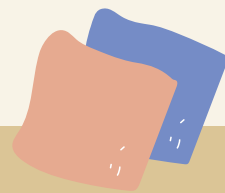




直線與圓



5-1

直線方程式



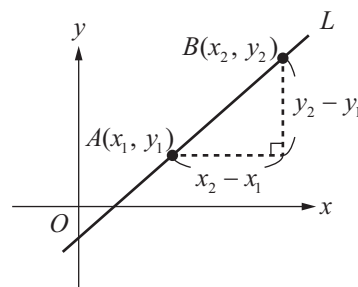
重點

斜率與斜角

1. 斜率：

直線 L 上任取相異兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，
則直線 L 的斜率為

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y \text{ 坐標變化量}}{x \text{ 坐標變化量}}。$$

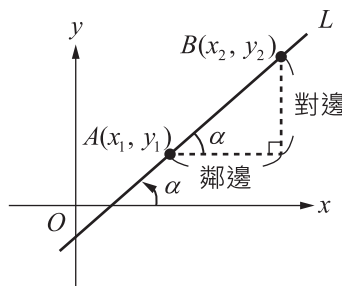


2. 斜角：

坐標平面上，由 x 軸正向逆時針方向旋轉至直線 L 的最小正角 α ，稱為直線 L 的斜角。
且 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ 。

3. 斜率與斜角的關係：

如圖所示， $m_L = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \tan \alpha$ （即斜率 = $\tan$ 斜角）



4. 斜率的正負：

直線方向	右上升	右下降	水平線	鉛垂線
圖形				
斜角 α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
斜率 m	$m = \tan \alpha > 0$	$m = \tan \alpha < 0$	$m = \tan 0^\circ = 0$	$m = \tan 90^\circ$ 不存在

難易度 🐾🐾



01 老師講解

斜率 = $\tan$ 斜角

學生演練

- | | |
|---|--|
| <p>(1) 已知直線 L_1 通過 $A(3, 0)$、$B(-2, 5)$，試求直線 L_1 的斜率及斜角。</p> <p>(2) 已知直線 L_2 的斜角為 60°，試求直線 L_2 的斜率。</p> | <p>(1) 已知直線 L_1 通過 $P(4, 0)$、$Q(3, \sqrt{3})$，試求直線 L_1 的斜率及斜角。</p> <p>(2) 已知直線 L_2 的斜角為 150°，試求直線 L_2 的斜率。</p> |
|---|--|

難易度 🐾



02 老師講解

同一直線上，任取兩點斜率相等

學生演練

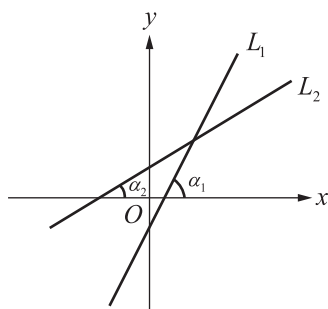
若 $A(3, -1)$ 、 $B(a, a+3)$ 、 $C(1, -4)$ 三點共線，則 $a = ?$

若 $P(9k+1, 3)$ 、 $Q(1, -2)$ 、 $R(2k-1, -1)$ 三點無法構成三角形，則 $k = ?$



重點 斜率的大小

1. 右上升， $m > 0$



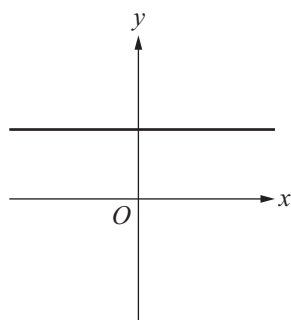
($90^\circ > \alpha_1 > \alpha_2$)

$\therefore \tan \alpha_1 > \tan \alpha_2 \Rightarrow m_{L_1} > m_{L_2}$

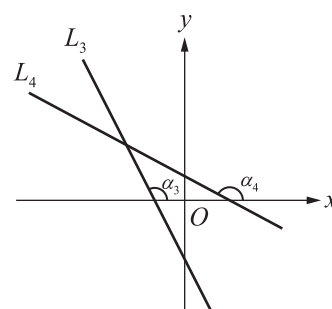
$\therefore$ 斜角越大，斜率越大

(直線越陡，斜率越大)

2. 水平線， $m = 0$



3. 右下降， $m < 0$



($90^\circ < \alpha_3 < \alpha_4$)

$\therefore \tan \alpha_3 < \tan \alpha_4 \Rightarrow m_{L_3} < m_{L_4}$

$\therefore$ 斜角越大，斜率越大

(直線越陡，斜率越小)

