



指數與對數



9-1

指數及其運算的意義



重點

指數的運算

1. 指數的定義：

(1) 正整數指數：若 a 為實數， n 為正整數，則符號 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 個}}$ 讀作「 a 的 n 次方」，

其中 a 稱為「底數」， n 稱為「指數」。

(2) 零指數：設 a 為實數且 $a \neq 0$ ，則 $a^0 = 1$ ，而 0^0 無意義。

(3) 負整數指數：設 a 為實數且 $a \neq 0$ ， n 為正整數，則 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。

(4) 有理數指數：設 a 為正實數， n 為正整數， m 為整數，則 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ， $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ 。

2. 實數指數的指數律：設 a 、 b 為正實數， m 與 n 為任意實數，則

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。 (2) $(a^m)^n = a^{mn}$ 。 (3) $a^n \times b^n = (ab)^n$ 。

3. 性質：(1) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 。 (2) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ 。

難易度

01

老師講解

正整數指數

學生演練



試求下列各式之值：

(1) $3 \times 3^2 \times 3^3$ (2) $(3^2)^3$ (3) $\frac{3^{11}}{3^6}$

(4) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^3 (\sqrt{5} - \sqrt{2})^3$ 。

試求下列各式之值：

(1) $2^2 \times 2^3 \times 2^4$ (2) $(2^3)^3$

(3) $\frac{2^{10}}{2^4}$ (4) $4^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ 。

難易度 🐾

02

老師講解

零指數和負整數指數

學生演練



試求下列各式之值：

(1) $(2^{-1})^3 \times 2^{-2} \times 2^6$

(2) $(10 + \sqrt{7})^0 (10 - \sqrt{7})^0$ 。

試求下列各式之值：

(1) $3^{-2} \times (3^{-3}) \times 3^{10}$

(2) $(4 + \sqrt{13})^0 (4 - \sqrt{13})^0$ 。

難易度 🐾

03

老師講解

整數指數

學生演練



設 a 為正實數，若 $a + a^{-1} = 5$ ，試求下列各式之值。

(1) $a^2 + a^{-2}$ (2) $a^3 + a^{-3}$ 。

提示： $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

設 a 為正實數，若 $a - a^{-1} = 3$ ，試求下列各式之值。

(1) $a^2 + a^{-2}$ (2) $a^3 - a^{-3}$ 。

提示： $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

難易度 🐾🐾

04 老師講解

有理數指數

學生演練



試求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{2^{15}} + 9^{\frac{1}{2}} \times 81^{\frac{3}{4}}$ (2) $(0.25)^{-\frac{3}{2}}$

(3) $(\frac{125}{64})^{-\frac{1}{3}}$ 。

試求下列各式的值：

(1) $\sqrt[6]{3^{18}} + 8^{\frac{1}{3}} \times 32^{\frac{2}{5}}$ (2) $(0.36)^{-0.5}$

(3) $(\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}}$ 。

難易度 🐾🐾

05 老師講解

有理數指數

學生演練

設 a 、 b 為正實數，若 $\frac{a^{-2}b \times \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{ab^3}} = a^x \times b^y$ ，試求 $x+y$ 之值。設 a 、 b 為正實數，若 $\frac{\sqrt[3]{a^2b} \times b^{-1}}{ab^{-2}} = a^x \times b^y$ ，試求 $x+y$ 之值。

難易度 🐾

06 老師講解

實數指數

學生演練



已知 $2^x = 5$ ，試求 8^{x+1} 之值。

已知 $3^x = 7$ ，試求 9^{x-1} 之值。

難易度 🐾

07 老師講解

實數指數

學生演練



設 $a^{2x} = 3$ ，試求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 之值。

設 $a^{2x} = 7$ ，試求 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^{3x} + a^{-3x}}$ 之值。

難易度

08

老師講解

指數律的運用

學生演練



設 x 、 y 皆為實數，且 $26^x = 1000$ 、
 $(0.26)^y = 100$ ，試求 $\frac{3}{x} - \frac{2}{y}$ 之值。

設 x 、 y 皆為實數，且 $96^x = 16$ 、 $3^y = 32$ ，
 試求 $\frac{4}{x} - \frac{5}{y}$ 之值。



自我挑戰



1. 已知 $9^x = 2$ ，試求下列各值：

(1) $3^{-x} =$ _____ (2) $27^x =$ _____ (3) $9^{-x+1} =$ _____。

2. 計算下列各式的值：

(1) $[(\sqrt{2})^{-3} \times (\sqrt{2})^6] \div (\sqrt{2})^{-1} =$ _____ (2) $[(-2)^3]^2 - [(\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}]^6 =$ _____

(3) $2(\frac{\sqrt{2}}{7+\sqrt{3}})^0 =$ _____ (4) $(2+\sqrt{7})^4(2-\sqrt{7})^4 =$ _____

(5) $(\frac{1}{243})^{\frac{2}{5}} \times (0.0625)^{-1.5} \times \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2})^{-10}} =$ _____。

3. (1) 若 $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[5]{64} = 4^a$ ，則 $a =$ _____。

