



平面向量



3-1

向量及其基本運算

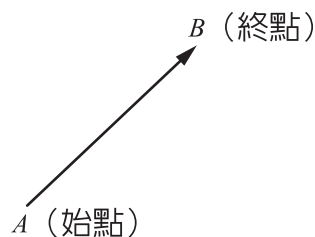


重點

向量的定義

1. 有向線段：

將線段 $\overline{AB}$ 指定 A 為始點到 B 為終點的方向後，稱為從 A 點到 B 點的「有向線段」，記為 $\overrightarrow{AB}$ 。而 $\overrightarrow{AB}$ 的大小 $= |\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$ 。



2. 向量：

若有向線段不看始點與終點，只考慮「方向」和「大小」，即可視為「向量」，故向量可平行移動。常以英文小寫表示，如 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、...等。

(1) 相等向量：兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的「長度」相等，「方向」相同，記為 $\vec{a} = \vec{b}$ 。

(2) 相反向量：兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的「長度」相等，「方向」相反，記為 $\vec{a} = -\vec{b}$ 或 $\vec{b} = -\vec{a}$ 。

(3) 零向量：始點與終點重合的向量。即 $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ ，其大小 $|\overrightarrow{AA}| = |\overrightarrow{BB}| = |\vec{0}| = 0$ ，方向無法確定。

難易度

01

老師講解

向量的相等與相反

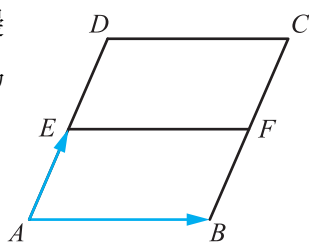
學生演練



如圖， $ABCD$ 為平行四邊形， E 為 $\overline{AD}$ 中點， F 為 $\overline{BC}$ 中點，則圖中

(1) 哪些向量等於 $\overrightarrow{AE}$ ？

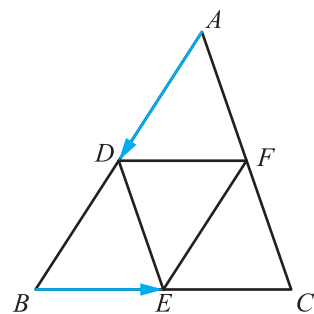
(2) 哪些向量為 $\overrightarrow{AB}$ 的相反向量？



如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 之中點，則圖中

(1) 哪些向量等於 $\overrightarrow{AD}$ ？

(2) 哪些向量為 $\overrightarrow{BE}$ 的相反向量？





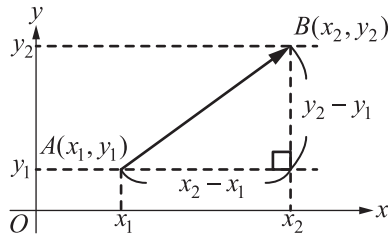
重點

向量的坐標表示法

1. 設 $\overrightarrow{AB}$ 的始點 $A(x_1, y_1)$ ，終點 $B(x_2, y_2)$ ，則：

(1) $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ，其中 $x_2 - x_1$ 稱為 $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分量， $y_2 - y_1$ 稱為 $\overrightarrow{AB}$ 的 y 分量。

(2) $\overrightarrow{AB}$ 的長度 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。



(3) 相等向量：若兩向量 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 與 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 的「長度」相等，「方向」相同，記為 $\vec{a} = \vec{b}$ 。此時 $a_1 = b_1$ ， $a_2 = b_2$ 。

(4) 相反向量：若兩向量 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 與 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 的「長度」相等，「方向」相反，記為 $\vec{a} = -\vec{b}$ 。此時 $a_1 = -b_1$ ， $a_2 = -b_2$ 。

難易度

02

老師講解

向量相等與相反

學生演練



設 $A(1, -2)$ 、 $B(3, x)$ 、 $C(6, 5)$ 、 $D(y, 1)$ ，

若 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ，試求：

(1) $|\overrightarrow{AC}|$ (2) $x + y = ?$

設 $A(2, -5)$ 、 $B(3, 2)$ 、 $C(1, a)$ 、 $D(b, 2)$ ，

若 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ ，試求：

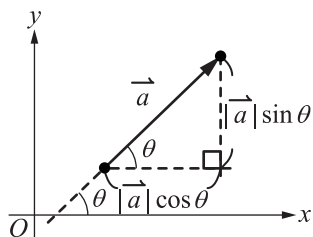
(1) $|\overrightarrow{AB}|$ (2) $a + b = ?$