難易度

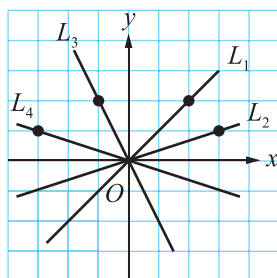
03 老師講解

斜率的大小

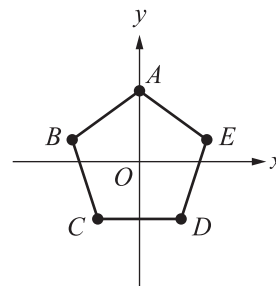
學生演練



下圖有直線 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 ，分別求其斜率，並比較斜率大小。



下圖為正五邊形 $ABCDE$ ，其中 $\overline{CD} \parallel x$ 軸，試比較直線 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 、 $\overrightarrow{DE}$ 、 $\overrightarrow{EA}$ 的斜率大小。

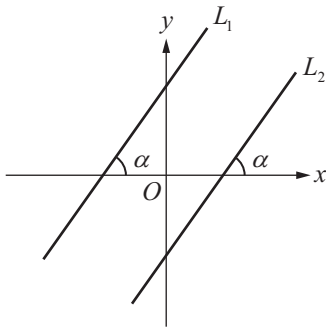




重點 平行線與垂直線的斜率

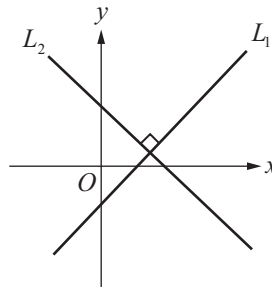
1. 兩平行線的斜率

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_{L_1} = m_{L_2}$$



2. 兩垂直線的斜率

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_{L_1} \times m_{L_2} = -1$$



難易度

04 老師講解

直線的平行與垂直

學生演練

設 $A(-3, 2)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(1, k)$ 、 $D(k+1, 3)$ ，若：

(1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，則 $k = ?$

(2) $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ，則 $k = ?$

設 $A(2, 1)$ 、 $B(1, 10)$ 、 $C(3, -4)$ 、 $D(k, 2k+1)$ ，

若：

(1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，則 $k = ?$

(2) $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ，則 $k = ?$



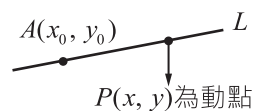
重點

直線方程式

1. 點斜式：

已知直線 L 通過定點 $A(x_0, y_0)$ ，且斜率為 m ，

則直線 L 的方程式為 $m = \frac{y-y_0}{x-x_0} \Rightarrow y-y_0 = m(x-x_0)$ 。

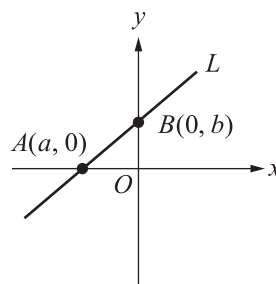


2. (1) 截距：

直線 L 與 x 軸交於 $A(a, 0) \Rightarrow x$ 截距為 a

直線 L 與 y 軸交於 $B(0, b) \Rightarrow y$ 截距為 b

($\because$ 截距是坐標，不是距離，故截距可正、可負、也可以是 0)



(2) 截距式：

已知直線 L 的 x 截距為 a ， y 截距為 b ，則直線 L 的方程式為

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a, b \text{ 此時皆不是 } 0)$$

3. 斜截式：

已知直線 L 的斜率為 m ， y 截距為 b ，則直線 L 的方程式為 $y = mx + b$ 。

難易度

05

老師講解

求直線方程式

學生演練



試求滿足下列條件的直線方程式：

- (1) 過 $(3, -1)$ 、 $(2, 2)$ 兩點。
- (2) 斜率 $m = -3$ ， y 截距為 2。
- (3) x 截距為 2， y 截距為 -3 。

試求滿足下列條件的直線方程式：

- (1) 過 $(1, 1)$ ，且斜率 $m = -\frac{1}{3}$ 。
- (2) 斜率 $m = -2$ ， x 截距為 1。
- (3) 與坐標軸交於 $(3, 0)$ 、 $(0, -4)$ 。



06

老師講解

互相垂直的直線方程式

學生演練

已知 $A(0, -1)$ 、 $B(2, 3)$ ，試求 $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式。

已知 $\triangle ABC$ 的頂點為 $A(1, 2)$ 、 $B(3, 4)$ 、 $C(4, 0)$ ，試求 $\overline{AC}$ 邊上的高所在之直線方程式。



重點

直線的一般式找斜率

1. 一般式的斜率：直線 $L: ax + by + c = 0$

(1) 當 $b \neq 0$ 時， L 的斜率 $m_L = -\frac{a}{b}$ 。

(2) 當 $b = 0$ 時，直線 $L: ax + c = 0$ 為鉛垂線， L 的斜率不存在。

2. 直線的平行與垂直：直線 $L: ax + by + c = 0$

(1) 若 $L_1 \parallel L$ ，兩直線斜率相等，設 $L_1: ax + by + k_1 = 0$ ($k_1 \neq c$)

(2) 若 $L_2 \perp L$ ，兩直線斜率相乘為 -1 ，設 $L_2: bx - ay + k_2 = 0$ (係數交換， a 、 b 其中之一變號)。