(2) 已知 a 、 b 皆為正實數，且 $(a^3b^{-1})^{\frac{1}{2}} \times b^{-\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{a^{-2}b} = a^m b^n$ ，則 $m =$ _____， $n =$ _____。

4. 設 $a > 0$ ，且 $a^1 + a^{-1} = \sqrt{6}$ ，則 (1) $a^2 + a^{-2} =$ _____ (2) $a^3 + a^{-3} =$ _____。

素 5. 某放射性物質重 512 公克，半衰期為 2 年（每 2 年重量衰變為原來的 $\frac{1}{2}$ ），試問

(1) 假使過了 7 年，則剩下 _____ 公克。

(2) 若 n 年後，放射性物質重 512 公克變成 1 公克，則 $n =$ _____ 年。

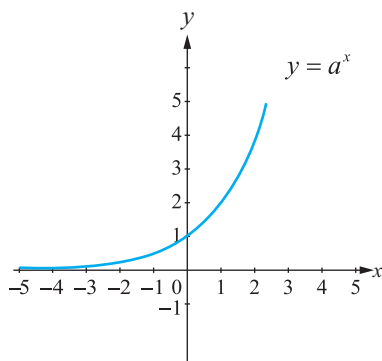
9-2

指數函數及其圖形

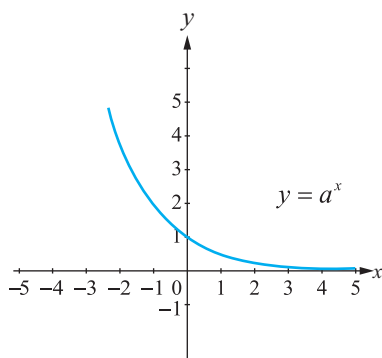


重點 指數函數及其圖形

1. **指數函數**：設底數 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，指數 x 為任意實數，則 $y = f(x) = a^x$ 之函數稱為以 a 為底數的指數函數。
2. **指數函數的圖形**： $y = a^x$ 圖形的性質如下：
 - (1) 定義域（ x 的範圍）： x 為任意實數。
 - (2) 值域（ y 的範圍）： $y > 0$ ，即 $y = a^x$ 的圖形皆在 x 軸上方，且和 x 軸沒有交點。
 - (3) $y = a^x$ 的圖形恆過定點 $(0, 1)$ 。
 - (4) 圖形以 x 軸為漸近線。
 - (5) 底數 $a > 1$ 時， $y = a^x$ 的圖形由左而右一直上升，即 x 值愈大，函數值 y 也愈大，稱 $y = a^x$ 為遞增函數。當 x 值愈小時，圖形愈接近 x 軸。



- (6) 底數 $0 < a < 1$ 時， $y = a^x$ 的圖形由左而右一直下降，即 x 值愈大，函數值 y 愈小，稱 $y = a^x$ 為遞減函數。當 x 值愈大時，圖形愈接近 x 軸。



- (7) $y = a^x$ 的圖形與 $y = (\frac{1}{a})^x$ 的圖形對稱於 y 軸。

難易度 

01 老師講解

化為同底數再比較大小

學生演練

試比較下列兩組數值的大小。

(1) $a = 4$ 、 $b = (\frac{1}{4})^{-1.5}$ 、 $c = \sqrt[3]{16}$

(2) $a = \sqrt[3]{0.09}$ ， $b = \sqrt{0.3}$ ， $c = \frac{27}{1000}$ 。

試比較下列兩組數值的大小。

(1) $a = \sqrt{3}$ 、 $b = \sqrt[3]{9}$ 、 $c = \sqrt[5]{27}$

(2) $a = 0.7$ ， $b = \sqrt{0.7}$ ， $c = \sqrt[3]{0.49}$ 。



重點

指數函數圖形的平移

平移函數 $y = a^x$ 的圖形

1. 左右平移：

(1) 向左平移 h 單位 $\Rightarrow y = a^{x+h}$

(2) 向右平移 h 單位 $\Rightarrow y = a^{x-h}$ (口訣：右-左+)

2. 上下平移：

(1) 向上平移 k 單位 $\Rightarrow y - k = a^x$

(2) 向下平移 k 單位 $\Rightarrow y + k = a^x$ (口訣：上-下+)

難易度 🐾

02

老師講解

指數函數圖形的平移

學生演練



將函數 $y=2^x$ 的圖形向左平移 2 單位、向下平移 3 單位，所得新函數為何？

將函數 $y=5^x$ 的圖形向右平移 3 單位、向上平移 2 單位，所得新函數為何？



重點

指數方程式和指數不等式

1. 指數方程式：先將等式兩邊化為同底數，當 $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$ 。
2. 指數不等式：先將不等式兩邊化為同底數：
 - (1) 當底數 $a > 1$ 為遞增函數，則 $a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) > f_2(x)$ 。
 - (2) 當底數 $0 < a < 1$ 為遞減函數，則 $a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) < f_2(x)$ 。

