



數列與級數



6-1

等差數列與級數



重點

數列與級數

- 數列**：將一組數字依序排成一列，稱為「數列」，**例如** $a_1, a_2, a_3, \dots$ ，記作 $\langle a_k \rangle$ 。
當 $k=1$ 時， a_1 稱為第一項（或首項），當 $k=n$ 時， a_n 稱為第 n 項，若為最後一項，又稱為「末項」。一個數列項數有限，此數列稱為有限數列。而一個數列有無限多項，此數列稱為無窮數列。
- 級數**：若將數列 $\langle a_k \rangle$ 各項依次用「+」連接起來，所成的式子 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ ，稱為「級數」。

(1) 若 $\langle a_k \rangle$ 是一個有限數列，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 稱為有限級數，可記為

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n。$$

(2) 若 $\langle a_k \rangle$ 是一個無窮數列，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ 稱為無窮級數，可記為

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots。$$

難易度

01

老師講解

數列的一般項

學生演練



設數列 $\langle a_n \rangle$ 的第 n 項 $a_n = n^2 + 1$ ，試求
 $a_1 + a_3 + a_5 = ?$

設數列 $\langle a_n \rangle$ 的第 n 項 $a_n = 2^n + 2n$ ，試求
 $a_1 + a_3 + a_5 = ?$

難易度 🐾

02 老師講解

級數的展開

學生演練



試求級數 $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k(k+1)}$ 的和。

試求級數 $\sum_{k=1}^4 (2^k - 1)$ 的和。

重點 數列的前 n 項和

若數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和記作 S_n ，則

(1) 第一項 $a_1 = S_1$ 。

(2) 第 n 項 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)。

難易度 🐾

03 老師講解

前 n 項和與第 n 項值

學生演練



數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = n^2 - 2$ ，試求：

(1) 第 4 項 (2) 第 5 項到第 10 項的和。

數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = (n+1)(n-2)$ ，試求：

(1) 第 4 項 (2) 第 6 項到第 10 項的和。

**重點 等差數列**

1. 已知數列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ ，若任意相鄰兩項，後項減前項的差恆為一個定值 d ，即 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots = d$ ，則稱此數列為「等差數列」， d 為數列的「公差」。
2. 等差數列的第 n 項：若首項為 a_1 ，公差為 d ，第 n 項為 a_n ，則 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。
或 $a_n = a_m + (n-m)d$ ，即 $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$ ($m < n$)。
3. 等差中項：若 a 、 b 、 c 為等差數列，則 b 稱為 a 和 c 的等差中項，且 $b = \frac{a+c}{2}$ 。

難易度

04 老師講解**等差數列的公差與第 n 項**

學生演練

等差數列的第 5 項為 23，第 11 項為 41，試求：
(1) 公差 (2) 第 17 項。

等差數列的第 9 項為 24，第 13 項為 40，則 56 為等差數列的第幾項？

難易度

05 老師講解**等差中項**

學生演練

三數 $2a+6$ 、 $a-4$ 、 $5a+1$ 成等差數列，試求實數 a 之值。

若 $-3x+1$ 和 $x-1$ 的等差中項為 $\frac{x}{2}-3$ ，試求 x 之值？



06 老師講解

等差數列公式運用

學生演練

等差數列 $-123, -116, -109, \dots$ ，從第幾項開始為正數？

等差數列 $230, 215, 200, \dots$ ，從第幾項開始為負數？



重點 等差級數

1. **等差級數**：將等差數列的每一項用「+」號連接，則此級數稱為等差級數。

等差級數前 n 項和，記作 S_n 。即 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 或 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 。

2. **等差級數求和公式**：設等差級數的首項為 a_1 ，公差為 d ，前 n 項和為 S_n ，則

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} = \frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2} \text{ 或 } S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \times n}{2}。$$

若等差級數的項數為奇數，則級數和 = 中間項 $\times$ 項數。

$$\Rightarrow S_{2n+1} = a_{n+1} \times (2n+1)$$

例如 $S_9 = a_5 \times 9$ ， $S_{15} = a_8 \times 15$

難易度 

07

老師講解

等差級數的和

學生演練

試求等差級數 $5+13+21+\cdots$ 到第 10 項的和。試求等差級數 $5+1+(-3)+\cdots$ 到第 20 項的和。難易度 

08

老師講解

等差級數的和

學生演練



試求 100 到 300 的自然數中，所有 7 的倍數的總和。

試求 100 到 200 的自然數中，所有 3 的倍數的總和。

**重點** 總和的計算

1. Σ 的運算性質：設 $\langle a_k \rangle$ 、 $\langle b_k \rangle$ 皆為數列， c 為實數，則

$$(1) \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k \circ$$

$$(2) \sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k \circ$$

$$(3) \sum_{k=1}^n c = nc \circ$$

$$(4) \text{若 } 1 \leq m < n, \text{ 則 } \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k, \quad \text{例如 } \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^6 a_k + \sum_{k=7}^{10} a_k \circ$$