難易度



07 老師講解

一般式的斜率

學生演練

已知直線 $ax + 5y + c = 0$ 的斜率為 $-\frac{2}{15}$ ，且通過 $(-1, 1)$ ，試求 $a = ?$ $c = ?$

已知兩直線 $2x + by + c = 0$ 與 $3x - 4y + d = 0$ 互相垂直，試求 $b = ?$

難易度



08 老師講解

直線的平行與垂直

學生演練

已知一點 $A(3, -1)$ 與直線 $L: 2x - 3y + 1 = 0$ ，試求滿足下列各條件的直線方程式：

- (1) 過點 A 與直線 L 平行的直線。
- (2) 過點 A 與直線 L 垂直的直線。

試求過點 $(2, 3)$ 與直線 $L: x - 2y + 2 = 0$ ：

- (1) 相互平行的直線。
- (2) 相互垂直的直線。



重點

二元一次方程組的解與其幾何意義

二元一次方程組 $\begin{cases} L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ (此時 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 皆不為 0)

名稱	相容方程組	相依方程組	矛盾方程組
幾何意義 (兩直線的關係)	相交於一點 	兩直線重合 	兩直線平行
代數意義 (方程組的解)	恰有一組解	無限多組解	無解
方程組係數比	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

難易度 🐾🐾

09 老師講解

二元一次方程組的解與其幾何意義

學生演練



若方程組 $\begin{cases} L_1 : kx + (k+2)y + 4 = 0 \\ L_2 : x + ky + 2 = 0 \end{cases}$

(1) 無解 (2) 無限多解，試求 k 之值。

若方程組 $\begin{cases} L_1 : ax + 2y + 3 = 0 \\ L_2 : 8x + ay + 6 = 0 \end{cases}$ 無解，試求 a 之值。



自我挑戰



- 已知 L_1 的斜角為 60° ， $L_2: y=1$ ， L_3 通過 $A(2, -3)$ 、 $B(4, -5)$ 兩點， $L_4: 6x-3y+1=0$ ，試比較 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 的大小 _____。
- 依下列各條件求直線方程式：（以一般式 $ax+by+c=0$ 表示）
 - 通過點 $(3, -1)$ ，斜率為 -3 的直線：_____。
 - x 截距為 1 ，斜率為 $\frac{3}{2}$ 的直線：_____。
 - 平面上一直線的兩截距相等，且過點 $(-1, 2)$ ，則此直線方程式：_____與_____。
- 已知直線 L 過點 $A(1, -2)$ ，且與直線 $2x-y+5=0$ 平行。試問直線 L 的 y 軸截距為_____。
- 設 $A(-1, 6)$ ， $B(3, -4)$ ，若 $\overline{AB}$ 的垂直平分線為 $L: ax+by+3=0$ ，則 $a-b=$ _____。
- 若方程組 $\begin{cases} kx-2y=k-1 \\ 4x+(2-k)y-3=0 \end{cases}$
 - 無解，則 $k=$ _____
 - 無限多組解， $k=$ _____。

5-2

點到直線的距離

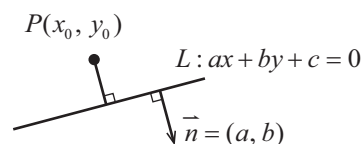


重點

點到直線的距離

- 法向量：**與直線 $L: ax+by+c=0$ 垂直的向量稱為法向量，法向量不唯一，法向量 $\vec{n}=(a, b)$ 為其中之一。
- 平面上一點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax+by+c=0$ 的距離為

$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}。$$



難易度

01

老師講解

點到直線距離

學生演練



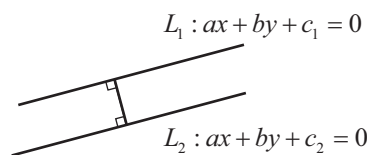
平面上一點 $A(2, 3)$ 到直線 $L: 3x-4y+k=0$ 的距離為 2 ，試求 k 之值。

平面上一點 $P(2, k)$ 到直線 $L: 2x+y-3=0$ 的距離為 $\sqrt{5}$ ，試求 k 之值。

**重點****兩平行直線的距離**

兩平行直線 $L_1: ax + by + c_1 = 0$ 及 $L_2: ax + by + c_2 = 0$,

則 L_1 與 L_2 的距離為 $d(L_1, L_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。



難易度 🐾

02

老師講解

平行線的距離

學生演練



已知 $\begin{cases} L_1: 3x - y - 7 = 0 \\ L_2: 6x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ 互相平行，試求 L_1 和 L_2 的距離。

若 $\begin{cases} L_1: 3x - 4y + k = 0 \\ L_2: 3x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$ 兩直線的距離為 2，試求 k 之值。

