

數列與級數



等差數列與級數





數列與級數 重點

- 1. **數列:**將一組數字依序排成一列,稱為「數列」,例如 a_1, a_2, a_3, \cdots ,記作 $\langle a_k \rangle$ 。 當k=1時, a_1 稱為第一項(或首項),當k=n時, a_n 稱為第n項,若為最後一項,又 稱為「末項」。一個數列項數有限,此數列稱為有限數列。而一個數列有無限多項, 此數列稱為無窮數列。
- 2. **級數:**若將數列 $\langle a_k \rangle$ 各項依次用「+」連接起來,所成的式子 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$,稱為「級 數」。
 - (1)若 $\langle a_k \rangle$ 是一個有限數列,則 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 稱為有限級數,可記為

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k} = a_{1} + a_{2} + a_{3} + \dots + a_{n} \circ$$

(2)若 $\langle a_{\scriptscriptstyle k} \rangle$ 是一個無窮數列,則 $a_{\scriptscriptstyle 1}$ + $a_{\scriptscriptstyle 2}$ + $a_{\scriptscriptstyle 3}$ +…+ $a_{\scriptscriptstyle n}$ +…稱為無窮級數,可記為

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \circ$$

難易度 😮

老師講解

數列的一般項





設數列 $\langle a_n \rangle$ 的第n項 $a_n = n^2 + 1$,試求 $a_1 + a_3 + a_5 = ?$

設數列 $\langle a_n \rangle$ 的第n項 $a_n = 2^n + 2n$,試求 $a_1 + a_3 + a_5 = ?$

難易度 🎳

02 老師講解

級數的展開





試求級數 $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k(k+1)}$ 的和。

試求級數 $\sum_{k=1}^{4} (2^k - 1)$ 的和。

動 重點 數列的前 n 項和

若數列 $\langle a_n \rangle$ 的前n項和記作 S_n ,則

- (1)第一項 $a_1 = S_1$ 。
- (2) 第 n 項 $a_n = S_n S_{n-1}$ ($n \ge 2$) 。

難易度 ॐ

03 老師講解

前 n 項和與第 n 項值





數列 $\langle a_n \rangle$ 的前n項和 $S_n = n^2 - 2$,試求:

(1) 第 4 項 (2) 第 5 項到第 10 項的和。

數列 $\left\langle a_{\scriptscriptstyle n}\right\rangle$ 的前 n 項和 $S_{\scriptscriptstyle n}=(n+1)(n-2)$,試求:

(1) 第 4 項 (2) 第 6 項到第 10 項的和。



重點 等差數列

- 1. 已知數列 a₁,a₂,a₃,···,若任意相鄰兩項,後項減前項的差恆為一個定值 d,即 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \cdots = d$,則稱此數列為「等差數列」,d為數列的「公差」。
- 2. 等差數列的第n項:若首項為 a_1 ,公差為d,第n項為 a_n ,則 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。
- 3. 等差中項:若 $a \cdot b \cdot c$ 為等差數列,則b稱為a和c的等差中項,且 $b = \frac{a+c}{2}$ 。

難易度 👸





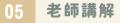


等差數列的公差與第 / 項

等差數列的第5項為23,第11項為41,試求: (1)公差 (2)第17項。

等差數列的第9項為24,第13項為40,則56為 等差數列的第幾項?





等差中項

學生演練



三數 $2a+6 \cdot a-4 \cdot 5a+1$ 成等差數列,試求實 數a之值。

若-3x+1和x-1的等差中項為 $\frac{x}{2}-3$,試求x之 值?

難易度 🦥 🖫

06 老師講解

等差數列公式運用

學生演練



等差數列 -123, -116, -109, ··· , 從第幾項開始 為正數? 等差數列 230, 215, 200, ··· , 從第幾項開始為負數?

電點 等差級數

- 1. **等差級數:**將等差數列的每一項用「+」號連接,則此級數稱為等差級數。 等差級數前 n 項和,記作 S_n 。即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 或 $S_n=\sum_{k=1}^n a_k$ 。
- 2. **等差級數求和公式:**設等差級數的首項為 a_1 ,公差為d,前n項和為 S_n ,則 $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} = \frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2} \text{ 或 } S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \times n}{2} \text{ } \circ$

若等差級數的項數為奇數,則級數和=中間項×項數。

$$\Rightarrow S_{2n+1} = a_{n+1} \times (2n+1)$$

難易度 🍅

07 老師講解

等差級數的和





試求等差級數 5+13+21+…到第 10 項的和。

試求等差級數 5+1+(-3)+…到第 20 項的和。

難易度 🍅 🛎

18 老師講解

等差級數的和

學生演練



試求 100 到 300 的自然數中,所有 7 的倍數的 總和。 試求 100 到 200 的自然數中,所有 3 的倍數的 總和。



重點 總和的計算

1. Σ 的運算性質: 設 $\langle a_{\scriptscriptstyle k} \rangle$ 、 $\langle b_{\scriptscriptstyle k} \rangle$ 皆為數列, c 為實數,則

$$(1) \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \circ$$

$$(2) \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \circ$$

$$(3) \sum_{k=1}^{n} c = nc \circ$$

(4) 若
$$1 \le m < n$$
 ,則 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$,例如 $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{6} a_k + \sum_{k=7}^{10} a_k$ 。