難易度 🐾

03

老師講解

指數方程式

學生演練



試求指數方程式 $81^x = \frac{\sqrt[3]{3}}{27}$ 的解。

試求指數方程式 $(\sqrt{2})^{2x-1} = \frac{8}{256^x}$ 的解。

難易度

04 老師講解

指數不等式

學生演練



試求指數不等式的解：

(1) $5^{x^2-5} > (\frac{1}{25})^{x+1}$

(2) $(0.008)^{2x-1} > (0.04)^{x+3}$ 。

試求指數不等式的解：

(1) $(\frac{1}{16})^{x+3} > 4^{x^2-7x}$

(2) $(0.09)^{x-3} > (0.0081)^{x+1}$ 。



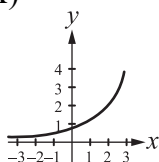
自我挑戰



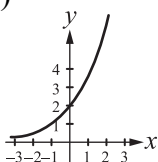
1. 請依照方程式填入(A)、(B)、(C)或(D)：

(1) $y = \frac{1}{2^{-x-1}}$ 的圖形與 _____ 最相近。 (2) $y = 2^{-x-1}$ 的圖形與 _____ 最相近。

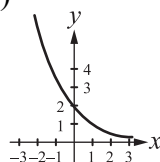
(A)



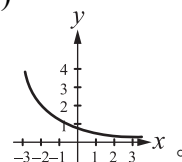
(B)



(C)



(D)

2. 將函數 $y = 2^x$ 的圖形向左平移 1 單位再向下平移 4 單位，所得新函數為 $y =$ _____，其圖形和 x 軸的交點坐標為 _____。

3. 試比較下列各數的大小：

(1) 設 $a = (0.2)^3$ ， $b = (0.2)^{\sqrt{2}}$ ， $c = (0.2)^{-1.5}$ ， $d = (0.2)^{-\frac{1}{3}}$ ：_____。(2) 設 $a = \sqrt[6]{4}$ ， $b = (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$ ， $c = \sqrt[3]{8^{-1}}$ ， $d = 16^{\frac{1}{3}}$ ：_____。

4. 試解下列各式：

(1) $10^{x^2-3} > (10^x)^2$ ，求 x 的範圍：_____。(2) $(0.027)^{\frac{x}{3}-1} > (\sqrt{0.3})^{4x+2}$ ，求 x 的範圍：_____ (3) $(\frac{4}{3})^{3x-7} = (\frac{3}{4})^{-x-5}$ ，則 $x =$ _____。

- 素 5. 已知藥物在人體血液中的剩餘量隨著時間遞減，且經過 x 小時後，血液中的藥物濃度為指數函數 $f(x) = 800 \times a^x$ （毫克／分升），其中 a 是常數。若人體的藥物濃度低於 50 毫克／分升時就必須再服藥，今某病患服藥兩小時後，血液中的藥物濃度為 400（毫克／分升），則此病患下次服藥時間應該為 _____ 小時後。

9-3

對數及其運算的意義



重點

對數的運算

1. **對數的定義：**若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，當 $a^x = b$ 時，我們用符號 $\log_a b$ 來表示 x ，即 $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$ ，其中 a 稱為 $\log_a b$ 的底數， b 稱為 $\log_a b$ 的真數。
若 $\log_a b$ 有意義 $\Rightarrow \begin{cases} \text{底數 } a > 0 \text{ 且 } a \neq 1 \\ \text{真數 } b > 0 \end{cases}$ 。
2. **對數的運算公式：**設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $x > 0$ 、 $y > 0$ ， m 、 n 為實數，則
 - (1) $\log_a a = 1$ 。
 - (2) $\log_a 1 = 0$ 。
 - (3) $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$ 。
 - (4) $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$ 。
 - (5) 真數次方： $\log_a (x^n) = n(\log_a x)$ 。
 - (6) 底數次方： $\log_{(a^m)} x = \frac{1}{m}(\log_a x)$ 。
 - (7) 換底公式： $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ 。（其中 $b > 0$ 且 $b \neq 1$ ）
 - (8) 連鎖律： $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d = \log_a d$ 。（其中 a 、 b 、 c 、 d 皆為正實數，且 a 、 b 、 c 皆不等於 1）
 - (9) 倒數關係： $(\log_a x)(\log_x a) = 1 \Leftrightarrow \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ 。
 - (10) $a^{\log_a x} = x$ 。

難易度 🐾

01

老師講解

對數的定義

學生演練



下列何者有意義？

- | | | |
|-------------------|-------------------------|-------------------------|
| (1) $\log_1 7$ | (2) $\log_{(-3)} 3$ | (3) $\log_5 0$ |
| (4) $\log_3 (-3)$ | (5) $\log_{\sqrt{2}} 1$ | (6) $\log_0 \sqrt{3}$ 。 |