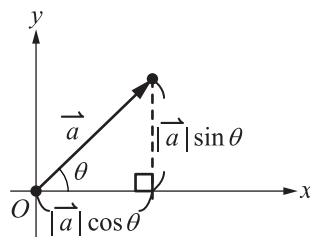
重點

向量的方向角

1. 定義： $\vec{a}$ 與 x 軸正向所夾的角 θ ，稱為 $\vec{a}$ 的方向角，且 $0 \leq \theta < 2\pi$ 。
2. 如圖（一）， $\vec{a} = (x, y)$ ，可將 $\vec{a}$ 平移，使得 $\vec{a}$ 的始點落在原點 O ，如圖（二）。則 $\vec{a}$ 的方向角為 θ ，且 $\vec{a} = (|\vec{a}| \cos \theta, |\vec{a}| \sin \theta)$ 。



圖（一）



圖（二）

難易度

03

老師講解

向量的方向角

學生演練



設 $|\vec{a}| = 4$ ，向量 $\vec{a}$ 的方向角為 135° ，試將 $\vec{a}$ 以坐標表示法表示。

設 $|\vec{b}| = 6$ ，向量的方向角為 210° ，試將 $\vec{b}$ 以坐標表示法表示。



04 老師講解

向量的方向角

學生演練

已知 $A(1,4)$ 、 $B(-1,2)$ ，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{AB}$ 的方向角。

已知 $P(1,-2)$ 、 $Q(-\sqrt{3}+1,-1)$ ，試求：

(1) $\overrightarrow{PQ}$ (2) $\overrightarrow{PQ}$ 的方向角。



自我挑戰



1. 已知點 $A(-3,\sqrt{3})$ 、 $B(-2,0)$ ，則

(1) $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分量為 _____ (2) $\overrightarrow{AB}$ 的方向角為 _____ 度。

2. 已知 $\overrightarrow{AB} = (3,-4)$ ，若 $A(-4,5)$ ，則 B 點坐標為 _____。

3. 平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $A(-5,3)$ 、 $B(-7,-2)$ 、 $C(4,-5)$ ，則 D 點坐標為 _____。

4. 已知向量 $\vec{a} = (2x-3, y+2)$ 、 $\vec{b} = (-y, 4-x)$ ，

(1) 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為相等向量，則數對 $(x, y) =$ _____

(2) 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為相反向量，則數對 $(x, y) =$ _____。

5. 已知 $|\overrightarrow{AB}| = 4$ ，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角為 210° ，試求 $\overrightarrow{AB} =$ _____。

3-2

向量的加減法與實數積

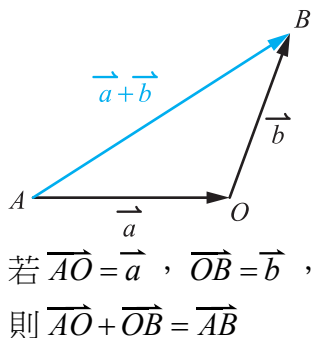


重點

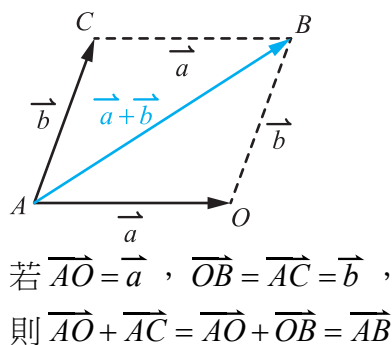
向量的加減法及其幾何意義

1. 向量加減法的幾何意義

(1) 三角形法（始終點連接）

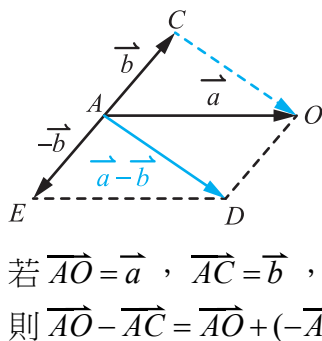


(2) 平行四邊形法（共始點）



2. 向量減法的幾何意義

平行四邊形法

3. 向量加減法的坐標表示法：若兩向量 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, 則(1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ 。(2) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ 。