2. 常用的 Σ 計算公式：

$$(1) \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \circ$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \circ$$

難易度 🐾

09 老師講解 **Σ 的運算****學生演練**

若已知 $\sum_{k=1}^{15} a_k = 6$ ， $\sum_{k=1}^{15} b_k = -3$ ， $a_{16} = 2$ ， $b_{16} = 3$ ，

試求 $\sum_{k=1}^{16} (4a_k - 3b_k + 2)$ 之值。

若已知 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$ ， $\sum_{k=1}^{10} b_k = -5$ ，試求

$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 2b_k + 1)$ 之值。

難易度 

10 老師講解

 Σ 的計算公式學生演練 試求 $\sum_{k=1}^{10} (k-1)^2$ 的值。試求 $\sum_{k=1}^{10} k(k+1)$ 的值。自我挑戰

- 有一等差數列，第 6 項是 67，第 11 項是 27，則
 - 此數列從第 _____ 項開始為負數。
 - 當 $n =$ _____ 時，前 n 項的和有最大值為 _____。
- 若 x 、 y 、 z 成等差數列，且 $x < y < z$ 。已知三數之和為 18，三數之平方和為 158，試求公差 $d =$ _____。
- 在 -2 跟 40 之間插入 5 個數，使其成等差數列，求：
 - 插入的第 3 個數為 _____。
 - 插入的 5 個數總和為 _____。
- 已知有一等差級數 $38+35+32+\cdots$ 加到某項之和為 259，試求此級數共有 _____ 項。
- 試求下列各級數和：
 - $5^2+6^2+7^2+\cdots+18^2 =$ _____。
 - $\sum_{k=9}^{18} \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$ _____。

6-2

等比數列與級數



重點 等比數列

- 等比數列的定義：數列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 中，每一項皆不為 0，若任意相鄰兩項，後項與前項的比值恆為一定值 r ，即 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\text{後項}}{\text{前項}} = r$ ，則稱此數列為等比數列，其中定值 r 稱此等比數列的公比。
- 等比數列的第 n 項：若首項為 a_1 ，公比為 r ，第 n 項為 a_n ，則 $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ 或 $a_n = a_m \times r^{n-m}$ ($m < n$)。
- 等比中項：若 a 、 b 、 c 成等比數列，則等比中項 $b = \pm\sqrt{ac}$ 。（ $b^2 = ac$ ）

難易度 🐾

01 老師講解

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

學生演練



等比數列的首項為 96，公比為 $-\frac{1}{4}$ ，試求其第 5 項。

等比數列的首項為 5，第 7 項為 40，試求其公比。

難易度 🐾

02 老師講解

求等比數列第 n 項

學生演練



若等比數列的第 3 項為 2，第 6 項為 54，試求數列的第 8 項。

在 3 與 192 之間插入 5 個正數，使其成等比數列，試求此等比數列的第 4 項。

難易度 🐾🐾

03

老師講解

求等比數列的公比

學生演練



設 a 、 b 、 c 、 d 四正數成等比數列，若
 $a+b=72$ ， $c+d=8$ ，試求公比 $r=?$

設 a 、 b 、 c 、 d 四正數成等比數列，若
 $a+c=30$ ， $b+d=15$ ，試求公比 $r=?$

難易度 🐾🐾

04

老師講解

等比中項

學生演練



若 b 為 a 與 c 的等比中項，且 $abc=216$ ，則
 $b=?$

若 x 是整數，且 $x-1$ 、 $4x+1$ 的等比中項為
 $x+1$ ，試求 x 的值。

**重點****等比級數**

1. **等比級數**：將等比數列的每一項用「+」號連接，則稱為等比級數。
2. **等比級數和的求法**：若首項為 a_1 ，公比為 r ， n 為項數，前 n 項和為 S_n

(1) 當公比 $r=1$ 時， $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1 = n \times a_1$ 。

(2) 當公比 $r \neq 1$ 時， $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{a_1 \times (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1 \times (1 - r^n)}{1 - r}$ 。

難易度 🐾

05

老師講解

等比級數求和

學生演練



試求等比級數 $4 + (-2) + 1 + \cdots$ 至第 8 項的和。

試求等比級數 $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$ 至第 6 項的和。

難易度

06

老師講解

等比級數求和公式應用

學生演練



若一等比級數，首項為 3，公比為 2，和為 189，則此級數共有幾項？

若等比級數 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ 至第 n 項的和為 $\frac{127}{64}$ ，試求 n 的值。



自我挑戰



1. 在 6 與 $\frac{243}{8}$ 之間插入 3 個正數，使成等比數列，試求插入的第 1 個數字為 _____。
2. 四正數 a 、 b 、 c 、 d 成等比數列，若 $ab = \frac{cd}{256}$ ，則此數列的公比為 _____。
3. 試求 $162 + (-54) + 18 + \dots + (-\frac{2}{27}) =$ _____。
4. 若等比級數的末項為 1215，公比為 3，和為 1800，試求首項為 _____。
5. 一等比數列共有 10 項，其奇數項的和為 31，偶數項的和為 62，則此數列的首項為 _____。
6. **素** 小宇每年初存入銀行 10 萬元，選擇一家年利率 1.8% 複利計息的銀行，試問在他的每年存款金額與利率維持不變的情況下，則 5 年後的本利和約為 _____ 元。
(四捨五入至百位，且已知 $1.018^5 \approx 1.0933$)