若 $\log_{(2-x)}(x+5)$ 有意義，試求 x 的範圍。

難易度 🐾

02

老師講解

同底對數相加、相減

學生演練



試求 $\log_2 19.2 + \log_2 5 - \log_2 3$ 的值。

試求 $\log_{10} 75 + \log_{10} 4 - \log_{10} 3$ 的值。

難易度 🐾

03

老師講解

對數的運算

學生演練



試求 $\log_{\frac{1}{27}} 9 + \log_{10} \sqrt[3]{10} + \log_8 \frac{1}{4}$ 的值。

試求 $\log_{25} \frac{1}{5} + \log_9 \sqrt{3} - \log_{16} 8$ 的值。

難易度 🐾🐾



04 老師講解

對數的運算

學生演練

試求 $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})$ 之值。

試求 $\log_2(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}})$ 之值。

難易度 🐾🐾



05 老師講解

對數的運算

學生演練

試求 $2\log_2 \frac{2}{\sqrt{3}} - \log_2 \frac{7}{6} + \frac{1}{2}\log_2 49$ 之值。

試求 $2\log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2}\log_3 72 + \log_3 \frac{\sqrt{8}}{15}$ 之值。

難易度 🐾🐾

06 老師講解

倒數關係

學生演練



試求 $(\log_9 4 + \log_{\sqrt{3}} \sqrt{8})(\log_4 27 - \log_2 \sqrt{3})$ 之值。

試求 $(\log_{\sqrt{5}} 9 + \log_{25} 3)(\log_9 25 - \log_3 \sqrt{5})$ 之值。

難易度 🐾🐾

07 老師講解

換底公式

學生演練



若已知 $a = \log_{10} 2$ ， $b = \log_{10} 3$ ，試以 a 、 b 表示：

(1) $\log_{10} 5$ (2) $\log_{10} \sqrt{150}$ (3) $\log_5 \left(\frac{4}{3}\right)$ 。

若已知 $a = \log_{10} 2$ ， $b = \log_{10} 3$ ，試以 a 、 b 表示：

(1) $\log_{10} \sqrt{18}$ (2) $\log_6 5$ 。

難易度 🐾🐾

08 老師講解

$$a^{\log_a x} = x$$

學生演練



試求 $2^{\log_2 3} - 25^{\log_5 2} + 3^{2\log_3 \sqrt{2}} - 10^{\frac{\log_5 7}{\log_5 10}}$ 之值。

試求 $7^{2\log_7 3} - 9^{\log_3 5} + \sqrt{6}^{\log_{\sqrt{6}} 8} + 8^{\frac{\log_6 5}{\log_6 8}}$ 之值。



自我挑戰



1. 試求下列各值：

(1) $\log_3 \frac{1}{27} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\log_{999} 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{16} = \underline{\hspace{2cm}}$
 (4) $\log_{0.1} 10000 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 若 $\log_{(x+1)}(-2x+7)$ 有意義，試求 x 的範圍： $\underline{\hspace{4cm}}$ 。

3. 計算下列各值：

(1) $\log_{10} 20 + 2\log_{10} \sqrt{30} - \frac{2}{3}\log_{10} \sqrt{216} = \underline{\hspace{2cm}}$
 (2) $(\log_2 27 - \log_4 9)(\log_3 16 - \log_{\frac{1}{3}} 2) = \underline{\hspace{2cm}}$
 (3) $\log_3 5 \times \log_{125} 13 \times \log_{13} 9 = \underline{\hspace{2cm}}$
 (4) $2^{\log_2 5} + 4^{\log_2 \sqrt{3}} - 3^{\frac{\log_5 9}{\log_5 3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 設 $a = \log_{10} 2$ ， $b = \log_{10} 3$ ，試以 a 、 b 表示下列各式：

(1) $\log_{10} \sqrt{54} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\log_{12} 15 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 素** 5. 目前國際使用「芮氏規模」來表示地震的強度，設 $E(r)$ 為地震「芮氏規模 r 」震央所釋放出來的能量（單位：erg 爾格）， r 與 $E(r)$ 的關係如下：

$$\log_{10} E(r) = 11.8 + 1.5r。$$

若「芮氏規模 5」的地震，其震央所釋放的能量為 $E(5)$ ；「芮氏規模 3」的地震震央所釋放能量為 $E(3)$ ，試求 $\frac{E(5)}{E(3)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

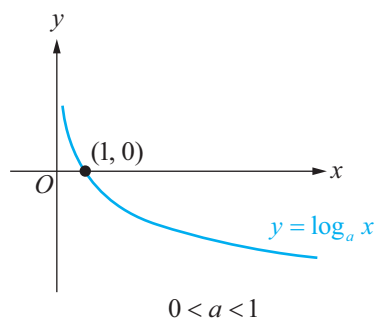
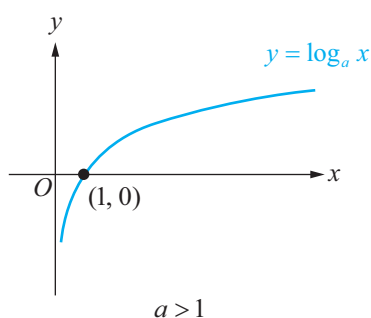
9-4