難易度

01

老師講解

向量坐標表示法的加減

學生演練



已知 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = (1, -2)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (3, 0)$,
試求：

(1) $\overrightarrow{BC}$ (2) $\triangle ABC$ 的周長。

已知 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$ 、 $\overrightarrow{BC} = (-7, -1)$,
試求：

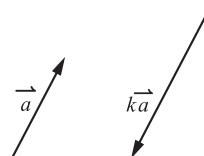
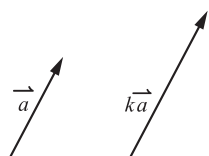
(1) $\overrightarrow{AC}$ (2) $\triangle ABC$ 的周長。



重點

向量的實數積

1. 坐標表示法：設 k 為實數， $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ，則 $k\vec{a} = k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$ 。
2. 幾何意義：設 k 為實數， $\vec{a}$ 不為零向量。
 - (1) 當 $k > 0$ ， $k\vec{a}$ 的大小為 $\vec{a}$ 的 k 倍，方向相同。
 - (2) 當 $k < 0$ ， $k\vec{a}$ 的大小為 $\vec{a}$ 的 $|k|$ 倍，方向相反。



(3) 當 $k = 0$ ， $k\vec{a} = \vec{0}$

3. 基本性質：

設 r 、 s 為任意實數， $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為兩任意向量，則：

(1) $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$ 。 (2) $(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$ 。 (3) $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$ 。

難易度 🐾🐾

02

老師講解

向量實數積的性質

學生演練



已知 $A(1, -2)$ 、 $B(6, 13)$

- (1) 若 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 4$ ，試以 $\overline{AB}$ 表示 $\overline{AP}$ ，並利用此結果求出 P 點坐標。
- (2) 若 Q 點在 $\overline{AB}$ 延長線上，且 $\overline{AQ} : \overline{BQ} = 3 : 1$ ，試以 $\overline{AB}$ 表示 $\overline{AQ}$ ，並利用此結果求出 Q 點坐標。

已知 $A(3, 0)$ 、 $B(-1, 4)$

- (1) 若 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ ，試以 $\overline{AB}$ 表示 $\overline{AP}$ ，並利用此結果求出 P 點坐標。
- (2) 若 Q 點在 $\overline{AB}$ 延長線上，且 $\overline{AQ} : \overline{BQ} = 1 : 5$ ，試以 $\overline{AB}$ 表示 $\overline{AQ}$ ，並利用此結果求出 Q 點坐標。



NOTE 亦可用 P14 之分點坐標公式解之。



NOTE 亦可用 P14 之分點坐標公式解之。

難易度 

03 老師講解

向量實數積的性質

學生演練

設 $\vec{a} = (1, -3)$ 、 $\vec{b} = (-2, 0)$ ，若 $2(\vec{x} + \vec{a}) = 3\vec{x} + \vec{b}$ ，
試求 $\vec{x}$ 。

設 $\vec{a} = (1, -3)$ 、 $\vec{b} = (0, 3)$ ，
若 $3(\vec{x} + \vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{x} + 4\vec{a} - 3\vec{b}$ ，試求 $\vec{x}$ 。



重點 單位向量

1. 長度為 1 的向量稱為「單位向量」。
2. 若向量 $\vec{a}$ 不為零向量，

(1) 與 $\vec{a}$ 同方向的單位向量 $= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 。

(2) 與 $\vec{a}$ 反方向的單位向量 $= -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 。

