



三角函數的應用



8-1

和差角公式



重點 和角及差角公式

1. 正餘弦函數的和、差角公式：

$$(1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta。$$

$$(2) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta。$$

2. 正切函數的和、差角公式：

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}。$$

NOTE 只需熟記 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 三組和差角公式，其餘 $\cot$ 、 $\sec$ 、 $\csc$ 的和差角，可由倒數關係求得。

難易度

01 老師講解

和差角公式

學生演練



試求 $\sin(\theta + 60^\circ)\cos(\theta + 90^\circ)$
 $-\cos(\theta + 60^\circ)\sin(\theta + 90^\circ)$ 之值。

試求 $\frac{\tan 22^\circ + \tan 113^\circ}{1 - \tan 22^\circ \tan 113^\circ}$ 之值。

難易度 🐾🐾



02 老師講解

和差角公式

學生演練

已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$,
 $\tan \beta = \frac{-5}{12}$, 試求 $\sin(\alpha + \beta)$ 之值。

已知 $\sin \alpha = \frac{-3}{5}$ 且 $\tan \alpha > 0$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$
 且 $\sin \beta < 0$, 試求 $\cos(\alpha - \beta)$ 之值。

難易度 🐾🐾🐾

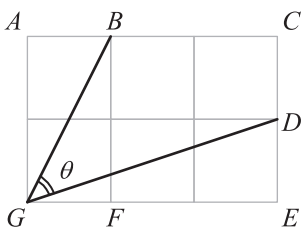


03 老師講解

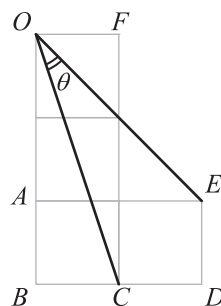
和差角公式應用

學生演練

右圖中六個小方格均為正方形，試求 $\tan \theta$ 之值。



右圖中四個小方格均為正方形，試求 $\tan \theta$ 之值。



難易度 🐾🐾🐾

04

老師講解

和差角公式的應用

學生演練



若 $\tan \alpha$ 、 $\tan \beta$ 為方程式 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 之二根，試求：(1) $\tan(\alpha + \beta)$ (2) $\sec^2(\alpha + \beta)$ 。

若 $\tan \alpha$ 、 $\tan \beta$ 為方程式 $x^2 - x - 4 = 0$ 之二根，試求：(1) $\tan(\alpha + \beta)$ (2) $\cot(\alpha + \beta)$ 。



重點

二倍角公式

1. $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 。
2. $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ 。
3. $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ 。



NOTE

① 以上公式可由和角公式中，令 $\alpha = \beta = \theta$ 代入求得。

② $\cos 2\theta$ 公式可由平方關係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 代換 $\cos^2 \theta$ 及 $\sin^2 \theta$ 求得另二組公式。

難易度 🐾🐾

05

老師講解

二倍角公式

學生演練



若 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ， $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，試求：

(1) $\sin 2\theta + \cos 2\theta$ (2) $\tan 2\theta$ 。

若 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$ ， $\pi < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{2}$ ，試求：

(1) $\sin \theta$ (2) $\cos \theta$ 。



06 老師講解

二倍角公式

學生演練

若 $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ ， $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ，試求：

(1) $\sin \theta$ (2) $\cos \theta$ 。

若 $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$ ， $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ，試求：

(1) $\sin \theta$ (2) $\cos \theta$ 。



重點 兩直線的夾角

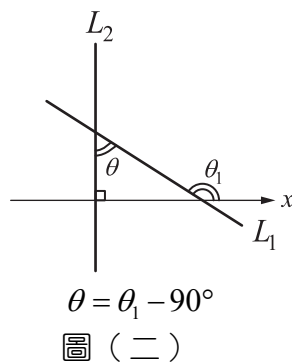
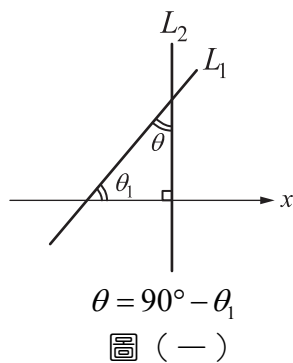
1. 兩直線 L_1 、 L_2 之斜角分別為 θ_1 、 θ_2 ，且均不垂直 x 軸（ θ_1 、 θ_2 均不等於 90° ），斜率分別為 m_1 、 m_2 （ $m_1 = \tan \theta_1$ ， $m_2 = \tan \theta_2$ ），若兩直線夾角 θ （ θ 為銳角），則 $\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \times m_2} \right|$ ，

