單元 04

# 式的運算

## 4-1 多項式的四則運算

### 重點 多項式的基本概念

1. **多項式的定義**：設 $n$ 為正整數或 0，且 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 為已知常數，則形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的式子稱為 $x$ 的多項式，通常以 $f(x)$ 或 $g(x)$ 來表示。
   (1) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，當 $a_n\neq 0$ 時，$n$ 為多項式 $f(x)$ 之最高次數，稱 $f(x)$ 為 $n$ 次多項式，記為 $\deg f(x)=n$。
   (2) 同上 $f(x)$ 中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 稱為係數，$a_k$ 為 $x^k$ 項係數，$a_0$ 為常數項，當 $a_n\neq 0$ 時，稱 $a_n$ 為領導係數（最高次之係數）。
   (3) $f(x)$ 之各係數為整數則稱 $f(x)$ 為整係數多項式。若各係數為有理數或實數，稱 $f(x)$ 為有理係數或實係數多項式。

   NOTE 多項式之未知數 $x$ 不可在分母、根號（$\sqrt{\quad}$）或絕對值（$|\quad|$）中出現。

2. **常數多項式**：$f(x)=a_0$ 時稱 $f(x)$ 為常數多項式 $\Rightarrow\begin{cases}a_0\neq 0\Leftrightarrow f(x)\text{ 為零次多項式}\\ a_0=0\Leftrightarrow f(x)\text{ 為零多項式}\end{cases}$。
3. **多項式相等**：兩多項式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之次數相同，且各項對應係數均相同時，稱此兩多項式相等，記為 $f(x)=g(x)$。
4. **多項式的係數和**：多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，則
   (1) 各項係數和 $=f(1)$。
   (2) 常數項 $=f(0)$。
   (3) 奇次項係數和 $=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$。
   (4) 偶次項係數和 $=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$。

難易度

01　老師講解　**多項式相等**　學生演練

設 $f(x)=(a-1)x^2+3x+c-1$，
$g(x)=2x^2+(b+1)x+4$，若 $f(x)=g(x)$，
試求 $a$、$b$、$c$。

設 $f(x)=(a+1)x^2+(b-2)x+(c+3)$ 為零多項式，試求 $a$、$b$、$c$。

難易度

02　老師講解　**多項式係數和**　學生演練

設 $f(x)=(x^2+x-1)^{99}$，試求：
(1) 各項係數和　(2) 常數項
(3) 奇次項係數和。

設 $f(x)=(x^3-x^2+1)^{33}+2$，試求：
(1) 各項係數和　(2) 常數項
(3) 偶次項係數和。

## 重點　多項式四則運算

1. **多項式的加法與減法：** 多項式相加（減）$\Rightarrow$ 同類（次）項合併。
2. **多項式的乘法：**
   (1) 多項式相乘 $\Rightarrow$ 依分配律展開，各單項相乘時係數相乘，次數相加，再合併同類（次）項。
   (2) 若 $\deg f(x)=m$，$\deg g(x)=n$，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆不為 0，則：
   ① $\deg[f(x)\pm g(x)]=\begin{cases} m，當 m>n \\ \le m，當 m=n \\ n，當 m<n \end{cases}$。　② $\deg[f(x)\cdot g(x)]=m+n$。

   **NOTE** 當 $f(x)=g(x)$ 時，$\deg\left[f(x)-g(x)\right]=0$

   (3) 多項式乘法公式：
   ① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。
   ② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。
   ③ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。
   ④ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$。
   ⑤ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$。
   ⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。
   ⑦ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。
3. **多項式的除法：**
   (1) 除法原理：
   $f(x)\div g(x)$（$g(x)\neq 0$）可得唯一的商式 $q(x)$ 及餘式 $r(x)$，其中 $\deg r(x)<\deg g(x)$ 或 $r(x)=0$（整除）$\Rightarrow f(x)=g(x)\times q(x)+r(x)$

   **NOTE** 被除式 = 除式 × 商式 + 餘式。

   (2) 長除法：以實例說明其計算過程如下：
   **例如** 試求 $2x^3-4x-5$ 除以 $x+2$ 之商式和餘式。

$$
\begin{array}{rllll}
 & 2x^2 & -4x & +4 & \\ \cline{2-5}
x+2\,\big) & 2x^3 & +0 & -4x & -5 \\
 & 2x^3 & +4x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & -4x^2 & -4x & -5 \\
 & & -4x^2 & -8x & \\ \cline{3-5}
 & & & 4x & -5 \\
 & & & 4x & +8 \\ \cline{4-5}
 & & & & \boxed{-13}
\end{array}
$$

step1: $2x^3\div x=2x^2$
step4: $-4x^2\div x=-4x$
step7: $4x\div x=4$
step2: $2x^2\cdot(x+2)=2x^3+4x^2$
step3: $2x^3-4x-5-(2x^3+4x^2)=-4x^2-4x-5$
step5: $-4x\cdot(x+2)=-4x^2-8x$
step6: $-4x^2-4x-5-(-4x^2-8x)=4x-5$
step8: $4(x+2)=4x+8$
step9: $4x-5-(4x+8)=-13$