單元
3難易度 

04 老師講解

單位向量

學生演練

設 $\vec{a} = (3, -4)$ ，試求與 $\vec{a}$ 同方向的單位向量 $\vec{u}$ 。

設 $\vec{b} = (5, 12)$ ，試求與 $\vec{b}$ 相反方向的單位向量 $\vec{p}$ 。



自我挑戰



- 已知 $A(3, -2)$ 、 $B(-\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$ 、 $C(2, 0)$ 、 $D(-1, 2)$ ，則
 (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} =$ _____ (2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} =$ _____。
- $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AB} = (-3, 1)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (x, -2)$ 、 $\overrightarrow{BC} = (4, y)$ ，則 $(x, y) =$ _____。
- 若 $A(1, 12)$ 、 $B(-2, 0)$ 。且 $3\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{BA}$ ，則 P 點坐標為 _____。
- 已知 $A(3, 9)$ 、 $B(-6, 0)$ ，
 (1) 若 P 在 $\overrightarrow{AB}$ 上，且 $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{BP} = 2 : 1$ ，則 $\overrightarrow{AP} =$ _____ $\overrightarrow{AB}$ ，利用此結果求出 P 點坐標為 _____。
 (2) 若 Q 在 $\overrightarrow{AB}$ 延長線上，且 $\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{BQ} = 1 : 4$ ，則 $\overrightarrow{AQ} =$ _____ $\overrightarrow{AB}$ ，利用此結果求出 Q 點坐標為 _____。
- 已知 $A(0, -1)$ 、 $B(4, -4)$ ，則
 (1) 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的單位向量為 _____。
 (2) 與 $\overrightarrow{AB}$ 反方向且長度為 2 的向量為 _____。

3-3

向量的內積與夾角



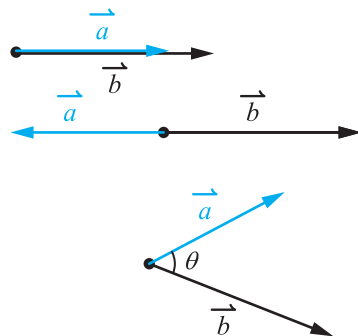
重點

兩向量的夾角與內積的求法

1. 兩向量的夾角：

將兩個非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 平移，使得始點重合後，此時所夾的角 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)，稱為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角。

- 當夾角 $\theta = 0^\circ$ 時，兩向量方向相同。
- 當夾角 $\theta = 180^\circ$ 時，兩向量方向相反。



2. 向量的內積：

平面上兩非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角為 θ ，定義 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的內積為 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 。

3. 利用坐標表示法求內積：

若平面上有兩非零向量 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，則兩向量的內積為 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2$ 。

難易度 🐾



01 老師講解

向量的內積

學生演練

若 $|\vec{a}|=2$ 、 $|\vec{b}|=4$ ，夾角為 60° ，試求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 之值。

若 $\vec{a}=(3,4)$ 、 $|\vec{b}|=2$ ，夾角為 120° ，試求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 之值。

難易度 🐾



02 老師講解

向量夾角的求法

學生演練

設 $|\vec{a}|=5$ 、 $|\vec{b}|=3$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{15\sqrt{2}}{2}$ ，試求 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角 θ 。

設 $|\vec{a}|=4$ 、 $|\vec{b}|=8$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -16$ ，試求 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角 θ 。

難易度 🐾🐾



03 老師講解

餘弦定理求內積

學生演練

設 $\triangle ABC$ 的三邊長為 $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{BC}=5$ 、 $\overline{AC}=7$ ，試求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 。

設 $\triangle ABC$ 的三邊長為 $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{BC}=4$ 、 $\overline{AC}=5$ ，試求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 。

難易度 🐾



04 老師講解

坐標表示法求內積

學生演練

平面上有三點 $A(0,4)$ 、 $B(-2,1)$ 、 $C(1,-3)$ ，試求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 。

坐標平面上有 $\vec{a}=(3,-1)$ 、 $\vec{b}=(0,2)$ 、 $\vec{c}=(1,7)$ ，試求 $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c}$ 之值。

難易度 🐾🐾

05 老師講解

向量夾角的求法

學生演練



$\triangle ABC$ 中， $A(-1,1)$ 、 $B(6,2)$ 、 $C(-5,4)$ ，
試求內角 $\angle A$ ？

已知 $A(1,3)$ 、 $B(0,-2)$ 、 $C(-5,-1)$ ，試求
 $\triangle ABC$ 的內角 $\angle B$ ？

**重點** 向量的平行與垂直

設兩非零向量 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 。

1. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 時，必存在一實數 k ，使得 $\vec{a} = k\vec{b}$ ，即 $a_1 = kb_1$ 、 $a_2 = kb_2$ ，故 $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ，

此時 $b_1b_2 \neq 0$ 。

2. $\vec{a} \perp \vec{b}$ 時，夾角 $\theta = 90^\circ$ ，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 0 = 0$ ，故 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。

難易度 🐾

06 老師講解

向量的平行與垂直

學生演練



平面上有三向量 $\vec{a} = (x, -2)$ 、 $\vec{b} = (3, 1)$ 、
 $\vec{c} = (2, y)$ ，若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 且 $\vec{a} \perp \vec{c}$ ，求 x 、 y 兩數之
值？