且另一個夾角為 $180^\circ - \theta$ 。

NOTE 兩直線夾角有兩組且互補， $\tan \theta$ 取絕對值意在先求出銳角夾角 θ ，再由 $180^\circ - \theta$ 求出另一鈍角夾角。

2. 兩直線 L_1 、 L_2 之斜角分別為 θ_1 、 θ_2 ，其中 L_2 垂直 x 軸（ $\theta_2 = 90^\circ$ ），若兩直線夾角 θ （ θ 為銳角），則 $\theta = |90^\circ - \theta_1|$ ，且另一個夾角為 $180^\circ - \theta$ 。

NOTE $\theta_2 = 90^\circ \Rightarrow m_2 = \tan 90^\circ$ 不存在，所以可由圖（一）、圖（二）找出夾角 θ 和 L_1 斜角 θ_1 之關係：



難易度

07 老師講解

二直線夾角公式

學生演練



試求兩直線 $L_1: \sqrt{3}x + y - 1 = 0$ 和 $L_2: \sqrt{3}x - y - 2 = 0$ 之夾角。

試求兩直線 $L_1: x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ 和 $L_2: x - 2 = 0$ 之夾角。



重點 正餘弦函數的疊合

正餘弦函數的疊合與極值：

$a \sin \theta \pm b \cos \theta$ 可化成 $\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \right)$ (其中 a 、 b 不全為 0) ,

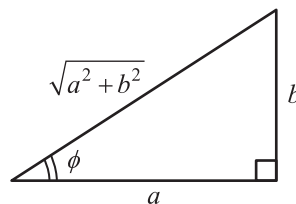
$$\text{令 } \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow a \sin \theta \pm b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \theta \cos \phi \pm \cos \theta \sin \phi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta \pm \phi)$$

$$\therefore -1 \leq \sin(\theta \pm \phi) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin \theta \pm b \cos \theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

NOTE 以上亦可令 $\sin \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$$\cos \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow a \sin \theta \pm b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta \mp \phi) .$$



難易度 🐾🐾

08 老師講解

疊合求極值

學生演練



已知 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$, $0 \leq x < 2\pi$, 當 $x = a$ 時, $f(x)$ 有最大值 b , 試求 a 、 b 。

試求 $f(x) = 2 \sin x + \sqrt{5} \cos x + 3$, $0 \leq x < 2\pi$ 之最大、最小值。



自我挑戰



1. 試求下列各值：

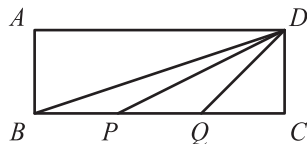
(1) $\sin 15^\circ =$ _____。

(2) $\cos(30^\circ + \theta) \cos(90^\circ - \theta) - \sin(30^\circ + \theta) \sin(90^\circ - \theta) =$ _____。

(3) $\cot 15^\circ =$ _____。

2. 設 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, 且 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$, 則 $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) =$ _____。

3. 設 $ABCD$ 為一矩形, 且 $\overline{BC} = 3\overline{AB}$ 。令 P 點與 Q 點為 $\overline{BC}$ 上的點, 且 $\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$, 如右圖。若 $\angle DBC = \alpha$, 且 $\angle DPC = \beta$, 則 $\tan(\alpha + \beta)$ 之值為 _____。



4. $\tan \alpha$ 、 $\tan \beta$ 為方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 之兩根, 則 $\tan(\alpha + \beta) =$ _____。

5. 已知 $\tan \theta = -2$ 且 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, 則 $\sin 2\theta + \cos 2\theta =$ _____。

6. 已知 $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$, 則 $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta =$ _____。