歷屆試題



- () 1. 某高中將三年級學生依體適能成績分成十一組。已知此十一組人數由小到大為一個等差數列 $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ ，且 $a_6 = 88$ ，則該校三年級學生人數為多少人？
(A) 638 (B) 726 (C) 880 (D) 968。 【113(B)，答對率 43%】
- () 2. 小美想用火柴棒排成一個 n 層正三角形金字塔，例 $n=1$ $n=2$ $n=3$
如當 $n=1, 2, 3$ 時，如圖所示。若依此規則，則
排出一個 50 層金字塔恰需要多少根火柴棒？
(A) 3675 (B) 3825 (C) 7500 (D) 7803。 【113(C)，答對率 53%】
- () 3. 晴晴在 2018 年初以一股 50 元買進某一檔股票，在 2023 年初時該股經配股、配息還原後，可以還原股價為一股 60 元。若此股價 60 元可視為以每年固定年利率 r 進行複利計算，則 r 可以從下列哪個算式計算求得？
(A) $50 \times r^5 = 60$ (B) $50 \times (1+r)^5 = 60$ (C) $50 \times (r+r^2+r^3+r^4+r^5) = 60$
(D) $50 \times [(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + (1+r)^4 + (1+r)^5] = 60$ 。 【112(C)，答對率 39%】
- () 4. 已知等比數列 $\{a_k\}$ 的首項 $a_1 = 2$ ，公比 $r = 3$ 。若前 n 項和大於 2022，則滿足條件的最小正整數 $n = ?$
(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11。 【111(C)，答對率 58%】
- () 5. 若 $a = \sum_{m=1}^7 \frac{m-2}{2m-1}$ 、 $b = \sum_{k=0}^6 \frac{k-1}{2k+1}$ 、 $c = \sum_{i=3}^8 \frac{i-4}{2i-5}$ ，則下列敘述何者正確？
(A) $b > a > c$ (B) $c > a > b$ (C) $c > a = b$ (D) $a = b > c$ 。 【110(C)，答對率 26%】
- () 6. 若在 1 和 2 之間插入二個數，使其成等比數列，則這二個數的乘積為何？
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8。 【109(A)，答對率 55%】
- () 7. 某部以「尋寶」為主題的電影中，男主角進到第二道關卡時看到了一扇巨大的鐵門，門邊有 100 個按鈕，每個按鈕都有一個數字，分別是從 1 到 100。牆上有一個過關提示，上面印著：「有一個等差數列，其第 11 項和第 16 項分別為 31 和 56，按下該數列第 20 項數字的按鈕，鐵門就會打開」，則按下哪一個數字的按鈕就會開門？
(A) 65 (B) 76 (C) 83 (D) 99。 【109(B)，答對率 74%】
- () 8. 某棒球投手自 4 月 1 日開始每天練投，他每日投球數為等差數列。若 4 月 5 日投球數為 41 個，4 月 13 日為 73 個，則他 4 月份有幾天投球數超過 100 個？
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13。 【109(C)，答對率 55%】

- () 9. 設已知 $\langle a_n \rangle$ 為公比 -2 的等比數列，已知 $a_1 a_3 = 12$ ，則 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = ?$
 (A) 219 (B) 237 (C) 246 (D) 255。 【108(A)，答對率 30%】
- () 10. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列且滿足 $a_1 > 0$ 、 $a_5 = 3a_{12}$ 。則當 n 為多少時， a_n 開始為負數？
 (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17。 【108(C)，答對率 40%】
- () 11. 若等差級數 $\sum_{k=10}^{1018} a_k$ 之值為 2018，則 $a_{514} = ?$
 (A) 2018 (B) 1008 (C) 514 (D) 2。 【107(A)，答對率 23%】
- () 12. 若一等差數列的第 10 項為首項的 4 倍，且首項不為 0，則該數列的第 6 項為第 2 項的幾倍？
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。 【107(B)，答對率 53%】
- () 13. $\sum_{n=1}^{10} (2^n + 3n + 2) = ?$
 (A) 1268 (B) 1298 (C) 2017 (D) 2231。 【107(C)，答對率 50%】
- () 14. 若 a 為正整數，且 $1, a, 2a$ 為等比數列，則 $a^2 + 1 = ?$
 (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 10。 【106(B)，答對率 62%】
- () 15. 設 a 、 b 、 c 三數成等比數列，且滿足 $a + b + c = 9$ 及 $a^2 + b^2 + c^2 = 189$ ，則等比中項 $b = ?$
 (A) -6 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 6。 【106(C)，答對率 38%】