**自我挑戰**

- 試求平面上一點 $A(7, 4)$ 到直線 $L: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ 的距離為 _____。
- 已知 $P(1, 1)$ ， $Q(-2, 2)$ ， $\overline{PQ}$ 交直線 $L: 2x - 3y + 5 = 0$ 於 R 點，求 $\overline{PR} : \overline{QR} =$ _____。
- 求兩平行直線 $x - 2y + 5 = 0$ 與 $-2x + 4y + 5 = 0$ 之間的距離為 _____。
- 求與 $4x - 3y + 1 = 0$ 互相垂直，且與點 $A(-1, 1)$ 相距為 3 的直線方程式：
_____ 或 _____。
- 已知 $\triangle ABC$ 中， A 坐標為 $(-2, 1)$ ， $\overline{BC} = 5$ ，且 B 、 C 都在直線 $5x - 12y - 4 = 0$ 上，試求 $\triangle ABC$ 的面積為 _____。

5-3

圓方程式



重點

圓的標準式

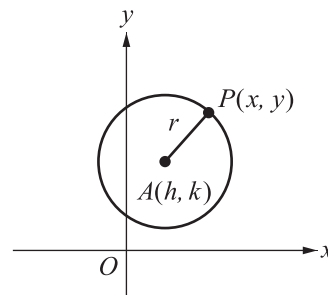
1. 圓的定義：

平面上，動點 $P(x, y)$ 到定點 $A(h, k)$ 的距離為一定值 r ，滿足 $\overline{PA} = r$ 的所有 P 點所形成的圖形稱為「圓」。其中定點 $A(h, k)$ 稱為圓的「圓心」，定值 r 稱為圓的「半徑」。

2. 圓的標準式：

以 $A(h, k)$ 為圓心， r 為半徑的圓，其標準式為

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2。$$



難易度

01

老師講解

圓的標準式

學生演練



試求下列的圓方程式：

- (1) 圓心 $(2, 0)$ 且半徑為 $\sqrt{6}$ 的圓。
- (2) 圓心 $(3, -1)$ 且通過 $(1, 2)$ 的圓。

試求下列的圓方程式：

- (1) 圓心 $(0, 3)$ 且半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓。
- (2) 圓心 $(-1, 2)$ 且通過 $(0, 0)$ 的圓。

難易度

02

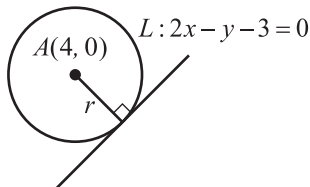
老師講解

與直線相切的圓

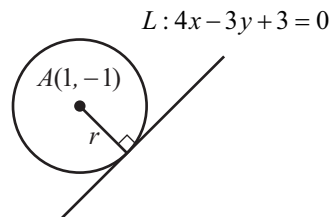
學生演練



試求圓心 $A(4, 0)$ 且與直線 $L: 2x - y - 3 = 0$ 相切的圓方程式。



試求圓心 $A(1, -1)$ 且與直線 $L: 4x - 3y + 3 = 0$ 相切的圓方程式。



**重點****圓的一般式****1. 圓的一般式：**

將圓的標準式展開， $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$ ，令
 $d = -2h$ ， $e = -2k$ ， $f = h^2 + k^2 - r^2$ ，則圓的一般式為 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 。

2. 二元二次方程式 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 的圖形：

將 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \Rightarrow (x + \frac{d}{2})^2 + (y + \frac{e}{2})^2 = (\frac{\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}}{2})^2$ 配方法

令圓的判別式為 $\Delta = d^2 + e^2 - 4f$

(1) $\Delta > 0$ ，方程式的圖形為一圓，圓心 $(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2})$ ，半徑 $r = \frac{\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}}{2}$ 。

(2) $\Delta = 0$ ，方程式的圖形為一點，點坐標為 $(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2})$ 。

(3) $\Delta < 0$ ，方程式沒有圖形。

難易度 🐾

03**老師講解****一般式求圓心和半徑****學生演練**

試求 $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0$ 的圓心坐標及半徑長。

試求 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ 的圓心坐標及半徑長。

難易度 🐾

04**老師講解****圓的判別式****學生演練**

若 $2x^2 + 2y^2 - 2kx + 2y + 1 = 0$ 為一圓，試求 k 的範圍。

若 $x^2 + y^2 + 2kx + 2y + 5 = 0$ 沒有圖形，試求 k 的範圍。

難易度



05 老師講解

過三點求圓

學生演練

試求通過 $A(-3, 0)$ 、 $B(-1, 1)$ 、 $C(0, 2)$ 三點的圓方程式。

試求通過 $(0, 0)$ 、 $(2, -4)$ 、 $(-1, -1)$ 三點的圓方程式。



重點 圓的參數式

1. 圓心 $(0, 0)$ ，半徑 $= r \Rightarrow$ (1) 標準式： $x^2 + y^2 = r^2$ 。
 (2) 參數式： $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ ， $0 \leq \theta < 2\pi$ 。
2. 圓心 (h, k) ，半徑 $= r \Rightarrow$ (1) 標準式： $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ 。
 (2) 參數式： $\begin{cases} x = h + r \cos \theta \\ y = k + r \sin \theta \end{cases}$ ， $0 \leq \theta < 2\pi$ 。