平面上有三點 $A(1,3)$ 、 $B(-1,2)$ 、 $C(k,7)$ ，
試分別求出：

(1) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ 時， k 之值。

**重點****向量內積的運算性質****1. 運算性質：**

設 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 為三個任意向量， r 為任意實數，

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0。$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}。$$

$$(3) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}。$$

$$(4) r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b})。$$

2. 運算常見的式子：

$$(1) |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2。$$

$$(2) |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2。$$

$$(3) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2。$$

難易度 🐾🐾

07**老師講解****內積性質的應用****學生演練**

兩向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 長度分別為 1 、 $\sqrt{2}$ ，夾角為 $\frac{\pi}{4}$ ；

求 $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ 之值。

兩向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 長度分別為 $\sqrt{3}$ 、 2 ，夾角為 $\frac{5}{6}\pi$ ；

試求 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 之值。

難易度



08

老師講解

內積性質的應用

學生演練

設 $|\vec{a}|=3$ 、 $|\vec{b}|=5$ 、 $|\vec{a}-\vec{b}|=7$ ，試求兩向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夾角 θ 。

設 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ 、 $|\vec{b}|=1$ 、 $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$ ，試求兩向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夾角 θ 。



自我挑戰



1. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(0,1)$ 、 $B(2,1)$ 、 $C(-\sqrt{3},2)$ ，則
(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____ (2) $\angle BAC =$ _____ 度。
2. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=7$ 、 $\overline{BC}=8$ 、 $\overline{AC}=9$ ，則
(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____ (2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} =$ _____。
3. 設 $\vec{a}=(6,-8)$ 、 $|\vec{b}|=\sqrt{3}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b}=-5\sqrt{3}$ ，試求 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角度數為 _____。
4. 已知 $\vec{a}=(2,-1)$ 、 $\vec{b}=(k+1,k-2)$ ，
(1) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，則 $k =$ _____ (2) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，則 $k =$ _____。
5. 已知 $|\vec{a}|=2$ 、 $|\vec{b}|=\sqrt{3}$ ， $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 30° ，則 $|\vec{a}+2\vec{b}| =$ _____。

3-4

內積的應用



重點

柯西不等式

1. 柯西不等式（向量長度形式）

若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 為平面上兩非零向量，則 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ 。等號成立時，即 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 。

說明 $\because \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta|$

又 $\because |\cos \theta| \leq 1$ ，所以 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$

等號成立時， $|\cos \theta| = 1 \Rightarrow$ 夾角 $\theta = 0^\circ$ 或 $180^\circ \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ 。

2. 柯西不等式（坐標表示法）

若 a_1, a_2, b_1, b_2 為實數，則 $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$ 。

等號成立時， $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ 。

說明 設 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，故不等式 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$

可化成 $|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

平方得 $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

等號成立時， $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ 。

難易度 🐾🐾

01

老師講解

柯西不等式

學生演練



設兩實數 x, y 滿足 $x^2 + y^2 = 20$ ，試求 $2x + y$ 的最大值，並求此時 x, y 之值。

設兩實數 x, y 滿足 $4x^2 + 9y^2 = 18$ ，試求 $2x + 3y$ 的最小值，並求此時 x, y 之值。

難易度 🐾🐾

02 老師講解

柯西不等式

學生演練



設兩實數滿足 $x-3y=10$ ，試求 x^2+y^2 的最小值，並求產生最小值時 x 、 y 之值。

設兩實數滿足 $2x+3y=20$ ，試求 $4x^2+y^2$ 的最小值，並求產生最小值時 x 、 y 之值。

難易度 🐾🐾

03 老師講解

柯西不等式

學生演練



設 x 、 y 為兩正數，試求 $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$ 的最小值。

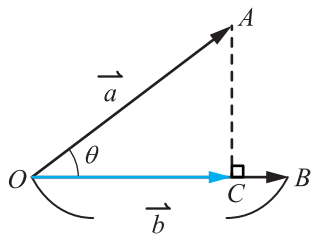
設 a 、 b 為兩正數，試求 $(4a+b)(\frac{1}{a}+\frac{25}{b})$ 的最小值。