對數函數及其圖形

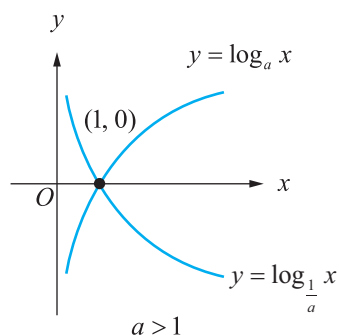


重點 對數函數及其圖形

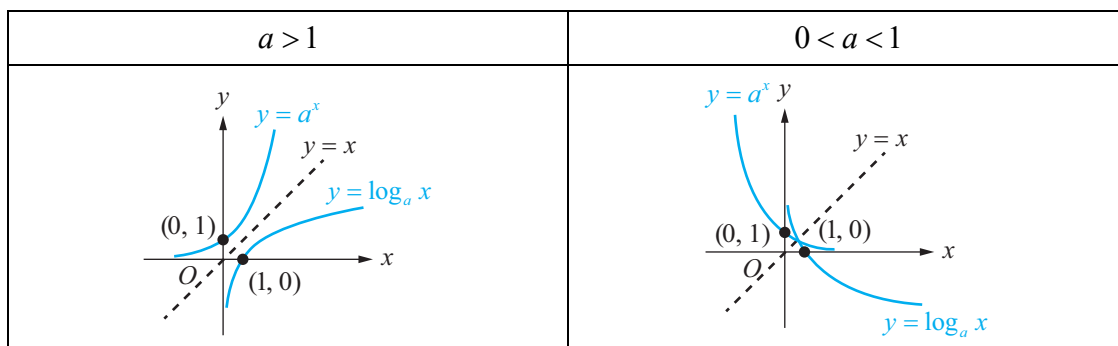
1. 對數函數：設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $x > 0$ ，則 $y = f(x) = \log_a x$ 為以 a 為底數的對數函數。
2. 對數函數的圖形： $y = \log_a x$ 圖形的性質如下
 - (1) 定義域（ x 的範圍）： $x > 0$ ，即 $y = \log_a x$ 的圖形皆在 y 軸右方，和 y 軸沒有交點。
 - (2) 值域（ y 的範圍）： y 為任意實數。
 - (3) $y = \log_a x$ 的圖形恆過定點 $(1, 0)$ 。
 - (4) 圖形以 y 軸為漸近線。
 - (5) 底數 $a > 1$ 時， $y = \log_a x$ 為遞增函數；底數 $0 < a < 1$ 時， $y = \log_a x$ 為遞減函數。



- (6) 當底數互為倒數時， $y = \log_a x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 兩者之圖形對稱於 x 軸。



- (7) 指數函數圖形 $y = a^x$ 與對數函數圖形 $y = \log_a x$ 必對稱於直線 $y = x$ 。





01

老師講解

化為同底數，再比大小

學生演練

試比較下列兩組數值的大小：

(1) $a = \log_3 \sqrt{7}$ 、 $b = \log_{\sqrt{3}} 7$ 、 $c = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{7}$

(2) $a = \log_{0.5} \sqrt{3}$ 、 $b = \log_{0.5} \frac{1}{3}$ 、 $c = \log_{0.5} 0.25$ 。

試比較下列兩組數值的大小：

(1) $a = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{7}$ 、 $b = \log_2 6$ 、 $c = \log_4 25$

(2) $a = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}$ 、 $b = \log_{\frac{1}{3}} 3$ 、 $c = \log_{\frac{1}{9}} 4$ 。



重點

對數函數圖形的平移

平移函數 $y = \log_a x$ 的圖形

1. 左右平移：

(1) 向左平移 h 單位 $\Rightarrow y = \log_a (x+h)$ 。

(2) 向右平移 h 單位 $\Rightarrow y = \log_a (x-h)$ 。（口訣：右 - 左 +）

2. 上下平移：

(1) 向上平移 k 單位 $\Rightarrow y - k = \log_a x$ 。

(2) 向下平移 k 單位 $\Rightarrow y + k = \log_a x$ 。（口訣：上 - 下 +）

難易度



02 老師講解

對數函數圖形的平移

學生演練

將函數 $y = \log_2 x$ 的圖形向左平移 2 單位、向下平移 3 單位，所得新函數為 $y = \log_2(ax+b)$ ，則 $a+b = ?$

將函數 $y = \log_3 x$ 的圖形向右平移 3 單位、向上平移 2 單位，所得新函數為 $y = \log_3(ax+b)$ ，則 $a+b = ?$



重點

對數方程式和對數不等式

1. **對數方程式**：先將等式兩邊化為同底數，當 $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$ 。（真數相等且真數大於 0）
2. **對數不等式**：先將不等式兩邊化為同底數：
 - (1) 當底數 $a > 1$ 為遞增函數，則 $\log_a f_1(x) > \log_a f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) > f_2(x)$ 且真數大於 0。
 - (2) 當底數 $0 < a < 1$ 為遞減函數，則 $\log_a f_1(x) > \log_a f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) < f_2(x)$ 且真數大於 0。

難易度 🐾🐾

03 老師講解

對數方程式

學生演練



試解方程式 $\log_3(x^2 + 7x + 1) - \log_3(x + 4) = 2$ 。

試解方程式 $\log_{10}(x - 2) + \log_{10}(x + 1) = 1$ 。

難易度 🐾🐾

04 老師講解

對數不等式

學生演練



試解下列不等式：

(1) $\log_2(2x + 3) > \log_2(x - 1)$ 。

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) > \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ 。