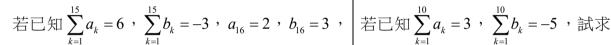
(1)
$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
 \circ

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



老師講解

Σ的運算



試求
$$\sum_{k=1}^{16} (4a_k - 3b_k + 2)$$
 之值。

若已知
$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$$
 , $\sum_{k=1}^{10} b_k = -5$, 試求

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 2b_k + 1)$$
 之值。

難易度 🍅

10 老師講解

Σ的計算公式





試求 $\sum_{k=1}^{10} (k-1)^2$ 的值。

試求 $\sum_{k=1}^{10} k(k+1)$ 的值。



自我挑戰



- 1. 有一等差數列,第6項是67,第11項是27,則
 - (1)此數列從第 項開始為負數。
 - (2) 當 n = 時,前 n 項的和有最大值為 。
- 2. 若 $x \cdot y \cdot z$ 成等差數列,且x < y < z。已知三數之和為 18,三數之平方和為 158,試求公差 d =
- 3. 在-2跟40之間插入5個數,使其成等差數列,求:
 - (1)插入的第3個數為。
 - (2)插入的 5 個數總和為。
- 4. 已知有一等差級數 38+35+32+…加到某項之和為 259, 試求此級數共有 項。
- 5. 試求下列各級數和:

$$(1) 5^2 + 6^2 + 7^2 + \dots + 18^2 = \underline{\hspace{1cm}} \circ$$

(2)
$$\sum_{k=9}^{18} \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

6-2

等比數列與級數



8

重點等

等比數列

其中定值r稱此等比數列的公比。

- 1. 等比數列的定義:數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 中,每一項皆不為 0,若任意相鄰兩項,後項與前項的比值恆為一定值r,即 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{$ 後項}前項 $\cdots = r$,則稱此數列為等比數列,
- 2. 等比數列的第 n 項:若首項為 a_1 ,公比為 r ,第 n 項為 a_n ,則 $a_n=a_1\times r^{n-1}$ 或 $a_n=a_m\times r^{n-m}$ (m< n)。
- 3. 等比中項:若 $a \cdot b \cdot c$ 成等比數列,則等比中項 $b = \pm \sqrt{ac} \circ (b^2 = ac)$

難易度 🎳





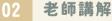
學生演練



等比數列的首項為 96,公比為 $-\frac{1}{4}$,試求其第 5 項。

等比數列的首項為 5, 第 7 項為 40, 試求其公比。

難易度 🎳



求等比數列第 / 項

學生演練



若等比數列的第 3 項為 2,第 6 項為 54,試求數列的第 8 項。

在 3 與 192 之間插入 5 個正數,使其成等比數列,試求此等比數列的第 4 項。

難易度 🗳 🗳

03 老師講解

求等比數列的公比





設 $a \cdot b \cdot c \cdot d$ 四正數成等比數列,若a+b=72,c+d=8,試求公比r=?

設 $a \cdot b \cdot c \cdot d$ 四正數成等比數列,若a+c=30,b+d=15,試求公比r=?

難易度 🌞 🖐

0.4 老師講解

等比中項

學生演練



若b為a與c的等比中項,且abc = 216,則b = ?

若x是整數,且x-1、4x+1的等比中項為 x+1,試求x的值。



重點 等比級數

- 1. 等比級數:將等比數列的每一項用「+」號連接,則稱為等比級數。
- 2. 等比級數和的求法:若首項為 a_1 ,公比為r,n為項數,前n項和為 S_n

(1) 當公比
$$r = 1$$
時, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n \times a_1$ 。

(2) 當公比
$$r \neq 1$$
時, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1 \times (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1 \times (1 - r^n)}{1 - r}$ 。





老師講解

等比級數求和





試求等比級數4+(-2)+1+…至第8項的和。

試求等比級數 $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$ 至第 6 項的和。

難易度 🎳



等比級數求和公式應用

學生演練



若一等比級數,首項為 3,公比為 2,和為 189, 則此級數共有幾項? 若等比級數 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ 至第 n 項的和為 $\frac{127}{64}$,試求 n 的值。