7. 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5}$, 則 $\sin 2\theta =$ _____。

8. 試求兩直線 $L_1: x - 3y - 2 = 0$ 和 $L_2: x + 2y + 3 = 0$ 之夾角為 _____。

8-2

三角測量

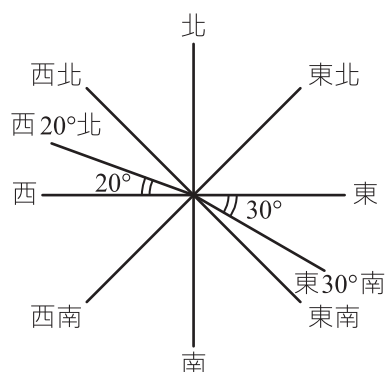
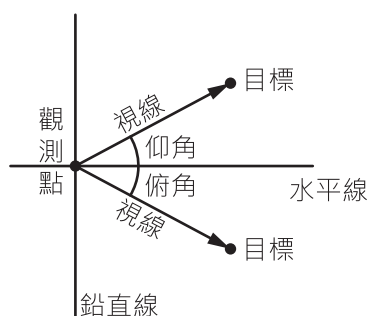


重點

平面三角測量

1. 測量用詞解釋：

- (1) 鉛直線：與地平線垂直的直線。
- (2) 水平線：與地平線平行的直線。
- (3) 視線：觀測者眼睛與目標物之連線。
- (4) 仰角：仰視目標時，視線與水平線之夾角。
- (5) 俯角：俯視目標時，視線與水平線之夾角。
- (6) 方位：目標物所在的方向，除常用方位東、西、南、北、東北、東南、西北、西南之外，也可以角度輔助描述，如東 30° 南表示東偏南 30° ，西 20° 北表示西偏北 20° 。



2. 解題方法：

- (1) 依題意畫出示意圖。
- (2) 由圖形中各三角形之邊角關係列出關係式。
- (3) 常利用特別角（ 30° 、 45° 、 60° ）直角三角形邊長比例求長度，或用正餘弦定理及畢氏定理列出等式。

難易度 🐾🐾

01 老師講解

三角測量

學生演練



小王在路邊測得一大樓仰角為 30° ，向大樓前進 20 公尺再測仰角為 45° ，試求大樓高度。

小明在樓頂觀測 A 、 B 兩輛車之俯角分別為 30° 和 45° ，已知樓高 30 公尺，試求 A 、 B 兩車之距離。

難易度 🐾🐾

02 老師講解

三角測量（正餘弦定理）

學生演練



由 A 、 B 兩觀測臺觀察一目標 C ，已知 $\overline{AB} = 50$ 公尺， $\angle CAB = 75^\circ$ ， $\angle CBA = 60^\circ$ ，試求 $\overline{AC}$ 距離。

欲測量一湖泊寬度，在岸上設一觀測點 A ，量測 A 與湖泊兩端點 B 、 C 之距離分別為 3 公里及 2 公里，且 $\angle BAC = 60^\circ$ ，試求湖泊寬。

難易度 🐾🐾🐾

03 老師講解

三角測量 (立體)

學生演練



小玲在大樓正東方測得樓頂之仰角為 45° ，向南行走 20 公尺後，再測仰角為 30° ，試求大樓之高度。

老王在一高塔正西方測得塔頂仰角為 60° ，向南行走 10 公尺後，再測仰角為 45° ，試求塔高。



自我挑戰



- 地面上二點 B 、 C 被一池塘隔開，在地面上找一點 A ，量得 $\overline{AB} = 80$ 公尺， $\overline{AC} = 50$ 公尺，並測得 $\angle CAB = 60^\circ$ ，則 $\overline{BC}$ 長為 _____ 公尺。
- 素 某人在地面 A 處測得路思義教堂的仰角為 30° ，再往教堂方向前進 100 公尺的 B 處，測得教堂的仰角為 60° ，則此教堂的高度為 _____ 公尺。
- 素 某船在 A 點測得三貂角燈塔在其北 30° 西，此船向東 30° 北航行 10 浬後，發現此時燈塔在其正西方，此時船與三貂角燈塔的距離為 _____ 浬。
- 素 有一測量員發現：當他從 A 點測量時，八仙山是在他的東邊偏北 60° 且山的仰角為 45° ；若由 A 點向東直行 200 公尺到 B 點測量時，八仙山在他的西邊偏北 60° ，求山高是 _____ 公尺。
- 素 小敏於山腳下測得墾丁大尖山山頂的仰角為 45° ，由山腳循 30° 斜坡上行 200 公尺，再測得山頂的仰角為 60° ，求山高是 _____ 公尺。