得商式為 $\boxed{2x^2-4x+4}$，餘式為 $\boxed{-13}$。

**NOTE** 運算時亦可採用分離係數法，但切記各項位置要對齊，且缺項要補 0。

難易度

**03　老師講解　多項式乘法　學生演練**

試求 $(2x^3-3x^2+x-1)\cdot(x^3+2x^2-x+2)$ 展開後 $x^4$ 項之係數。

試求 $(x^3-2x^2+3x+1)\cdot(2x^3+x^2-2x-2)$ 展開後 $x^4$ 項之係數。

難易度

**04　老師講解　長除法　學生演練**

已知 $x^3-2x^2+ax+b$ 除以 $x^2+x-1$ 餘式為 $2x+3$，試求：

(1) $a$、$b$　(2) 商式。

已知 $x^4-3x^3+ax+b$ 除以 $x^2-1$ 餘式為 $x-3$，試求：

(1) $a$、$b$　(2) 商式。

難易度

**05** 老師講解　**除法原理應用**　學生演練

已知 $x=\sqrt{2}+1$，試求 $x^3+2x^2-x+1$。

已知 $f(x)=x^3-3x^2+2x+3$，試求 $f(1-\sqrt{3})$ 之值。

## 重點　綜合除法及其應用

1. **綜合除法**：針對除式為一次式時，這是比長除法更為簡便的計算方式，將被除式按降冪排列後，只取其係數，並於缺項補 0，以實例說明其計算過程如下：

(1) **例如** 試求 $x^4-2x^2+3x+1$ 除以 $x-2$ 之商式和餘式

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1+ & 0- & 2+ & 3+ & 1 & 2 \\ & 2+ & 4+ & 4+ & 14 & \\ \hline \boxed{1+} & \boxed{2+} & \boxed{2+} & \boxed{7} & +\boxed{15} & \end{array}$$

step1: 令 $x-2=0 \Rightarrow x=2$

step6: $7\times 2+1=15$

step5: $2\times 2+3=7$

step4: $2\times 2+(-2)=2$

step3: $1\times 2+0=2$

step2: 領導係數照抄

得商式為 $\boxed{x^3+2x^2+2x+7}$，餘式為 $\boxed{15}$。

(2) $f(x)\div(ax-b)$ 之商式為 $f(x)\div(x-\frac{b}{a})$ 之商式的 $\frac{1}{a}$ 倍，餘式則相同。

NOTE

$$f(x)=(x-\frac{b}{a})\cdot\overbrace{Q(x)}^{f(x)\div(x-\frac{b}{a})\text{之商}}+r=(ax-b)\cdot\underbrace{\frac{Q(x)}{a}}_{f(x)\div(ax-b)\text{之商}}+r$$ 。

難易度 🐾

## 06　老師講解　綜合除法　學生演練

試以綜合除法求下列各小題之商式和餘式：

(1) $(2x^2+3x-1)\div(x-1)$

(2) $(2x^3-3x^2+5x-4)\div(2x-1)$

試以綜合除法求下列各小題之商式和餘式：

(1) $(2x^3-x+3)\div(x+2)$

(2) $(-9x^3+x+1)\div(3x+2)$

難易度 🐾🐾

## 07　老師講解　綜合除法應用　學生演練

設 $f(x)=2x^3-3x^2+1$

$=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$

(1) 試求 $a$、$b$、$c$、$d$。

(2) 試求 $f(2.01)$ 之近似值。(四捨五入至小數點後第二位)

設 $f(x)=x^3+2x-3$

$=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

(1) 試求 $a$、$b$、$c$、$d$。

(2) 試求 $f(-0.99)$ 之近似值。(四捨五入至小數點後第二位)

單元4

## 自我挑戰

1. 設 $f(x)=(a-4)x^4+(a+b-2)x^3+(a-2b)x^2+3x+1$，若 $\deg f(x)=2$，則 $f(x)$ 的領導係數為 ______。

2. 多項式 $f(x)=ax^2+bx+c-5x^2-3x-2$ 與 $g(x)=3x^2-5x-4$ 相等，則 $a+b+c$ 之值為 ______。

3. 求 $(3x^5-4x^3+2x^2+1)(4x^2-3x+2)$ 展開式中 $x^5$ 的係數為 ______。

4. 若 $x^2+x+1$ 除 $2x^3+x^2+ax+b$ 的餘式為 $-3x+4$，則 $a+b=$ ______。

5. 已知 $f(x)=x^4+4x^3+4x^2+4x+3$，則 $f(\sqrt{2}-1)=$ ______。

6. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，若 $f(x)$ 除以 $x^2+1$ 得商式為 $x+1$，餘式為 $2x+1$，求 $a+b+c+d=$ ______。

# 4-2 餘式與因式定理

## 重點　餘式定理及其應用

1. **餘式定理：**

(1) $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得之餘式為 $f(a)$。

**NOTE** 設 $f(x)\div(x-a)=q(x)\cdots r \Rightarrow f(x)=(x-a)\times q(x)+r$

以 $x=a$ 代入 $f(x) \Rightarrow f(a)=0+r=r$。

(2) 適用於除式為一次時，欲求其除 $f(x)$ 之餘式，可令除式 $=0$ 所得之 $x$ 代入 $f(x)$，得到的函數值即為餘式。

**例如** $f(x)\div(ax+b)$ 的餘式為 $f(-\frac{b}{a})$。

2. **餘式定理、綜合除法與函數值關係：**

由餘式定理知 $f(x)$ 除以 $x-a$ 之餘式為 $f(a)$，而餘式也可由綜合除法求得，所以綜合除法也可用來求函數值 $f(a)$。

**NOTE** $f(x)=2x^2+x-1 \Rightarrow f(1)=2$。

$$
\begin{array}{rrr|l}
2 & +1 & -1 & 1 \\
\downarrow & 2 & +3 & \\
\hline
2 & +3 & +2 & \leftarrow f(1)
\end{array}
$$

難易度

## 01　老師講解　餘式定理　學生演練

設 $f(x)=x^{101}+2x^{3}-3x^{2}+1$，試求 $f(x)$ 除以 $(x+1)$ 之餘式。

設 $f(x)=2x^{35}-3x^{4}+4x-1$，試求 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 之餘式。