試解下列不等式：

(1) $\log_{0.5}(x - 3) > \log_{0.5}(2x - 5)$ 。

(2) $\log_{2.5}(x + 1) > \log_{2.5}(3x - 5)$ 。

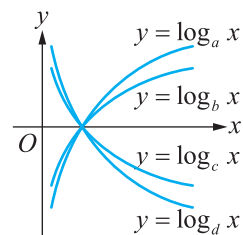


自我挑戰



1. 右圖為四個對數函數的圖形，試比較底數 a 、 b 、 c 、 d 的大小順序：

_____。



2. 已知 A 、 B 兩點在 $y = \log_2 x$ 的圖形上，小紫 不小心將 A 、 B 兩點的坐標弄髒了，只知道 A 點的 x 坐標為 8， B 點的 y 坐標為 -1，試幫小紫 算出直線 AB 的斜率 = _____。

3. 將函數 $y = \log_2 x$ 的圖形向右平移 $\frac{1}{2}$ 單位、向上平移 2 單位，所得新函數為 $y = \log_2(ax+b)$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

4. 試比較下列各數的大小：

(1) $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$ ， $b = \log_4 9$ ， $c = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{7}$ ， $d = \log_2 5$ ：_____。

(2) $a = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$ ， $b = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$ ， $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ ， $d = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$ ：_____。

5. (1) 若方程式 $\log_{12} x + \log_{12}(x-4) = 1$ ，則 $x =$ _____。
- (2) 已知不等式 $\log_{\frac{1}{4}}(x-4) > \log_{\frac{1}{4}}(6-x)$ ，求 x 的範圍：_____。

9-5

常用對數及其應用



重點

常用對數

1. **常用對數**：底數為 10 的對數，其中底數 10 可以省略，如： $\log_{10} x = \log x$ 。
2. **首數與尾數**：任何正實數 x 都可用科學記號表示成 $x = a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 為整數。
可知 $\log x = \log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = n + \log a$ ，其中整數 n 為 $\log x$ 的「首數」，小數 $\log a$ 為 $\log x$ 的「尾數」。
($\because 1 \leq a < 10 \quad \therefore \log 1 \leq \log a < \log 10 \Rightarrow 0 \leq \log a < 1$ ，故 $\log a$ 為 0 或正純小數)
3. **首數的性質**：若 $\log x = n + \log a$ ， n 為首數， $\log a$ 為尾數，則：
 - (1) 首數 $n \geq 0$ 時，真數 x 的整數部分有 $n+1$ 位數字。
 - (2) 首數 $n < 0$ 時，真數 x 自小數點後第 $(-n)$ 個開始出現不為零的數字。

難易度 ●●

01

老師講解

利用已知對數求其它對數值

學生演練

已知 $\log 28.37 = 1.4529$ ，試求：(1) $\log 2837 = ?$ (2) 若 $\log x = -3.5471$ ，試求 $x = ?$ 已知 $\log 2.345 = 0.3701$ ，試求：(1) $\log 2345 = ?$ (2) 若 $\log x = -2.6299$ ，試求 $x = ?$

難易度 🐾🐾



02 老師講解

求常用對數值

學生演練

已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ，試求下列各小數的近似值：

(1) $\log 15$ (2) $\log \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 。

已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ，試求下列各小數的近似值：

(1) $\log 72$ (2) $\log \frac{6}{\sqrt{5}}$ 。

難易度 🐾🐾



03 老師講解

首數性質

學生演練

已知 $\log 2 = 0.3010$ ，則 2^{50} 為幾位數？

已知 $\log 7 = 0.8451$ ，則 7^{20} 為幾位數？

難易度 🐾🐾

04

老師講解

首數性質

學生演練



已知 $\log 3 = 0.4771$ ，則 $(\frac{1}{3})^{30}$ 自小數點後第幾位
開始數字不為零？

已知 $\log 2 = 0.3010$ ，則 $(\frac{1}{2})^{50}$ 自小數點後第幾位
開始數字不為零？

難易度 🐾🐾🐾

05

老師講解

常用對數求範圍

學生演練



已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ，
若 $(\frac{1}{6})^x < 10^{-8}$ ，則最小正整數 x 為何？

已知 $\log 3 = 0.4771$ ，若 $3^x > 10^8$ ，則最小整數 x 為
何？



自我挑戰

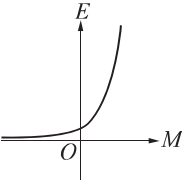
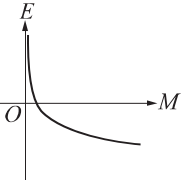
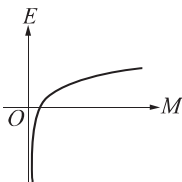
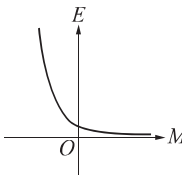


