$。 [107 (B)]

設 a 和 b 均為實數，若不等式 $ax^2+bx-5<0$ 的解為 $-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$，則 $a+b=$ ？__________

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{7}{3}$ (C) 5 (D) 7。 [統測]

由 $-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$ 得 $(2x+3)(3x-5)<0$

$6x^2-x-15<0 \to 2x^2-\frac{1}{3}x-5<0$

$\to a=2, b=-\frac{1}{3}$

故 $a+b=2+(-\frac{1}{3})=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$ #

若一元二次不等式 $ax^2+bx-6\geq 0$ 的解為 $2\leq x\leq 3$，則數對 (a, b) 為下列何者？__________

(A) $(-1, -5)$ (B) $(-1, 5)$ (C) $(1, -5)$ (D) $(1, 5)$。 [107 (B)]

由 $2\leq x\leq 3$ 得 $(x-2)(x-3)\leq 0$

$x^2-5x+6\leq 0 \to -x^2+5x-6\geq 0$

$\to a=-1, b=5$

故 $(a,b)=(-1,5)$ #

最素傳說

素養題 生活素養之算幾不等式

若想要利用一條繩子圍出一個面積至少為 25 平方公尺的矩形花園，則所需要的繩子總長度至少須為多少公尺？ (A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24。 [統測]

解題小技巧

算幾不等式：
若 a、b 均為正數，則 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$。

解：設矩形花園長 x 公尺，寬 y 公尺（$x>0$，$y>0$）

繩子總長 ＝ 矩形周長 $=2x+2y$

$\because$ 面積至少為 25 平方公尺 $\therefore$ 面積 $xy \geq 25$

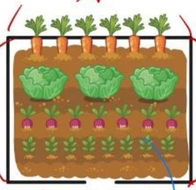
由算幾不等式：$\dfrac{2x+2y}{2} \geq \sqrt{(2x)\times(2y)}$

$\Rightarrow x+y \geq \sqrt{4xy} \geq \sqrt{4\times 25}=10$

$\Rightarrow 2x+2y \geq 2\times 10=20$

因此繩子總長度至少須為 20 公尺

類題 1 一農夫想用 66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如圖所示。試求此農夫所能圍成的最大面積。＿＿＿＿＿
(A) 280 (B) 285 (C) 288 (D) 289 平方公尺。 ✓



x
y y
x-2

$A=xy$

$x+y+x-2+y=66$

$2x+2y=68$

$x+y=34$

$\because x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$\therefore \overset{17}{\cancel{34}} \geq \cancel{2}\sqrt{xy} \rightarrow xy \leq \underline{289}$ #