06 老師講解

圓的參數式

學生演練



試將各圓化為參數式：

(1) $x^2 + y^2 = 64$ 。

(2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$ 。

試將各圓化為參數式：

(1) $x^2 + y^2 = 9$ 。

(2) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ 。



自我挑戰



1. 依下列各條件，求圓的方程式：（方程式答案以標準式或一般式作答）

(1) 圓心 $(-5, 3)$ ，直徑為 $2\sqrt{7}$ 的圓：_____。

(2) 直徑兩端點為 $(-2, 1)$ ， $(6, 5)$ 的圓：_____。

(3) 圓心在 x 軸上，且通過 $A(0, -3)$ ， $B(-2, 1)$ 兩點的圓：_____。

(4) 通過三點 $(0, 0)$ ， $(4, 0)$ ， $(0, 3)$ 的圓：_____。

2. 已知圓 $C: x^2 + (y+1)^2 = 2$ ，求圓心：_____，半徑：_____，

參數式：_____。

3. 設圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$ ，已知圓 C 的半徑為 1，圓心在直線 $ax + y + 2 = 0$ 上，試求數對 $(a, k) =$ _____。

4. 若 $3x^2 + 3y^2 + ax + 6y + a + 3 = 0$ 沒有圖形，則 a 的範圍為_____。

5. 設圓心在第四象限中的圓與兩坐標軸相切，且圓心在直線 $2x - y - 9 = 0$ 上，則圓方程式為：_____。

5-4

圓與直線的關係



重點

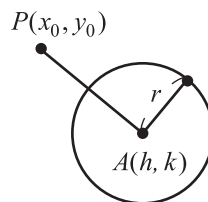
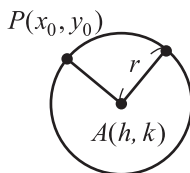
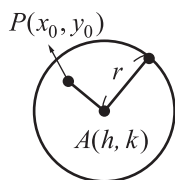
圓與點的位置關係

1. 已知圓的標準式： $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，圓心 $A(h, k)$ ，半徑為 r ，若有一點 $P(x_0, y_0)$ ，可知 P 點與圓有三種位置關係：

(1) P 點在圓內 $\Leftrightarrow \overline{AP} < r \Leftrightarrow \overline{AP}^2 < r^2 \Leftrightarrow (x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 < r^2$ 。

(2) P 點在圓上 $\Leftrightarrow \overline{AP} = r \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 = r^2$ 。

(3) P 點在圓外 $\Leftrightarrow \overline{AP} > r \Leftrightarrow \overline{AP}^2 > r^2 \Leftrightarrow (x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 > r^2$ 。



2. 已知圓的一般式： $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，若有一點 $P(x_0, y_0)$ ，可知 P 點與圓有三種關係：

(1) P 點在圓內 $\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f < 0$ 。

(2) P 點在圓上 $\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0$ 。

(3) P 點在圓外 $\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f > 0$ 。

難易度

01

老師講解

點與圓的位置關係

學生演練



若點 $(k, k-1)$ 在圓： $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ 的外部，試求 k 的範圍。

若點 $(k, 1)$ 在圓： $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 的內部，試求 k 的範圍。



02 老師講解

點到圓的距離

學生演練

已知點 $P(3, -1)$ 與圓： $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ ，
試求點 P 到圓上一點的最遠與最近距離。

已知點 $P(5, 1)$ 與圓： $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ ，試求
點 P 到圓上一點的最遠與最近距離。



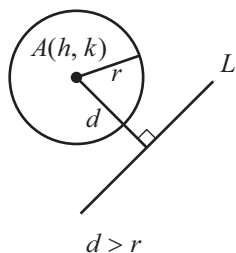
重點

圓與直線的關係

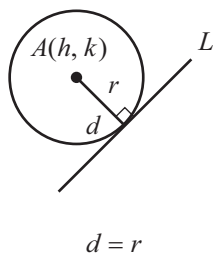
1. 已知直線 $L: ax + by + c = 0$ ，圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，其中圓心 $A(h, k)$ ，半徑為 r ，則
圓心到直線的距離 $d(A, L) = d = \frac{|ah + bk + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

2. 圓與直線的關係：

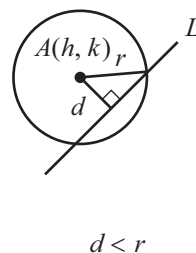
(1) 相離（沒有交點）



(2) 相切（交於一點）



(3) 相割（交於兩點）



難易度 🐾🐾



03 老師講解

圓與直線的關係

學生演練

已知一圓 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ 與直線 $L: x - y + k = 0$ 相交兩點，試求 k 的範圍。

已知一圓 $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ 與直線 $L: 3x + 2y + k = 0$ 相切，試求 k 之值。

難易度 🐾🐾



04 老師講解

直線與圓的距離

學生演練

設直線 $L: 3x + 4y + 3 = 0$ ， P 為圓 $C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ 上一點，試求 P 點到直線 L 的最長與最短距離。

設直線 $L: x - y - 1 = 0$ ， P 為圓 $x^2 + y^2 - 10x = 0$ 上一點，試求 P 點到直線 L 的最長與最短距離。



已知圓 $C: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ 與直線 $L: 3x+4y+k=0$ 交於 A 、 B 兩點且 $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ ，試求 k 之值。