8-3

複數平面



重點

複數平面與複數絕對值

1. **複數平面**：將橫軸定義為實軸，縱軸定義為虛軸。任一複數 $z = a + bi$ (a 、 b 均為實數) 的實部 a ，虛部 b 組成的數對 (a, b) 可對應至複數平面上的點 (a, b) 。
2. **複數絕對值**： $|z|$ 表示複數 $z = a + bi$ (a 、 b 均為實數) 在複數平面上所對應的點 (a, b) 與原點 $(0, 0)$ 的距離 $\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。
3. **複數絕對值的運算性質**：

設複數 z_1 、 z_2 為複數，則：

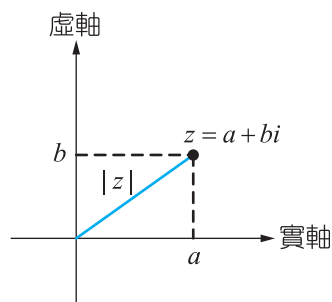
$$(1) |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

$$(2) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

$$(3) |z_1^n| = |z_1|^n$$

$$(4) |\overline{z_1}| = |z_1|$$

$$(5) z_1 \times \overline{z_1} = |z_1|^2。$$



難易度 🐾🐾

01

老師講解

複數絕對值

學生演練



已知 $z = \frac{(1+3i)^3(4-3i)^2}{(3+4i)^3(3-i)}$ ，試求 $|z|$ 。

已知 $z = \frac{(\sqrt{3}-i)(1-2i)^3}{(2+i)^2(3-4i)}$ ，試求 $|z|$ 。



重點

極坐標與坐標轉換

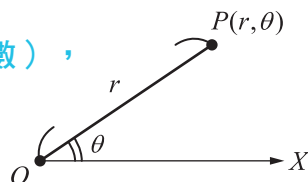
1. **極坐標**：平面上以始點 O 向右作一水平射線 $\overrightarrow{OX}$ ， P 為平面上任一點，且 $\overline{OP} = r > 0$ ， $\angle POX = \theta$ ，則 P 點位置可用數對 (r, θ) 描述， (r, θ) 稱為點 P 的極坐標。其中 O 稱為極點， $\overrightarrow{OX}$ 稱為極軸， r 稱為向徑， θ 稱為幅角。



NOTE 極坐標表示法並不唯一， $P(r, \theta) = P(r, \theta \pm 2n\pi)$ (n 為整數)，

例 $P(2, 30^\circ) = P(2, 390^\circ) = P(2, 750^\circ) = \dots$ ，

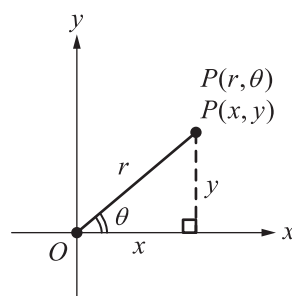
取 θ 之最小正同界角 ($0 \leq \theta < 2\pi$) 稱為主幅角。



2. **極坐標與直角坐標的轉換**：

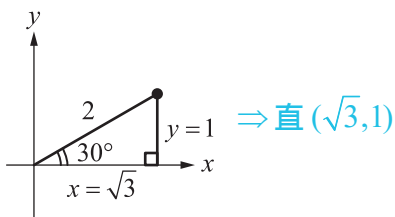
平面上 P 點的直角坐標為 (x, y) ，極坐標為 (r, θ) ，則 (r, θ) 與 (x, y) 的關係如下：

$$\begin{aligned} (1) \text{ 極坐標 } (r, \theta) \text{ 化成直角坐標 } (x, y) : & \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \\ (2) \text{ 直角坐標 } (x, y) \text{ 化成極坐標 } (r, \theta) : & \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \end{aligned}$$