1. 試求下列之值：
 - (1) $\log x = 6.5312$ ，則 $\log x$ 的首數為 _____，尾數為 _____
 - (2) $\log y = -6.5312$ ，則 $\log y$ 的首數為 _____，尾數為 _____。
 - (3) $\log 3.45 = 0.5378$ ，則 $\log 345000 =$ _____， $\log 0.00345 =$ _____。
2. 已知 $\log 2 = 0.3010$ ，則 5^{20} 是 _____ 位數。
3. 已知 $\log 3 = 0.4771$ ，則 $(\frac{1}{3})^{100}$ 自小數點後第 _____ 位開始出現不為 0 的數。
- 素 4. 若銀行的年利率為 3%，且每年複利計息一次。今某人存進 10 萬元，目標為本利和超過 20 萬，則至少要經過 _____ 年。（已知 $\log 1.03 = 0.0128$ ， $\log 2 = 0.3010$ ）
- 素 5. 碳 14 定年法是用來測量動植物生存年代的方法。動植物體內自然存在的碳 14 同位素，在死亡後會衰變，其半衰期為 5730 年。今一化石組織內的碳 14 含量僅為正常的十分之一，則此化石生存年代距今約 _____ 年。（已知 $\log 2 = 0.3010$ ，四捨五入取到整數位）



歷屆試題



- () 1. 小倩在一家營運穩定的公司上班。若小倩的起薪為每個月 4 萬元，且每年會調薪 2%，即一年後為 40000×1.02 元，兩年後為 $40000 \times (1.02)^2$ 元，以此類推。試問幾年後小倩的月薪最接近 8 萬元？（已知 $\log 1.02 \approx 0.0086$ ）
(A) 29 (B) 31 (C) 33 (D) 35。 【113(B)，答對率 24%】
- () 2. 某次考試，老師出了一張滿分為 100 分的試卷，但因考後成績不理想，因此進行全班成績調整，若原始成績為 x 分，則調整後成績為 $50 \times \log_{10} x$ 的整數部分。已知這次考試沒有人缺考且最低分數為 2 分，則下列敘述何者錯誤？
(A) 考 100 分的同學調整前後的分數不變
(B) 考 10 分的同學調整後的分數不到 60 分
(C) 調整後全班的最低分是 16 分
(D) 若某同學的原始成績是 16 分，則其調整後的成績為 60 分。
【113(B)，答對率 47%】
- () 3. 若 $\log x = -2.24$ ， $\log y = 9.28$ ，則 $x^2 y$ 落在下列哪個區間？
(A) $(10^3, 10^4)$ (B) $(10^4, 10^5)$ (C) $(10^5, 10^6)$ (D) $(10^6, 10^7)$ 。 【113(C)，答對率 40%】
- () 4. 根據建築物之耐震規範，某類鋼構造建築物之基本振動週期 T （單位為秒）之經驗公式為 $T = 0.085 h^{\frac{3}{4}}$ ，其中 h 為地面到屋頂之高度（單位為公尺）。若 A 、 B 為兩棟屬於這類的鋼構造建築物，已知 A 的基本振動週期為 B 的 2 倍，且 B 的高度為 100 公尺，則 A 的高度約多少公尺？（已知 $\sqrt[3]{2} \approx 1.260$ ）
(A) 159 (B) 168 (C) 252 (D) 283。 【113(C)，答對率 35%】
- () 5. 小明與小亮大學畢業後隨即找到工作，第一年兩人的起薪都是月薪三萬元，之後每年年初時調薪，月薪的上限皆為八萬元。小明的公司調薪方式是月薪比前一年月薪多 3000 元，小亮的公司調薪方式是月薪比前一年月薪多 3%。若小明和小亮的月薪到達八萬元的時間分別為 x 與 y 年，則 $x - y = ?$
（已知 $\log 1.03 \approx 0.0128$ 、 $\log 2 \approx 0.301$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ ）
(A) 17 (B) 13 (C) -13 (D) -17。 【112(C)，答對率 32%】
- () 6. 目前國際上使用芮氏規模來表示地震的強度，設 E （單位：爾格）為地震芮氏規模 M 時所釋放出來的能量，其中 M 與 E 的關係如下： $\log E = 11.8 + 1.5M$ ，則芮氏規模 M 與所釋放出來的能量 E 的關係圖為何？
(A)  (B)  (C)  (D) 。 【112(C)，答對率 45%】

- () 7. 若 $x = \log_3 7$ ，則下列何者正確？

(A) $7^x = 3$ (B) $3^x = 7$ (C) $x^7 = 3$ (D) $x^3 = 7$ 。

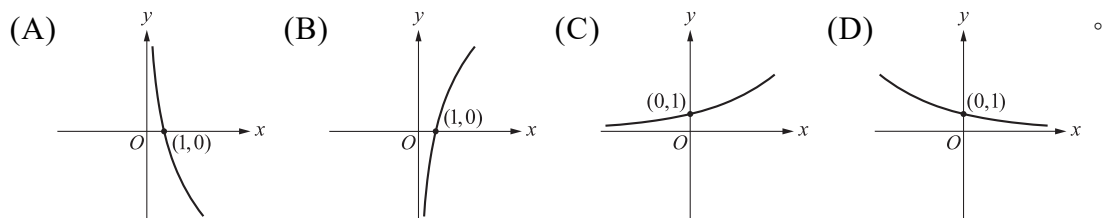
【111(C)，答對率 57%】

- () 8. 為了響應節能減碳政策，某公司基於成本考量決定在六年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的 50%。公司希望每年依固定的比率 r （當年和前一年排放量的比）逐年降低二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則下列敘述何者正確？（已知 $\log 8.91 \approx 0.950$ ）