已知圓 $C: (x-3)^2 + y^2 = 11$ 與直線 $L: x-y-1=0$ 交於 A 、 B 兩點，試求 $\overline{AB}$ 的長度。



重點 圓的切線

1. (1) 過圓上一點 $P(x_0, y_0)$ 的切線方程式（ P 為切點）

圓方程式	切線方程式
$x^2 + y^2 = r^2$	$x_0x + y_0y = r^2$
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	$(x_0-h)(x-h) + (y_0-k)(y-k) = r^2$
$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$	$x_0x + y_0y + d(\frac{x_0+x}{2}) + e(\frac{y_0+y}{2}) + f = 0$

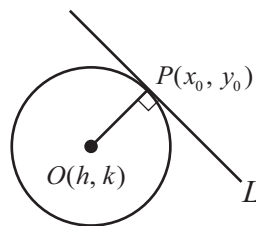
(2) 已知圓心 $O(h, k)$ ，求通過圓上一點 $P(x_0, y_0)$ 的切線方程式 L 。

Step1：先求 $m_{\overline{OP}} = \frac{y_0 - k}{x_0 - h}$ 。

Step2： $\because \overline{OP} \perp L \quad \therefore m_{\overline{OP}} \times m_L = -1 \Rightarrow$ 可求出 m_L 。

Step3：利用點斜式。通過 $P(x_0, y_0)$ ，斜率 m_L ，

$$L: y - y_0 = m_L(x - x_0)。$$



2. 過圓外一點 $P(x_0, y_0)$ 的切線方程式 (P 不為切點)

Step1: 利用點斜式: 通過 $P(x_0, y_0)$, 斜率為 m

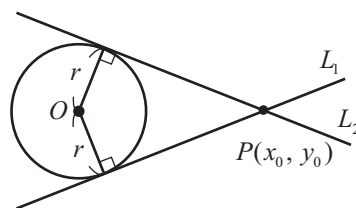
則切線 $L: y - y_0 = m(x - x_0)$ 。

Step2: 利用圓心到切線的距離等於半徑求 m 。

Step3: (1) m 有兩解, 即二條切線。

(2) m 只有一解, 則有一條切線斜率不存在, 此切線為過 $P(x_0, y_0)$ 之鉛垂線

$\Rightarrow x = x_0$ 。



難易度 🐾

06

老師講解

過圓上一點求切線

學生演練



試求通過圓 $x^2 + y^2 = 13$ 上一點 $P(3, -2)$ 的切線方程式。

試求通過圓 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 上一點 $P(-1, 3)$ 的切線方程式。

難易度 🐾

07

老師講解

過圓上一點求切線

學生演練



試求通過圓 $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$ 上一點 $P(2, 1)$ 的切線方程式。

試求通過圓 $x^2 + y^2 - 4x + y - 3 = 0$ 上一點 $P(3, 2)$ 的切線方程式。

難易度 🐾



08

老師講解

過圓外一點求切線

學生演練

試求過點 $P(0, 2)$ 與圓 $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 25$ 相切的直線方程式。

試求過點 $P(0, 1)$ 與圓 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 相切的直線方程式。

難易度 🐾🐾🐾



09

老師講解

已知切線斜率求切線方程式

學生演練

試求斜率為 -3 且與圓 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 10$ 相切的直線方程式。

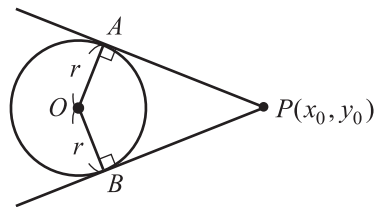
設有一直線 L 與 $2x - y + 10 = 0$ 平行且與圓 $x^2 + y^2 = 5$ 相切，試求此切線方程式。



重點 切線段長

- 過圓外一點 $P(x_0, y_0)$ 的切線與圓相交於 A 、 B 兩切點，則 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 稱為切線段長。
-

圓方程式	切線段長
$x^2 + y^2 = r^2$	$\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - r^2}$
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	$\sqrt{(x_0-h)^2 + (y_0-k)^2 - r^2}$
$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$	$\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f}$



難易度

10 老師講解

切線段長

學生演練

設圓 $C: 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ ，試求點 $P(3, 4)$ 到圓 C 的切線段長。

試求點 $P(3, 3)$ 到圓 $C: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$ 的切線段長。



自我挑戰



- 已知圓 $C: x^2 + y^2 - 4y + k = 0$ 與直線 $L: x - y + 4 = 0$ ：
 - 圓與直線相交於兩點，求 k 的範圍：_____。
 - 圓與直線相切，求 k 的值：_____。
 - 圓與直線不相交，求 k 的範圍：_____。
- $x^2 + y^2 + ax + by + 3 = 0$ 與直線 $L: 3x - y = c$ 相切於 $(1, 2)$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 設直線 $y = mx$ 與圓： $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 交於 A 、 B 兩點，若 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ ，求 m 之值為_____。
- 已知圓 $C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$ ，
 - 求通過圓上一點 $P(3, 0)$ 的切線方程式為_____。
 - 求通過圓外一點 $Q(0, 2)$ 的切線方程式為_____與_____。
- 若點 $A(3, 4)$ 到圓 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$ 之切線段長度為 $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