難易度

## 02　老師講解　餘式定理與綜合除法　學生演練

設 $f(x)=x^{4}-11x^{3}-24x^{2}-25x+15$，試求 $f(13)$ 之值。

設 $f(x)=x^{5}-4x^{4}-72x^{3}-56x^{2}+15x+7$，試求 $f(x)$ 除以 $(x-11)$ 之餘式。

單元4

難易度

**03　老師講解　餘式定理與除法原理　學生演練**

已知 $f(x)$ 除以 $x-1$ 餘 4，除以 $x+1$ 餘 2，試求 $f(x)\div(x-1)(x+1)$ 之餘式。

已知 $f(x)$ 除以 $x+1$ 餘 $-1$，除以 $x-2$ 餘 2，試求 $f(x)\div(x^2-x-2)$ 之餘式。

## 重點　因式定理及其應用

1. **因式與倍式：** 若 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$（其中 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 均為非零多項式），則稱 $g(x)$ 和 $h(x)$ 為 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 為 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的倍式。記為 $g(x)\mid f(x)$、$h(x)\mid f(x)$。
2. **因式定理：** $ax-b$ 為 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=0$。（其中 $a\neq 0$）

NOTE　由餘式定理知 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 之餘式為 $f(\frac{b}{a})$，$ax-b$ 為 $f(x)$ 因式即表示整除，故其餘式 $f(\frac{b}{a})=0$，反之亦然。

單元 4

難易度

**04　老師講解　因式定理　學生演練**

設 $x^2-x-2$ 為 $f(x)=x^3-ax^2+2x+b$ 之一因式，試求 $a$、$b$ 之值。

設 $x^2-1$ 為 $f(x)=ax^3-3x^2+x-b$ 之一因式，試求 $a$、$b$ 之值。

難易度

05 老師講解 **餘式、因式定理的應用** 學生演練

若 $\deg f(x)=3$ 且 $f(1)=f(2)=f(-1)=0$，$f(-2)=12$，試求 $f(3)$ 之值。

若 $\deg f(x)=3$ 且 $f(1)=f(-1)=f(-2)=3$，$f(0)=-1$，試求 $f(2)$ 之值。



## 重點 因式分解

1. **因式分解：**將一多項式分解成多個因式的乘積，稱為因式分解，除了常用的提公因式法、十字交乘法之外，還有一些常用的因式分解公式可供使用（見 4-1 多項式四則運算法之乘法公式）。乘法公式的反向就是因式分解公式。
   例如：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。
2. **整係數一次因式檢驗法：**
   設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 為整係數多項式，$a$、$b$ 為互質整數，若 $ax-b$ 為 $f(x)$ 之因式，則 $a\mid a_n$、$b\mid a_0$。

難易度

06 老師講解　**一次因式檢驗法**　學生演練

試因式分解 $f(x)=2x^3-3x^2-11x+6$。

試因式分解 $f(x)=3x^3+4x^2-5x-2$。

## 重點　最高公因式與最低公倍式

1. **公因式**：多項式 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 滿足 $h(x)\,|\,f(x)$ 且 $h(x)\,|\,g(x)$，則稱 $h(x)$ 為 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式，所有公因式中次數最高的稱為最高公因式（H.C.F.）。
2. **公倍式**：多項式 $f(x)$、$g(x)$、$m(x)$ 滿足 $f(x)\,|\,m(x)$ 且 $g(x)\,|\,m(x)$，則稱 $m(x)$ 為 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公倍式，所有公倍式中次數最低的稱為最低公倍式（L.C.M.）。
3. **互質**：若多項式 $f(x)$、$g(x)$ 之最高公因式為常數，則稱 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互質。
4. H.C.F.和 L.C.M.**性質**：
   (1) $f(x)\cdot g(x)=k(\text{H.C.F}\times\text{L.C.M})$，其中 $k$ 為非 0 實數。
   (2) 若 $h(x)\,|\,f(x)$ 且 $h(x)\,|\,g(x)$，則 $h(x)\,|\,[m(x)\cdot f(x)\pm n(x)\cdot g(x)]$。

難易度

07 老師講解　**求 H.C.F.及 L.C.M**　學生演練

已知 $f(x)=(x-1)^2(x+2)(x-3)$，
$g(x)=(x-1)^3(x+2)^2(x+3)$，
試求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之 H.C.F.及 L.C.M.。

已知 $f(x)=(2x-1)(x-2)^2(x+1)^2$，
$g(x)=(x+1)(x-2)^3(3x+1)$，
試求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之 H.C.F.及 L.C.M.。

## 自我挑戰

1. 已知 $a$、$b$ 為整數，且 $f(x)=3x^3-ax^2+bx+2$，則下列何者不可能為 $f(x)$ 之因式：______
   (A) $x+1$　(B) $3x-2$　(C) $x-2$　(D) $x-3$。

2. 設 $f(x)=11x^4-80x^3+13x^2+60x-30$，則 $f(7)=$ ______。

3. 多項式 $f(x)$ 以 $x-1$ 除之餘 1，以 $x+2$ 除之餘 $-5$，則以 $(x-1)(x+2)$ 除之餘式為 ______。

4. 多項式 $f(x)$ 除以 $x^2-3x+2$ 之餘式為 $10x-6$、除以 $x^2-5x+6$ 之餘式為 $8x-10$，則 $f(x)$ 除以 $x^2-4x+3$ 之餘式為 ______。

5. 設多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 除以 $x-2$ 所得的餘式分別為 1 與 $-1$，則 $f(x)-2g(x)$ 除以 $x-2$ 所得的餘式為 ______。

6. 設 $x+1$、$x-2$ 均為 $f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ 的因式，則 $a+b=$ ______。

7. 設多項式 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $f(-2)=f(-3)=0$，且 $f(-4)=6$，則 $a-b+c=$ ______。

8. 已知 $x+1$ 為 $f(x)=x^3+6x^2+kx+6$ 之因式，試因式分解 $f(x)=$ ______。

9. 已知 $f(x)$ 除以 $x^2+x-2$ 之餘式為 $2x+1$，$g(x)$ 除以 $x^2-3x+2$ 之餘式為 $x+5$，試求 $(x^2+1)f(x)+(3x+1)g(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式為 ______。