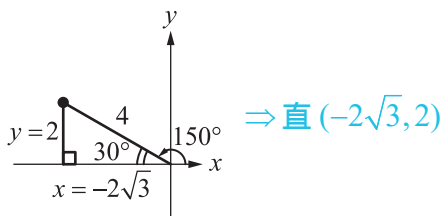
NOTE 一般坐標轉換在解題時，仍以圖解較為方便，例：

① 極 $(2, 30^\circ) \Rightarrow$



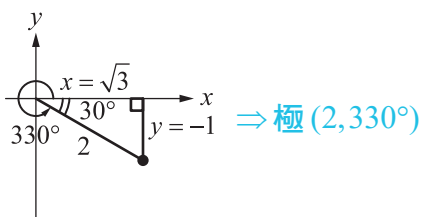
$\Rightarrow$ 直 $(\sqrt{3}, 1)$

② 極 $(4, 150^\circ) \Rightarrow$



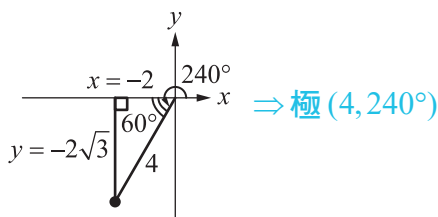
$\Rightarrow$ 直 $(-2\sqrt{3}, 2)$

③ 直 $(\sqrt{3}, -1) \Rightarrow$



$\Rightarrow$ 極 $(2, 330^\circ)$

④ 直 $(-2, -2\sqrt{3}) \Rightarrow$



$\Rightarrow$ 極 $(4, 240^\circ)$



- (1) 將直角坐標 $(-1, \sqrt{3})$ 轉換為極坐標。
 (2) 將極坐標 $(4, 315^\circ)$ 轉換為直角坐標。

- (1) 將直角坐標 $(2, -2\sqrt{3})$ 轉換為極坐標。
 (2) 將極坐標 $(2, 135^\circ)$ 轉換為直角坐標。



重點

複數的極式

1. 複數的標準式和極式：複數 $z = a + bi$ (a, b 為實數) 稱為標準式。可在直角坐標平面上找到相對應點 (a, b) ，而同一位置直角坐標 (a, b) 亦可用極坐標 (r, θ) 表示。所以複數亦有另一表示法 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，其中 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ， $\cos \theta = \frac{a}{r}$ 、 $\sin \theta = \frac{b}{r}$ ，此即為複數的極式表示法記為：

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ， $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 稱為向徑， θ 為輻角
 (當 $0 \leq \theta < 2\pi$ 時， θ 稱為主輻角，以 $\text{Arg}(z)$ 表示)。



NOTE 標準式： $z = a + bi \longleftrightarrow$ 直角坐標 (a, b)



極式： $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \longleftrightarrow$ 極坐標 (r, θ)

2. 非極式轉化為極式：

$$\begin{cases} (1) \sin \theta + i \cos \theta = \cos(90^\circ - \theta) + i \sin(90^\circ - \theta) \text{ (餘角)} \\ (2) \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \text{ (負角)} \\ (3) -\cos \theta + i \sin \theta = \cos(180^\circ - \theta) + i \sin(180^\circ - \theta) \text{ (補角)} \\ (4) -\cos \theta - i \sin \theta = \cos(180^\circ + \theta) + i \sin(180^\circ + \theta) \text{ (對角)} \end{cases}$$