自我挑戰



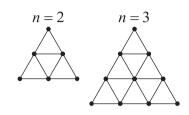
- 1. 在 6 與 $\frac{243}{8}$ 之間插入 3 個正數,使成等比數列,試求插入的第 1 個數字為 ____ 。
- 2. 四正數 $a \cdot b \cdot c \cdot d$ 成等比數列,若 $ab = \frac{cd}{256}$,則此數列的公比為____。
- 3. 試求 $162 + (-54) + 18 + \dots + (-\frac{2}{27}) =$
- 4. 若等比級數的末項為 1215,公比為 3,和為 1800,試求首項為。
- 5. 一等比數列共有 10 項,其奇數項的和為 31,偶數項的和為 62,則此數列的首項為。
- ★ 6. 小字每年初存入銀行 10 萬元,選擇一家年利率 1.8%複利計息的銀行,試問在他的每年存款金額與利率維持不變的情況下,則 5 年後的本利和約為 _____元。(四捨五入至百位,且已知1.018⁵≈1.0933)



歷屆試題

** **

- () 1. 某高中將三年級學生依體適能成績分成十一組。已知此十一組人數由小到大為 一個等差數列 a_1 、 a_2 、...、 a_{11} ,且 a_6 = 88,則該校三年級學生人數為多少人? (A)638 (B)726 (C)880 (D)968。 【113(B),答對率 43%】
- () 2. 小美想用火柴棒排成一個 n 層正三角形金字塔,例 n=1 如當 n=1、2、3 時,如圖所示。若依此規則,則 ↓ 排出一個 50 層金字塔恰需要多少根火柴棒?
 (A) 3675 (B) 3825 (C) 7500 (D) 7803。



【113(C), 答對率 53%】

- () 3. 晴晴在 2018 年初以一股 50 元買進某一檔股票,在 2023 年初時該股經配股、配息還原後,可以還原股價為一股 60 元。若此股價 60 元可視為以每年固定年利率 r 進行複利計算,則 r 可以從下列哪個算式計算求得?
 - (A) $50 \times r^5 = 60$ (B) $50 \times (1+r)^5 = 60$ (C) $50 \times (r+r^2+r^3+r^4+r^5) = 60$ (D) $50 \times [(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+(1+r)^4+(1+r)^5] = 60$ (112(C),答對率 39%]
- () 4. 已知等比數列 $\langle a_k \rangle$ 的首項 $a_1 = 2$,公比 r = 3 。若前 n 項和大於 2022 ,則滿足條件 的最小正整數 n = ?

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) $11 \circ$

【111(C), 答對率 58%】

- () 5. 若 $a = \sum_{m=1}^{7} \frac{m-2}{2m-1}$ 、 $b = \sum_{k=0}^{6} \frac{k-1}{2k+1}$ 、 $c = \sum_{i=3}^{8} \frac{i-4}{2i-5}$,則下列敘述何者正確?
 (A) b > a > c (B) c > a > b (C) c > a = b (D) a = b > c 。 【110(C),答對率 26%】
- () 6. 若在 1 和 2 之間插入二個數,使其成等比數列,則這二個數的乘積為何? (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8。 【109(A),答對率 55%】
- () 7. 某部以「尋寶」為主題的電影中,男主角進到第二道關卡時看到了一扇巨大的 鐵門,門邊有 100 個按鈕,每個按鈕都有一個數字,分別是從 1 到 100。牆上 有一個過關提示,上面印著:「有一個等差數列,其第 11 項和第 16 項分別為 31 和 56,按下該數列第 20 項數字的按鈕,鐵門就會打開」,則按下哪一個數 字的按鈕就會開門?

 $(A)65 (B)76 (C)83 (D)99 \circ$

【109(B), 答對率 74%】

() 8. 某棒球投手自 4 月 1 日開始每天練投,他每日投球數為等差數列。若 4 月 5 日 投球數為 41 個,4 月 13 日為 73 個,則他 4 月份有幾天投球數超過 100 個?
 (A)10 (B)11 (C)12 (D)13。

- () 9. 設已知 $\langle a_n \rangle$ 為公比-2的等比數列,已知 $a_1a_3=12$,則 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=?$ (A)219 (B)237 (C)246 (D)255。 【108(A),答對率 30%】
- () 10. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列且滿足 $a_1 > 0$ 、 $a_5 = 3a_{12}$ 。則當n為多少時, a_n 開始為負數? (A)14 (B)15 (C)16 (D)17。 【108(C),答對率 40%】
- () 11. 若等差級數 $\sum_{k=10}^{1018} a_k$ 之值為 2018,則 a_{514} = ?

(A) 2018 (B) 1008 (C) 514 (D) 2 °

【107(A),答對率 23%】

() 12. 若一等差數列的第 10 項為首項的 4 倍,且首項不為 0,則該數列的第 6 項為第 2 項的幾倍?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 \circ

【107(B),答對率 53%】

() 13. $\sum_{n=1}^{10} (2^n + 3n + 2) = ?$

(A)1268 (B)1298 (C)2017 (D)2231 °

【107(C),答對率 50%】

(A)1 (B)2 (C)5 (D)10 $^{\circ}$

【106(B), 答對率 62%】

() 15. 設 $a \cdot b \cdot c$ 三數成等比數列,且滿足 a+b+c=9 及 $a^2+b^2+c^2=189$,則等比中項 b=?

(A) -6 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 6 °

【106(C),答對率 38%】