單元 4

# 4-3 多項式方程式

## 重點　複數

1. **虛數：**

(1) 虛數單位（$i$）：$i=\sqrt{-1}$ 稱為虛數單位，$i^2=-1$。任何形如 $\sqrt{x}$（$x<0$）的數均需表示成虛數方可執行運算。例：$\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$。

**NOTE** 設 $a$、$b$ 為實數，則 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 會隨 $a$、$b$ 之正負而有不同結果，例如：當 $a<0$ 時，$\sqrt{a}$ 需視為 $\sqrt{-a}i$。

① $a>0$，$b>0 \Rightarrow \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。

② $a>0$，$b<0 \Rightarrow \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{-ab}i$。

③ $a<0$，$b>0 \Rightarrow \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{-ab}i$。

④ $a<0$，$b<0 \Rightarrow \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$。

(2) $i$ 的週期性：

① $i$ 的次數四次一循環。（圖一）

**例如** $i^{15}=i^3=-i$，$i^{22}=i^2=-1$，…

② $i$ 的連續四項冪次其和為 0。（圖一）

**例如** $i+i^2+i^3+i^4=0=i^2+i^3+i^4+i^5=\cdots$。

**NOTE** 虛數無法比較大小。

$$
\begin{aligned}
&i=\sqrt{-1}\\
&i^2=-1\\
&i^3=i^2\cdot i=-i\\
&i^4=i^3\cdot i=-i^2=1\\
&i^5=i^4\cdot i=i\\
&i^6=i^5\cdot i=i^2=-1\\
&i^7=i^6\cdot i=-1\cdot i=-i\\
&i^8=i^7\cdot i=-i^2=1\\
&\ \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}
$$

圖（一）

2. **複數：**

(1) 複數的定義：

設 $a$、$b$ 為實數，則形如 $z=a+bi$ 的數，即稱為複數。其中 $a$ 稱為複數 $z$ 的實部，記為 $\mathrm{Re}(z)$，$b$ 稱為複數 $z$ 的虛部，記為 $\mathrm{Im}(z)$，$z=a+bi$ 稱為複數 $z$ 的標準式。

(2) $z=a+bi$，則 $\begin{cases}\text{當 } a=0\text{，}b\neq 0 \text{ 時，} z \text{ 為純虛數。}\\ \text{當 } b=0 \text{ 時，} z \text{ 為實數。}\end{cases}$

(3) 複數相等：

設 $a$、$b$、$c$、$d$ 為實數且 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，則 $z_1=z_2 \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$。

**NOTE** 若 $a+bi=0 \Rightarrow a=0$，$b=0$

(4) 共軛複數：

複數 $z=a+bi$，則 $z$ 的共軛複數為 $a-bi$，記為 $\overline{z}=a-bi$，

**NOTE** $\overline{3+2i}=3-2i$，$\overline{4-3i}=4+3i$。

難易度

## 01 老師講解　虛數乘除運算　學生演練

試化簡下列各式：

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}\times\sqrt{\frac{-27}{8}}$　(2) $i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{192}$ 。

試化簡下列各式：

(1) $(\sqrt{-2})^2\times\sqrt{-9}$　(2) $i^{55}-i^{66}+i^{77}-i^{88}$ 。

難易度

## 02 老師講解　複數相等　學生演練

設 $a$ 、 $b$ 為實數， $z=(a+b)+(1+b)i$

且 $z=2-a(1+3i)$ ，試求：

(1) $a$ 、 $b$ 之值　(2) $z$ 之實部和虛部

(3) $\overline{z}$ 。

設 $a$ 、 $b$ 為實數， $z_1=a+1-2i$ ， $z_2=3+bi$

且 $z_1=z_2$ ，試求：

(1) $a$ 、 $b$ 值　(2) $\mathrm{Re}(z_1)$ 及 $\mathrm{Im}(z_2)$

(3) $\overline{z_2}$ 。

單元4

## 重點　複數的運算

1. **複數的四則運算：**

設 $a$、$b$、$c$、$d$ 為實數，且 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，則

(1) $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$。

(2) $z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$。

(3) $z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$。

(4) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$（$z_2\neq 0$）。

NOTE 以上運算仍適用分配律、交換律、結合律，但遇 $i^2$ 記得改為 $-1$。

2. **共軛複數運算性質：**

設 $z$、$z_1$、$z_2$ 為任意複數，則

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$　　(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$（$z_2\neq 0$）　　(4) $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

(5) $\overline{\overline{z}}=z$　　(6) $z=\overline{z}\Leftrightarrow z$ 為實數

3. **特殊運算性質：**

(1) $(1\pm i)^2=1\pm 2i+i^2=\pm 2i$　　(2) $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{1+1}=i$。

(3) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{1+1}=-i$。

NOTE $(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$（由平方差公式 $\Rightarrow (a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2$，但 $i^2=-1$）



難易度

**03　老師講解　複數四則運算　學生演練**

設 $z_1=2+3i$，$z_2=3-4i$，試求下列各值：

(1) $2z_1+3z_2$　(2) $\dfrac{z_1}{z_2}$。

設 $z_1=3-2i$，$z_2=4+3i$，試求下列各值：

(1) $3z_1-2z_2$　(2) $z_1\cdot z_2$。

難易度

**04**　老師講解　**複數四則運算**　學生演練

試化簡 $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{10}$ 。

試化簡 $(1-i)^{20}+(1+i)^{20}$ 。

## 重點　一元二次方程根的性質

1. **一元二次方程式的根：**

設 $a$、$b$、$c$ 為實數且 $a\neq 0$，一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根的判別式為 $D=b^2-4ac$，

則：$\begin{cases}\text{當}D>0\text{時，方程式有兩相異實根。}\\\text{當}D=0\text{時，方程式有兩相等實根。}\\\text{當}D<0\text{時，方程式有兩共軛虛根。}\end{cases}$