難易度 🐾🐾

03 老師講解

求主幅角

學生演練



試求下列複數之主幅角：

(1) $z = 2\sqrt{3} - 2i$

(2) $z_2 = \cos 20^\circ - i \sin 20^\circ$

(3) $z = \sin 73^\circ + i \cos 253^\circ$ 。

試求下列複數之主幅角：

(1) $z = -1 + \sqrt{3}i$

(2) $z = \sin 42^\circ + i \cos 42^\circ$

(3) $z = -\cos 50^\circ - i \sin 50^\circ$ 。



自我挑戰



1. $z_1 = \frac{(3-2i)^6(-1+i)^8}{(12+5i)^2(-\sqrt{3}-i)^3}$ ，則 $|z_1| =$ _____。

2. 試轉化下列極坐標及直角坐標：

(1) $(4, 330^\circ) =$ _____。 (2) $(-3, -3) =$ _____。

3. 試求下列各複數的主幅角：

(1) $z = \cos 15^\circ - i \sin 15^\circ$ ， $\theta =$ _____。

(2) $z = \sin 40^\circ + i \cos 40^\circ$ ， $\theta =$ _____。

(3) $z = -\cos 70^\circ - i \sin 70^\circ$ ， $\theta =$ _____。

8-4

極式的應用



重點 極式的乘除及其應用

1. 極式的乘除運算：

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ， $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ，則：

$$(1) z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]。$$

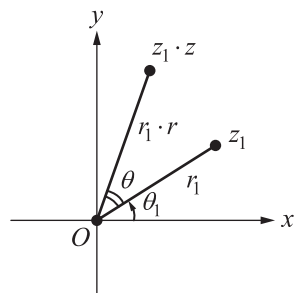
$$(2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (z_2 \neq 0)。$$

NOTE 由(1)可得 $z_1^n = r_1^n (\cos n\theta_1 + i \sin n\theta_1)$

2. 複數的幾何意義（旋轉）：

設 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ， $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ，

則 $z_1 \times z = r_1 \times r [\cos(\theta_1 + \theta) + i \sin(\theta_1 + \theta)]$ ，即 z_1 乘 z 之後向徑變成 r 倍，幅角增加 θ 。可視為由 z_1 之終邊旋轉 θ 角，且長度變成 r 倍。
（如圖（一））



圖（一）

3. 極式乘除運算的應用（電機電子群選讀）：

(1) 基本電學中為了與電流 I 做區別，將虛數單位 $\sqrt{-1}$ 以 j 表示，而極式 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 在基本電學中也簡化以 $r \angle \theta$ 表示。

以下舉例數學與基本電學表示法做對照。

	數 學	基本電學
複數坐標	$z = 1 + i \Rightarrow (1, 1)$	$\bar{A} = 1 + j$
極坐標	$z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \Rightarrow (\sqrt{2}, 45^\circ)$	$\bar{A} = \sqrt{2} \angle 45^\circ$
極式相乘	$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$	$\bar{A} \times \bar{B} = A \angle \theta_1 \times B \angle \theta_2$ $= A \times B \angle (\theta_1 + \theta_2)$
極式相除	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$	$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{A \angle \theta_1}{B \angle \theta_2} = \frac{A}{B} \angle (\theta_1 - \theta_2)$

(2) 正弦波交流電：基本電學中正弦的交流電有二種表示法

① 正弦式： $V(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_i) = V \times \sqrt{2} \sin(\omega t + \theta_i)$

其中 V_m 為峰值， V 表示有效值 V_{rms} 。

② 相量式： $\bar{V} = V \angle \theta_i$ 。

NOTE 將正弦式轉化為相量式可利用極式乘除性質方便運算。

難易度



01 老師講解

極式的乘除

學生演練

試將 $\frac{4(\cos 53^\circ + i \sin 53^\circ) \times 3(\sin 14^\circ + i \cos 14^\circ)}{6(\cos 261^\circ - i \sin 261^\circ)}$ 化為標準式。

試將 $\frac{(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ) \times (\sin 70^\circ + i \cos 70^\circ)}{\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ}$ 化為標準式。

難易度

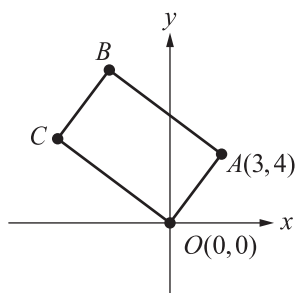


02 老師講解

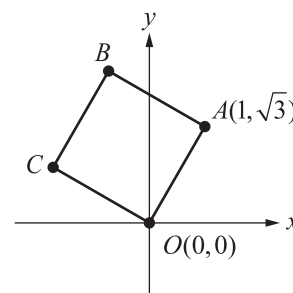
極式的應用

學生演練

如圖，矩形 $OABC$ 中，
 $O(0,0)$ 、 $A(3,4)$ ，且
 $\overline{OA}:\overline{OC}=1:2$ ，試求
 B 、 C 坐標。