歷屆試題



- () 1. 在坐標平面上，已知直線 $L_1: x+y+115=0$ ，直線 L_2 與直線 L_1 互相平行且與直線 L_3 互相垂直。若直線 L_3 過點 $(113, 114)$ ，則直線 L_3 的 x 截距為何？

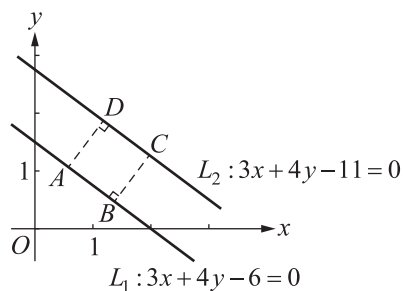
(A) -113 (B) -1 (C) 1 (D) 113。

【113(B)，答對率 36%】

- () 2. 已知 A 跟 B 兩點落在直線 $L_1: 3x+4y-6=0$ 上， C 跟 D 兩點落在直線 $L_2: 3x+4y-11=0$ 上，如圖所示。若四邊形 $ABCD$ 為正方形，則其邊長為多少？

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5。

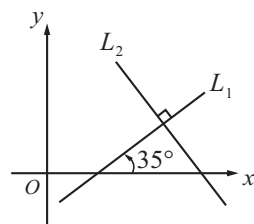
【113(B)，答對率 45%】



- () 3. 設直線 L_1 的斜角為 35° ，已知直線 L_2 與 L_1 相互垂直，如圖所示，則 L_2 的斜角為何？

(A) 35° (B) 55° (C) 125° (D) 155° 。

【113(C)，答對率 43%】



- () 4. 設已知直線 $L: y=x-5$ 與圓 C 相切，且圓 C 的圓心為 $(3, -4)$ ，則圓 C 的半徑為何？

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ 。

【113(C)，答對率 46%】

- () 5. 若坐標平面上四點 $A(1, 2)$ 、 $B(2, -3)$ 、 $C(2, 7)$ 、 $D(a, -10)$ 在同一圓上，則 $a = ?$

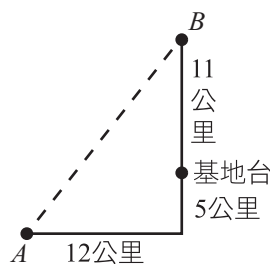
(A) 19 或 9 (B) 20 或 8 (C) 24 或 6 (D) 27 或 3。

【112(C)，答對率 25%】

- () 6. 在某偏遠地區僅設有一處基地台，其通訊服務範圍為距離該基地台不超過 9 公里的地方，超出此範圍手機便無訊號。志惠知道該基地台位於其所在位置 A 往東行 12 公里後再往北行 5 公里處，且由該基地台再往北 11 公里處有一秘境 B ，如圖所示。若志惠由 A 沿直線小路前行至 B ，則沿路上手機接收訊號的情形為何？

- (A) 僅有一段路程會在該基地台的通訊服務範圍，此路段外則非屬通訊服務範圍
(B) 沿路上僅有一個特定點位於該基地台的通訊服務範圍
(C) 沿路皆不在該基地台的通訊服務範圍
(D) 沿路皆在該基地台的通訊服務範圍

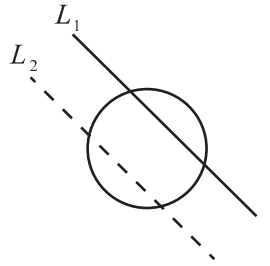
【111(A)，答對率 48%】



- () 7. 若 $A(1, 4)$ 、 $B(6, 2)$ 所連接的線段 $\overline{AB}$ 與直線 $L: x-y+1=0$ 相交於 P 點，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = ?$