解一元二次方程式時，若 $D$ 為完全平方數（$1,4,9,16,\cdots$），此時使用十字交乘法求解較為方便。若 $D$ 不為完全平方數時，則使用公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 求解。

2. **一元二次方程式之根與係數關係：**

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）之兩根為 $\alpha$、$\beta$，則 $\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}\\\alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$ 。

難易度

**05**　老師講解　**一元二次方程式求根**　學生演練

試解下列方程式：

(1) $2x^2+3x-2=0$　(2) $x^2-x+3=0$ 。

試解下列方程式：

(1) $3x^2-x-2=0$　(2) $2x^2+x+4=0$ 。

單元4

難易度

**06** 老師講解 **根的判別式** 學生演練

已知 $a$ 為實數，$x^2-(a-1)x+a+2=0$ 有兩相等實根，試求 $a$ 值。

已知 $k$ 為實數，$x^2+(k+1)x+(k+4)=0$ 有兩共軛虛根，試求 $k$ 之範圍。

難易度

**07** 老師講解 **根與係數關係** 學生演練

設 $2x^2-x-4=0$ 兩根為 $\alpha$、$\beta$，試求：

(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　(3) $\alpha^3+\beta^3$。

設 $x^2+2x+4=0$ 兩根為 $\alpha$、$\beta$，試求：

(1) $\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}$　(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

(3) $\alpha^3+\beta^3$。

## 重點 虛根成對定理與高次方程式

1. **虛根成對定理：**

設 $a$、$b$、$c$、$p$、$q$ 為實數，且 $a\neq 0$、$q\neq 0$，若方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有一根為 $p+qi$，則方程式必有另一根 $p-qi$。

NOTE (1)實係數方程式之虛根必成對（共軛）出現，不限於一元二次方程式，一元 $n$ 次方程式亦適用。

(2)有理係數方程式之無理根亦必成對出現。

2. **一元高次方程式：**

實係數之高次方程式解法，視題型可採用代換法、分組提公因式或一次因式檢驗法，先將方程式分解成一次或二次因式再行求解。

難易度

### 08 老師講解 實係數方程式之虛根成對定理 學生演練

設 $a$、$b$ 為實數，已知 $2x^2+ax+b=0$ 有一根 $3+2i$，試求另一根及 $a$、$b$ 之值。

設 $a$、$b$ 為實數，已知 $x^2+ax+b=0$ 有一根 $2-3i$，試求另一根及 $a$、$b$ 之值。

難易度

### 09 老師講解 非實係數方程式 學生演練

已知方程式 $x^2+(1-i)x+k=0$ 有一根 $2+i$，試求另一根及 $k$ 值。

已知方程式 $x^2-kx+2+i=0$ 有一根 $1-i$，試求另一根及 $k$ 值。

難易度

## 10 老師講解　非實係數方程式　學生演練

設 $k$ 為實數，且方程式 $2x^2+(k-i)x+6+i=0$ 有實根，試求兩根及 $k$ 值。

設 $k$ 為實數，且方程式 $x^2+(k+i)x-2+i=0$ 有實根，試求兩根及 $k$ 值。

## 自我挑戰

1. 試化簡下列各式：

(1) $2i^{11}+3i^{21}+4i^{32}+5i^{42}=$ ________。　(2) $(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{20}=$ ______。

2. 設 $a$、$b$ 為實數且 $-3+(2b-1)i=(a+1)+5i$，則 $a+b$ 之值為 ______。

3. 設 $z_1=3-2i$，$z_2=4+3i$，試求下列各值：

(1) $2z_1+3z_2=$ ________。　(2) $\frac{z_1}{z_2}=$ ________。

4. 試解下列方程式：

(1) $x^2-2x-5=0$，$x=$ ________。　(2) $2x^2+x+1=0$，$x=$ ________。

5. 設 $x^2-2kx+(k+2)=0$，其中 $k$ 為實數，有兩相等實根，則 $k$ 的值為 ________。

6. 若 $2x^2+3x-1=0$ 的兩根為 $\alpha$、$\beta$，則 $\alpha^2+\beta^2$ 之值為 ______。

7. 若 $x^2-3x+4=0$ 的兩根為 $\alpha$、$\beta$，則 $\alpha^3+\beta^3$ 之值為 ______。

8. 實係數方程式 $2x^2+bx+c=0$ 有一根為 $2+i$，則 $b+c$ 之值為 _____。

9. 滿足方程式 $(x^2+x)^2+2(x^2+x)-8=0$ 之解 $x=$ ____________。

素 10. 咚咚高中天文社舉辦迎新活動，原定由參加的學員平均分攤所有費用，每人須付 9000 元，但臨行前有 5 位學員告假無法參加，其餘參加的所有學員每位須多分攤 200 元，試問原定參加迎新活動的學員有 ______ 人。

素 11. 幸福基金上個月的單價是每單位 10 元，這個月是每單位 15 元。老王對這檔基金做每月定期定額投資 3000 元。試問這兩個月老王購買幸福基金的獲利 ______ 元（不計交易手續費）。

12. 試解方程式 $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+8=0$，$x=$ ____________。

13. 已知 $i=\sqrt{-1}$，$a$、$b$、$c$、$p$、$q$ 均為實數，若 $p$、$1+pi$、$q-2i$ 為 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ 之三根，求 $a+b+c$ 之值為 ______。

單元 4

# 4-4 分式與根式的運算

## 重點　分式的運算

1. **分式的定義：**

設 $f(x)$、$g(x)$ 為兩多項式，則形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（其中 $g(x)\neq 0$）的式子稱為分式。

(1) 若 $\deg f(x)<\deg g(x)$，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 稱為真分式，例如：$\dfrac{2}{x+1}$、$\dfrac{x-1}{2x^2+1}$、…。

(2) 若 $\deg f(x)\geq\deg g(x)$，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 稱為假分式，例如：$\dfrac{x^2+1}{2x-1}$、$\dfrac{2x^2}{x^2+1}$、…。