如圖，正方形 $OABC$ 中，
 $O(0,0)$ 、 $A(1,\sqrt{3})$ ，
試求 B 、 C 坐標。



03 老師講解

極式的應用

學生演練



已知 $\left|\frac{z-1}{z}\right| = \sqrt{2}$ ， $\text{Arg}\left(\frac{z-1}{z}\right) = 45^\circ$ ，若
 $z = a + bi$ （ a 、 b 均為實數），試求 a 、 b 。

已知 $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 2$ ， $\text{Arg}\left(\frac{z}{z+1}\right) = 90^\circ$ ，若
 $z = a + bi$ （ a 、 b 均為實數），試求 a 、 b 。

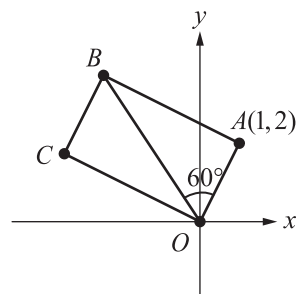


自我挑戰



1. 將 $\frac{3\sqrt{3}[\cos(-21^\circ) + i\sin(-21^\circ)] \times \sqrt{2}(\cos 222^\circ + i\sin 222^\circ)}{\sqrt{3}(\cos 66^\circ + i\sin 66^\circ)}$ 化簡為複數的標準式 _____。

2. 如右圖，已知 O 為原點， $A(1,2)$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ， $\overline{OB} = 2\overline{OA}$ ，
 且 $OABC$ 為四邊形，則 B 點坐標為 _____。



3. 設 $\left|\frac{z-1}{z}\right| = 2$ ，且 $\text{Arg}\left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{5\pi}{3}$ ，則 $|z| =$ _____。

4. $x = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$ 、 $y = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ 、 $z = 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ ，
 求 $\frac{x^4 y^5}{z^2} =$ _____。



歷屆試題



- () 1. 若 θ 為一標準位置角， $i = \sqrt{-1}$ 。已知 $\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 與 $\frac{-1}{2} + (\sin \theta)i$ 為共軛複數，則

$\sin 2\theta = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。

【113(C)，答對率 39%】

- () 2. 已知 $x = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ 、 $y = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ 、 $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ ，其中

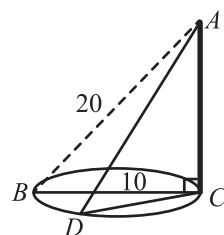
$i = \sqrt{-1}$ ，試求 $\frac{x^2 y^4}{z^3} = ?$

- (A) $2^2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ (B) $2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$
(C) $2^2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ (D) $2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$ 。

【112(C)，答對率 34%】

- () 3. 有一露營活動，大家想要在地面上立一垂直桿子，並以繩索固定，如圖所示，其中 $\overline{AC}$ 為垂直於地面的桿子、 $\overline{AD}$ 為繩索。已知 B 、 C 兩點相距 10 公尺，而 D 點是位於以 $\overline{BC}$ 為直徑的圓上，且 $\angle BCD = 30^\circ$ 。若從桿頂 A 到 B 點的距離為 20 公尺，則 $\overline{AD} = ?$

- (A) $14\sqrt{2}$ 公尺 (B) $8\sqrt{6}$ 公尺 (C) $5\sqrt{15}$ 公尺 (D) $11\sqrt{3}$ 公尺。

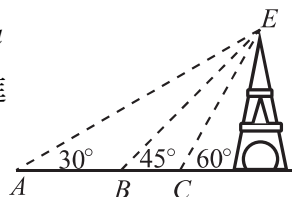


【112(C)，答對率 41%】

- () 4. 某人由 A 處測量高塔塔頂 E 的仰角為 30° ，朝高塔方向前進 a 公尺至 B 處時測量塔頂 E 的仰角為 45° ，繼續朝高塔方向前進 b 公尺至 C 處時測量塔頂 E 的仰角為 60° ，如圖所示，則 $\frac{a}{b} = ?$