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$ 。

【111(C)，答對率 34%】



- () 8. 已知圓 $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ 與相異兩直線 $L_1: x + y + 1 = 0$ 及 $L_2: ax + by + 10 = 0$ 分別交於兩點，且 $L_1 \parallel L_2$ ，如圖所示。若此圓圓心到兩直線 L_1 、 L_2 的距離相等，則 $a + b = ?$
 (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10。 【111(C)，答對率 31%】
- () 9. 若直線 $L_1: y = mx + b$ 與直線 $L: 2x + 3y = 1$ 平行，且直線 L_1 與 x 軸的交點之 x 坐標為 2，則下列何者正確？
 (A) $m + b = \frac{2}{3}$ (B) $m + b = 6$ (C) $m \times b = \frac{2}{3}$ (D) $m \times b = 9$ 。 【110(B)，答對率 38%】
- () 10. 若圓 $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ 、圓 $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$ ，則直線 $L: x - y - 4 = 0$ 與兩圓 C_1 、 C_2 共有幾個交點？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 【110(B)，答對率 29%】
- () 11. 若圓 C 與 y 軸相切，且圓心為拋物線 $y = x^2 + 4x + 5$ 之頂點，則下列何者為圓 C 的方程式？
 (A) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
 (C) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 。 【110(C)，答對率 34%】
- () 12. 若 k 為實數，且二元一次聯立方程組 $\begin{cases} kx + 3y + k + 1 = 0 \\ x + 4(k+1)y + 8k^2 + 1 = 0 \end{cases}$ 有無限多組解，則 k 可為下列何值？
 (A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ 。 【110(C)，答對率 48%】
- () 13. 已知 a 、 b 為實數，若直線 $L_1: y = ax + b$ 與 $L_2: y = bx + a$ 相互垂直，且 $a^2 + b^2 = 50$ ，則 L_1 與 L_2 的交點與原點的距離為多少？
 (A) $4\sqrt{3}$ (B) 7 (C) $5\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{13}$ 。 【110(C)，答對率 25%】
- () 14. 若 A 、 B 兩點分別是拋物線 $y = x^2$ 與直線 $x = -3$ 、 $x = 1$ 的交點，則直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與下列哪一條直線平行？
 (A) $y = -2x$ (B) $y = -\frac{1}{2}x$ (C) $y = \frac{1}{2}x$ (D) $y = 2x$ 。 【109(B)，答對率 36%】
- () 15. 已知圓 $C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 。若點 P 是圓 C 上一點，則 P 到直線 $L: 3x + 4y + 8 = 0$ 的最短距離為何？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 【109(B)，答對率 35%】
- () 16. 若 k 為實數，且點 $P(1, k)$ 為曲線 $kx^2 + y^2 + 2x - 4y + k - 1 = 0$ 上之一點，求曲線之圖形為何？
 (A) 圓 (B) 拋物線 (C) 橢圓 (D) 雙曲線。 【109(C)，答對率 29%】

- () 17. 已知直線 L 之斜率為 2， x 截距為 3。試問 L 與兩坐標軸所包圍三角形之面積為何？
 (A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) 6 (D) 9。 【108(B)，答對率 29%】
- () 18. 已知一圓方程式 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ 。若直線 $y = b$ 與該圓有交點，則下列敘述何者正確？
 (A) $b \geq 5$ (B) $b \leq -4$ (C) $-1 \leq b \leq 1$ (D) $2 \leq b \leq 4$ 。 【108(B)，答對率 39%】
- () 19. 已知坐標平面上三直線 $L_1: 3x + 3y = 2$ 、 $L_2: 2x - 3y = 3$ 、 $L_3: x - ay = -2$ ，且這三直線將平面分成六個區域，則 a 不可以是下列哪一個值？
 (A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) -1 (D) -9。 【108(C)，答對率 24%】
- () 20. 已知坐標平面上三直線 L 、 L_1 與 L_2 ，若直線 L 為水平線， L_1 與 L_2 的斜率分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{3}{2}$ ，且直線 L 被 L_1 與 L_2 所截出的線段長為 26，則此三直線所圍成的三角形面積為多少平方單位？
 (A) 39 (B) 52 (C) 78 (D) 156。 【108(C)，答對率 25%】
- () 21. 若 $x^2 + y^2 + kx + 2y + k + 1 = 0$ 表示一圓，則 k 的範圍為何？
 (A) $2 < k < 4$ (B) $0 < k < 3$ (C) $k < 2$ 或 $k > 3$ (D) $k < 0$ 或 $k > 4$ 。 【107(B)，答對率 34%】
- () 22. 已知直線 L_1 通過 (2,3)、(1,5) 兩點，且直線 L_2 的 x 截距是 1、 y 截距是 4。若 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1 與 m_2 ，則下列何者正確？
 (A) $0 < m_1 < m_2$ (B) $m_1 < 0 < m_2$ (C) $m_2 < 0 < m_1$ (D) $m_2 < m_1 < 0$ 。 【107(C)，答對率 36%】
- () 23. 設點 O_1 為圓 $C: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ 之圓心，今以另一點 O_2 為圓心、 $\overline{O_1O_2}$ 為半徑作一圓，且此圓與圓 C 交於 A 、 B 兩點。若 $\overline{AO_2} = 3$ ，則 $\overline{AB} = ?$
 (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ 。 【107(C)，答對率 21%】
- () 24. 設 $P(x, y)$ 為圓 $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ 上的動點，若 $4x + 3y + 5$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m = ?$
 (A) -5 (B) 0 (C) 5 (D) 10。 【107(C)，答對率 32%】
- () 25. 設打水漂遊戲中石頭落入水中的漣漪是以圓的形式展現。若某人向河面擲出石頭的方向是沿著直線 $y = x - 1$ 行進，下列哪一個圓方程式可為此漣漪的形式？
 (A) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$ (B) $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$
 (C) $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$ (D) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ 。 【106(C)，答對率 36%】