(3) 將假分式化成一個多項式及一個真分式的和，則稱為帶分式，例如：$2x+\dfrac{2}{x-1}$、…。

(4) $f(x)$ 與 $g(x)$ 互質，則稱 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 為最簡分式，例如：$\dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$。

2. **分式的四則運算：**

設 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$、$k(x)$ 均為多項式且 $g(x)$、$k(x)$ 均不為 0。

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\pm\dfrac{h(x)}{k(x)}=\dfrac{f(x)\times k(x)\pm g(x)\times h(x)}{g(x)\times k(x)}$。

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\times\dfrac{h(x)}{k(x)}=\dfrac{f(x)\times h(x)}{g(x)\times k(x)}$。

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\div\dfrac{h(x)}{k(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\times\dfrac{k(x)}{h(x)}=\dfrac{f(x)\times k(x)}{g(x)\times h(x)}$（$h(x)$ 亦不為 0）。

3. **部分分式：**

將一個真分式表成多個真分式的和，這些真分式稱為原分式的部分分式，

**例如** $\dfrac{3x+4}{(x+2)(x+1)}=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x+1}$ 則 $\dfrac{2}{x+2}$、$\dfrac{1}{x+1}$ 稱為 $\dfrac{3x+4}{(x+2)(x+1)}$ 的部分分式。

常見的類型如下：

(1) $\dfrac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$。

(2) $\dfrac{f(x)}{(x-a)(x^2+bx+c)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$。

(3) $\dfrac{f(x)}{(x-a)^n}=\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{A_n}{(x-a)^n}$。

4. **部分分式求算步驟：**

(1) 將原分式化為最簡分式，若為假分式需先化為帶分式（多項式＋真分式）。

(2) 將分母因式分解並依題型做類型假設。

(3) 同乘分母最低公倍式（L.C.M.）以消去分母。

(4) 利用代值法、比較係數法或綜合除法求出常數。

**NOTE** 若題目本身為真分式則步驟(1)可略。

難易度

**01** 老師講解 **分式四則運算** 學生演練

試化簡下列各式：

(1) $\dfrac{-1}{x^2-3x+2}+\dfrac{3}{x^2-x-2}$

(2) $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-9}\times\dfrac{x^2-2x-3}{x+5}\div\dfrac{x^2-1}{x^2+x-6}$。

試化簡下列各式：

(1) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2+x-2}$

(2) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+5x}\div\dfrac{x-3}{x^2+7x+10}\times\dfrac{x^2}{x^2+3x+2}$。

難易度

**02** 老師講解 **部分分式** 學生演練

試將 $\dfrac{5x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)}$ 化為部分分式。

試將 $\dfrac{4x+5}{x^2+x-2}$ 化為部分分式。

單元4

難易度

03 老師講解　**部分分式**　學生演練

設 $\dfrac{5x+3}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，試求 $A$、$B$、$C$。

設 $\dfrac{9x+3}{x^3+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$，試求 $A$、$B$、$C$。

## 重點　$(x\pm\dfrac{1}{x})$ 與乘法公式

1. 已知 $x\pm\dfrac{1}{x}$ 求 $x^n\pm\dfrac{1}{x^n}$ 之值：

由 4-1 乘法公式可推得以下公式（視 $a=x$，$b=\dfrac{1}{x}$）

(1) $(x-\dfrac{1}{x})^2=(x+\dfrac{1}{x})^2-4$（適用於 $x+\dfrac{1}{x}$ 和 $x-\dfrac{1}{x}$ 互求換算）。

(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2=(x-\dfrac{1}{x})^2+2$。

(3) $x^2-\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})(x-\dfrac{1}{x})$。

(4) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})(x^2-1+\dfrac{1}{x^2})=(x+\dfrac{1}{x})^3-3(x+\dfrac{1}{x})$。

(5) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=(x-\dfrac{1}{x})(x^2+1+\dfrac{1}{x^2})=(x-\dfrac{1}{x})^3+3(x-\dfrac{1}{x})$。

★ (6) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=(x^2+\dfrac{1}{x^2})^2-2$。

★ (7) $x^4-\dfrac{1}{x^4}=(x^2+\dfrac{1}{x^2})(x^2-\dfrac{1}{x^2})=(x^2+\dfrac{1}{x^2})(x+\dfrac{1}{x})(x-\dfrac{1}{x})$。

NOTE 以上 $x^n\pm\dfrac{1}{x^n}$ 均可視為 $x^n\pm(\dfrac{1}{x})^n$，再由乘法公式中令 $a=x$，$b=\dfrac{1}{x}$。

難易度

04 老師講解 $(x\pm\frac{1}{x})$ 題型 學生演練

設 $x^2-3x+1=0$ 且 $x>1$，試求下列各式：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ (2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ (3) $x-\dfrac{1}{x}$。

設 $x^2-2x-1=0$，$x>0$，試求下列各式：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ (2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ (3) $x+\dfrac{1}{x}$。

## 重點 根式的運算

1. **根式的定義**

   設 $f(x)$ 為一多項式，$n$ 為整數（$n\geq 2$），則形如 $\sqrt[n]{f(x)}$ 的式子稱為根式，其中 $n$ 稱為根指數，$f(x)$ 稱為被開方式。根指數相同之根式稱為同次根式。根指數與被開方式均相同的根式則稱為同類根式。

2. **根式的四則運算：**

   (1) 同次根式可乘除合併，例如：$\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3\times 2}=\sqrt{6}$，$\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{6}{2}}=\sqrt[3]{3}$。

   (2) 同類根式可乘除及加減合併，例如：$2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$，$2\sqrt[3]{2}\times 3\sqrt[3]{2}=6\sqrt[3]{4}$。

   (3) $\begin{cases} ① (\sqrt{a})^2=a，\sqrt{a^2}=|a| \\ ② (\sqrt[3]{a})^3=\sqrt[3]{a^3}=a \end{cases}$。