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 。

【111(C)，答對率 33%】



- () 5. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 。若 $\sin 4\theta = a$ ，則下列何者正確？

- (A) $0 < a < \frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{4} < a < 1$ 。【110(B)，答對率 30%】

- () 6. 孫悟空師徒四人取經途中經過一廣闊平原，看到前方有一尊高大佛像，其頂部仰角為 37° ，四人往佛像前行 31 公尺後，佛像頂部仰角變為 53° 。求佛像高度約為多少公尺？

- (A) 57 (B) 53 (C) 37 (D) 31。

【110(B)，答對率 31%】

- () 7. $\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 50^\circ - \sin 25^\circ \cos 25^\circ \cos 20^\circ = ?$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{2}$ 。

【110(C)，答對率 38%】

- () 8. $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對邊長。若 $ab : bc : ca = 3 : 4 : 6$ ，則 $\sin A : \sin B : \sin C = ?$
(A) 4:3:2 (B) 4:2:3 (C) 2:3:4 (D) 3:2:4。 【110(C)，答對率 37%】
- () 9. 若 $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ ，則 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = ?$
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$ 。 【109(B)，答對率 40%】
- () 10. 某甲沿著馬路向正前方一棟大樓直線前進，抬頭看大樓頂端的仰角為 30 度，走了 100 公尺後，第二次抬頭看大樓頂端，此時的仰角為 45 度，則第二次抬頭看大樓時距離大樓還有多遠？
(A) $25(\sqrt{3}-1)$ (B) $50(\sqrt{3}+1)$ (C) $100(\sqrt{3}-1)$ (D) $100(\sqrt{3}+1)$ 。
【109(B)，答對率 35%】
- () 11. 若 $\sin 80^\circ = a$ ， $\cos 59^\circ = b$ ，則 $\cos 21^\circ = ?$
(A) $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$ (B) $a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}$
(C) $ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ (D) $ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ 。 【109(C)，答對率 35%】
- () 12. 設 $(\sqrt{3}+i)z = -2\sqrt{3}+2i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 z 之主幅角為何？
(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{7\pi}{6}$ 。 【109(C)，答對率 42%】
- () 13. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\frac{\cos B + i \sin B}{(\cos A + i \sin A)(\cos C + i \sin C)}$ 為實數其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $\triangle ABC$ 必為何種三角形？
(A) 等腰三角形 (B) 銳角三角形 (C) 直角三角形 (D) 鈍角三角形。
【108(C)，答對率 37%】
- () 14. 一輛遙控小車在平坦無坡度的操場行駛，正前方遠處有一座直立水塔，測得塔頂的仰角 30° 。若小車往水塔方向移動 10 公尺後，測得塔頂的仰角 45° ，則水塔的高度為多少公尺？
(A) $5\sqrt{3}$ (B) $5(\sqrt{2}+1)$ (C) $4(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (D) $5(\sqrt{3}+1)$ 。 【107(B)，答對率 44%】
- () 15. 若 $\tan 19^\circ = a$ ，則 $\sin 2018^\circ = ?$
(A) $-\frac{2}{1+a^2}$ (B) $-\frac{2a}{1+a^2}$ (C) $\frac{a}{1+a^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ 。 【107(C)，答對率 44%】
- () 16. 設 $f(x) = 4\sin x + \cos(2x) + 7$ 的最小值為 m ，最大值為 M ，則 $m+M = ?$
(A) -7 (B) 1 (C) 12 (D) 21。 【107(C)，答對率 44%】
- () 17. 已知 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = a \cdot \sin(\theta+b)$ ， $a > 0$ ， $0 \leq b \leq 2\pi$ ，則下列何者正確？
(A) $a = 4$ ， $b = \frac{\pi}{6}$ (B) $a = 2$ ， $b = \frac{\pi}{3}$ (C) $a = 2$ ， $b = \frac{4\pi}{3}$ (D) $a = 4$ ， $b = \frac{\pi}{3}$ 。
【106(B)，答對率 36%】