(A) $0.91 < r < 0.93$ (B) $0.88 < r < 0.91$ (C) $0.85 < r < 0.88$ (D) $0.82 < r < 0.85$ 。

【111(C)，答對率 33%】

- () 9. 若 $f(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ ，則下列何者為 $f(x)$ 之圖形？



【110(B)，答對率 24%】

- () 10. 若 $a = \log 2$ ， $b = \log 3$ ，則 $10^{2a+b} = ?$

(A) 2 (B) 3 (C) 12 (D) 24。

【110(B)，答對率 52%】

- () 11. 設 $I(t)$ 為 A 城市某種傳染病在時間 t 的感染率，且 $I(t) = \frac{1}{1 + 49(7^{-\frac{t}{3}})}$ ， $t \geq 0$ 。若 a 、

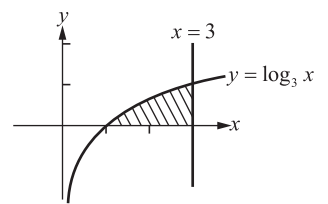
b 、 c 分別表示 $t=0$ 、 $t=3$ 、 $t=6$ 時的感染率，則下列何者正確？

(A) $b = 6a$ (B) $c = 20a$ (C) $c = 4b$ (D) $b = 7a$ 。

【110(C)，答對率 57%】

- () 12. 假設 A 表函數 $y = \log_3 x$ 圖形與直線 $y=0$ 、 $x=3$ 所圍區域面積，如圖。若以幾何圖形的觀念來判斷 A 的大小範圍，則下列何者正確？

(A) $0 \leq A < \frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2} \leq A < 1$ (C) $1 \leq A < 2$ (D) $A \geq 2$ 。



【110(C)，答對率 47%】

- () 13. 2^{1000} 大約等於下列何者？

(A) 10^{100} (B) 10^{200} (C) 10^{300} (D) 10^{400} 。

【109(B)，答對率 33%】

- () 14. 若 $a + a^{-1} = 2$ ，則 $a^3 + a^{-3} = ?$

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。

【109(B)，答對率 32%】

() 15. 滿足 $\log_{10-x^2}(x^2+3x+2)$ 有意義的整數 x 共有多少個？

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7。

【109(C)，答對率 28%】

() 16. 設 $(3^m)^3 = 729$ 且 $4^{n-m} = \frac{1}{256}$ ，則 $m+n = ?$

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。

【108(B)，答對率 53%】

() 17. 下列何值與 $\log_2 5$ 相等？

(A) $\log 5 - \log 2$ (B) $\log(\frac{5}{2})$ (C) $\frac{\log 50}{\log 20}$ (D) $\frac{\log 25}{\log 4}$ 。

【108(B)，答對率 38%】

() 18. 若 $3 < \log_{0.5}(2x+1) < 4$ ，則 x 的範圍為何？

(A) $-\frac{3}{8} < x < -\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{7}{16} < x < -\frac{3}{8}$ (C) $-\frac{15}{32} < x < -\frac{7}{16}$ (D) $-\frac{31}{64} < x < -\frac{15}{32}$ 。

【108(C)，答對率 47%】

() 19. 已知 $\log_4(4^x - 2^x + 52) = x+1$ ，試問 $\log(x^2 \times 5^x) = ?$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。

【108(C)，答對率 29%】

() 20. 若 $x = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 9}$ ，則 $81^x = ?$

(A) 3 (B) 7 (C) 25 (D) 49。

【107(C)，答對率 40%】

() 21. 設 $a = \log_{0.3} 0.5$ ， $b = \log_3 5$ ， $c = \log_{30} 50$ ，則 a 、 b 、 c 大小順序為何？

(A) $c > b > a$ (B) $b > a > c$ (C) $b > c > a$ (D) $a > b > c$ 。【107(C)，答對率 32%】

() 22. 求 $(0.027)^{\frac{2}{3}} + (\frac{243}{32})^{\frac{1}{5}}$ 的值。

(A) $\frac{2}{32}$ (B) $\frac{159}{100}$ (C) $\frac{12}{5}$ (D) $\frac{81}{32}$ 。

【106(B)，答對率 48%】

() 23. 設 $a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ ， $b = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ ， $c = (\frac{1}{6})^{\frac{1}{6}}$ ，則 a 、 b 、 c 大小順序為何？

(A) $a > c > b$ (B) $a > b > c$ (C) $c > a > b$ (D) $b > c > a$ 。【106(C)，答對率 28%】

() 24. 已知 $\log_{10} 3 = 0.4771$ 且 $x = (\frac{1}{3})^{20}$ ，其中 $\log_{10} x$ 的首數為 m ，而尾數的小數點後第一位數字 n ，則 $m+n = ?$

(A) -9 (B) -7 (C) -6 (D) -5。

【106(C)，答對率 40%】