3. **有理化因式：**

   若兩根式之乘積為有理式，則此兩根式互稱為有理化因式。由以下乘法公式可得根式的有理化因式：

   (1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，**例如** $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$。

   (2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$，**例如** $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=3-2=1$。

   (3) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$，**例如** $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=3+2=5$。

4. **雙重根式的化簡：**設 $a$、$b$、$x$、$y$ 為正整數，則：

   (1) $\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，其中 $\begin{cases} x+y=a \\ x\times y=b \end{cases}$ (2) $\sqrt{a-2\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$，其中 $\begin{cases} x+y=a \\ x\times y=b \\ x>y \end{cases}$。

單元 4

難易度

05 老師講解 **根式的四則運算** 學生演練

試化簡 $2\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{18}\times\sqrt[3]{24}+\dfrac{\sqrt[3]{270}}{\sqrt[3]{5}}$。

試化簡 $3\sqrt[3]{30}\times\sqrt[3]{36}-2\sqrt[3]{40}+\dfrac{\sqrt[3]{30}}{\sqrt[3]{6}}$。

難易度

06 老師講解 **雙重根式化簡** 學生演練

試化簡下列各式：
(1) $\sqrt{9-2\sqrt{20}}$　(2) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$
(3) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$。

試化簡下列各式：
(1) $\sqrt{6+2\sqrt{8}}$　(2) $\sqrt{10-\sqrt{84}}$
(3) $\sqrt{8-4\sqrt{3}}$。

難易度

07　老師講解　**根式運算**　學生演練

已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，試求：

(1) $x+\dfrac{1}{x}$　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$。

已知 $a=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$，試求：

(1) $a+\dfrac{1}{a}$　(2) $a^2+\dfrac{1}{a^2}$。

單元 4

## 重點　分式方程式與根式方程式

1. **分式方程式：**

(1) 分式方程式的定義：方程式中有分式，且分母含有未知數，稱為分式方程式。

(2) 分式方程式的解法：直接通分或分組通分（去分母），形成一多項式方程式。再將多項式方程之根代回原分式方程式檢驗，需滿足分母不為 0。

**NOTE** **當等號兩邊有公因式時，不可直接進行約分，而是需要進行移項通分。**

2. **根式方程式：**

(1) 根式方程式的定義：方程式中有根式且根號內含有未知數，稱為根式方程式。

(2) 根式方程式的解法：移項後平方（去根號），形成一多項式方程式。再將多項式方程式之根代回原根式方程式檢驗，需滿足平方前的方程式。

**NOTE** **分式通分去分母及根式平方去根號都可能產生增根，所以都需要驗根，以滿足原始方程式及分母不為 0 為原則。**

難易度 🐾🐾

## 08 老師講解　分式方程式　學生演練

試解方程式 $\dfrac{x^2+2x}{2x^2-x-1}-\dfrac{x}{x-1}=1$。

試解方程式 $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}=0$。

難易度 🐾🐾

## 09 老師講解　根式方程式　學生演練

試解方程式 $\sqrt{2x^2+6x+1}-x=2$。

試解方程式 $x-\sqrt{x+5}=1$。

## 自我挑戰

1. 化簡 $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}\div\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x+2}{x^2-4}=$ ______ 。

2. 設 $\dfrac{5x^2+2x-4}{(x-1)(x^2+x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x-1}$ ，其中 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 為實數，則 $A+B+C=$ ______ 。

3. 已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$ ，且 $x>1$ ，則 $x-\dfrac{1}{x}=$ ______ 。

4. 試化簡 $3\sqrt{18}+\sqrt{50}-\dfrac{\sqrt{180}}{\sqrt{10}}+\sqrt{6}\times\sqrt{12}=$ ______ 。

5. 設 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 的整數部分為 $a$ ，小數部分為 $b$ ，則 $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{b}=$ ______ 。

6. 設 $x=\sqrt{10}+3$ ，試求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 之值為 ______ 。

7. 方程式 $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4x+3}{x^2-x-6}$ 的解為 ______ 。

8. 滿足方程式 $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x+8}{x+7}=\dfrac{x+6}{x+5}+\dfrac{x+4}{x+3}$ 之解 $x=$ ______ 。

9. 滿足方程式 $\sqrt{4x+13}+2x-1=0$ 之解 $x=$ ______ 。

10. 設 $\dfrac{x^3-5x^2+6}{(x+1)^4}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{(x+1)^3}+\dfrac{D}{(x+1)^4}$ ，其中 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 為實數，
則 $A-B+C-D=$ ______ 。

單元 4

## 歷屆試題

(　　) 1. 若 $\dfrac{5}{(2x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{x-2}$，其中 $A$、$B$ 為實數，則 $3A+2B=$ ？

(A) $-7$　(B) $-6$　(C) $-5$　(D) $-4$。　【113(C)，答對率 42%】

(　　) 2. 已知方程式 $4x^2-2x-5=0$ 的兩根為 $\alpha$、$\beta$，則 $\alpha\beta=$ ？

(A) $\dfrac{-5}{4}$　(B) $\dfrac{-1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{5}{4}$。　【112(C)，答對率 47%】

(　　) 3. 已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 $a$、$b$ 為實數。若 $a$、$b+2i$、$-1+ai$ 為實係數三次方程式 $f(x)=0$ 之三根，則下列多項式何者可能為 $f(x)$ ？

(A) $x^3-x-10$　(B) $x^3+x+10$　(C) $x^3-4x^2+9x-10$　(D) $x^3+4x^2+9x+10$。

【112(C)，答對率 29%】

(　　) 4. 若 $\dfrac{x^2+2x+7}{(x-2)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$，則 $A+B+C=$ ？

(A) 1　(B) 5　(C) 10　(D) 15。　【111(C)，答對率 39%】

(　　) 5. 若四次多項式 $ax^4+bx^3+6x^2+5x+2$ 除以 $(x+1)^2$ 所得的餘式為 $3x+4$，則 $a+b=$ ？

(A) $-12$　(B) $-6$　(C) $-4$　(D) $-2$。　【111(C)，答對率 35%】

(　　) 6. 已知 $f(x)=x^2+bx+c$ 為二次多項式。若 $f(x)$ 被 $(x+1)^2$ 除的餘式被 $x-1$ 整除，且 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除的餘式被 $x+1$ 整除，則 $c=$ ？

(A) $-3$　(B) $-1$　(C) 1　(D) 3。　【110(B)，答對率 23%】

(　　) 7. 若 $\dfrac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-1}$，其中 $A$、$B$ 為實數，則下列何者正確？

(A) $A=2$　(B) $B=1$　(C) $A=-2$　(D) $B=-1$。　【110(C)，答對率 51%】

(　　) 8. 已知三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $f(1)=f(2)=f(-2)=2$，且 $f(-1)=8$，則下列何者正確？

(A) $a=-1$　(B) $b=1$　(C) $c=-4$　(D) $d=4$。　【110(C)，答對率 48%】

(　　) 9. 已知 $i=\sqrt{-1}$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=a+bi$，則 $a+b=$ ？

(A) $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$　(B) $-1$　(C) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$　(D) 1。　【110(C)，答對率 36%】

(　　) 10. 已知 $\alpha$、$\beta$ 及 $-3$ 為方程式 $x^3-x^2-11x+3=0$ 的三個相異解。求 $|\alpha-\beta|=$ ？

(A) $2\sqrt{3}$　(B) 4　(C) 6　(D) $4\sqrt{5}$。　【109(B)，答對率 43%】

單元 4

(　　) 11. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得餘式為 $3x^2+5x-2$，則 $f(x)$ 除以 $x^2+x+1$ 所得之餘式為何？
(A) $-4$　(B) $2x-5$　(C) $6$　(D) $8x-5$。　【109(C)，答對率 39%】

(　　) 12. 設 $\alpha$、$\beta$ 為方程式 $x^2+5x+k=0$ 之二根，已知多項式 $f(x)=2x^2+7x+5$ 除以 $x-\alpha$ 和 $x-\beta$ 所得的餘式分別為 $-1$、$2$，則 $k=$？
(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7。　【109(C)，答對率 51%】

(　　) 13. 設 $f(x)$ 為三次多項式，已知 $f(-1)=4$ 且 $f(-2)=f(1)=f(3)=0$。試問 $f(x)$ 除以 $x-2$ 之餘式為何？
(A) $-6$　(B) $-2$　(C) 3　(D) 5。　【108(B)，答對率 36%】

(　　) 14. 若方程式 $3x^2-39x+k=0$ 的兩根為連續整數，則 $k=$？
(A) 168　(B) 126　(C) 84　(D) 42。　【108(B)，答對率 46%】

(　　) 15. 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為多項式，若以 $x^2-3x+2$ 除 $f(x)$ 所得餘式為 $3x-4$，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式為 5，則以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 所得餘式為何？
(A) $-4$　(B) $-3$　(C) 3　(D) 4。　【108(C)，答對率 41%】

(　　) 16. 已知 $\dfrac{x^2+5x+6}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，其中 $A$、$B$ 與 $C$ 為實數，則 $A+2B+3C=$？
(A) $-5$　(B) 0　(C) 8　(D) 10。　【108(C)，答對率 45%】

(　　) 17. 若多項式 $2x^3-kx^2+3x+5$ 除以 $x+1$ 的餘式為 1，則 $k$ 值為何？
(A) $-9$　(B) $-1$　(C) 1　(D) 9。　【107(B)，答對率 56%】

(　　) 18. 若 $x^2-2x-1=0$ 的兩根為 $\alpha$、$\beta$，則 $(\alpha-2)(\beta-2)$ 之值為何？
(A) $-3$　(B) $-1$　(C) 1　(D) 5。　【107(B)，答對率 47%】

(　　) 19. 若 $f(x)=x^4-x^3+kx^2-2$ 為整係數多項式，其中 $k>0$ 且 $f(x)$ 有整係數一次因式 $x-h$，則 $k+h=$？
(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0。　【107(C)，答對率 32%】

(　　) 20. 已知 $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，且 $\bar{z}$ 為其共軛複數。若 $\dfrac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$，其中 $a$、$b$ 為實數，則點 $(a,b)$ 在第幾象限？
(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四。　【107(C)，答對率 38%】

單元 4

(　　) 21. 若一元二次方程式 $x^2+(a-5)x+a+3=0$ 有兩正根，滿足 $a$ 的實數解為 $m<a\le n$，則 $m+n=$？
(A) $-4$　(B) $-3$　(C) $-2$　(D) 1。　【107(C)，答對率 33%】

(　　) 22. 已知一元二次方程式 $x^2+x-5=0$ 有兩相異實根 $a$、$b$，若 $a<b$，則 $b-a=$？
(A) 1　(B) $\sqrt{5}$　(C) $2\sqrt{5}$　(D) $\sqrt{21}$。　【106(B)，答對率 34%】

(　　) 23. 已知 $x-1$ 為多項式 $f(x)=x^2+ax+b$ 的因式。若 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 6，則 $3a+2b=$？
(A) $-10$　(B) $-5$　(C) 1　(D) 5。　【106(B)，答對率 49%】

(　　) 24. 已知多項式 $f(x)=2x^2-5x+2$，$g(x)=x^3-x^2+ax+b$。若 $f(x)+g(x)$ 可以被 $x^2+1$ 整除，則 $a+b=$？
(A) $-2$　(B) 0　(C) 3　(D) 5。　【106(B)，答對率 38%】

(　　) 25. 求方程式 $\dfrac{-x^2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}$ 所有解的和為何？
(A) $-3$　(B) $-2$　(C) $-1$　(D) 0。　【106(C)，答對率 31%】