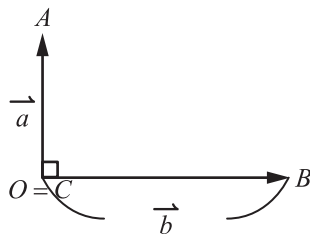
重點

向量的正射影與正射影長

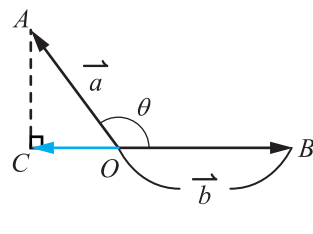
1. 設 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 為兩非零向量且其夾角為 θ 。自 A 點對 $\overrightarrow{OB}$ 所在直線作鉛垂線，相交於 C 點，則 $\overrightarrow{OC}$ 為 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影， $|\overrightarrow{OC}|$ 為 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長。



θ 為銳角， $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 同向



θ 為直角， $\overrightarrow{OC} = \vec{0}$



θ 為鈍角， $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 反向

2. 若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為平面上兩向量，且 $\vec{b} \neq \vec{0}$ ， $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{OC}$ ，則

(1) 正射影 $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$ 。

(2) 正射影長 $|\overrightarrow{OC}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ 。

難易度

04

老師講解

正射影與正射影長

學生演練



設 $A(-1,0)$ 、 $B(-8,4)$ 、 $C(0,-2)$ ，試求：

- (1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影。
- (2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影長。
- (3) B 點在直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 上的投影點坐標。

設 $\vec{a} = (1,2)$ 、 $\vec{b} = (3,-4)$ ，試求：

- (1) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影。
- (2) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長。



重點

利用向量求三角形面積

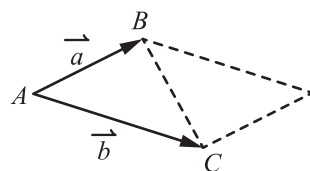
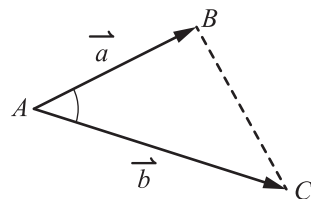
1. 二階行列式的展開， $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ 。

2. 利用內積求三角形面積

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = (b_1, b_2)$ ，

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 的面積} &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} |a_1b_2 - a_2b_1|。 \end{aligned}$$

3. 平行四邊形的面積 $= \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|$
 $= |a_1b_2 - a_2b_1|。$



難易度

05

老師講解

利用向量求三角形面積

學生演練



平面上有三點 $A(0,1)$ 、 $B(4,5)$ 、 $C(-2,3)$ ，試求以 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 兩向量所張成的三角形面積。

平面上有三點 $A(-3,1)$ 、 $B(4,-6)$ 、 $C(2,5)$ ，試求以 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積。



自我挑戰



1. 設 x 、 y 實數滿足 $4x^2 + y^2 = 20$ ，則 $x+y$ 的最大值為 _____，最小值為 _____。
2. 設 x 、 y 實數滿足 $x+2y=10$ ，則 x^2+y^2 的最小值為 _____，此時的數對 $(x,y) =$ _____。
3. 設 $a > 0$ 、 $b > 0$ ，則 $(a+\frac{9}{b})(b+\frac{1}{a})$ 的最小值為 _____。
4. 設 $A(1,0)$ 、 $B(4,4)$ 、 $C(-1,1)$ ，則
 (1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 _____。
 (2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上正射影長為 _____。
5. 已知 $A(2,5)$ 、 $B(-3,1)$ 、 $C(4,-5)$ ，則 $\triangle ABC$ 面積為 _____。
6. 已知 $\triangle ABC$ 中， $|\overrightarrow{AB}|=2$ 、 $|\overrightarrow{AC}|=3$ ，且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ ，試求 $\triangle ABC$ 面積為 _____。



歷屆試題



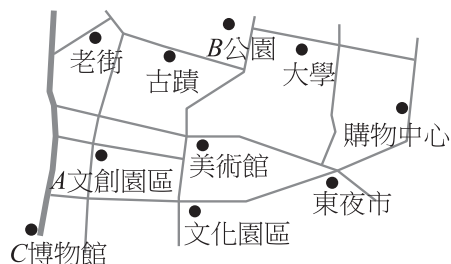
- () 1. 已知兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積為 10。若 $\vec{a} = (x, 1)$ ， $\vec{b} = (2, y)$ ，則 x 與 y 滿足下列何種關係式？

(A) $2x + y = 10$ (B) $x + 2y = 10$ (C) $xy + 2 = 10$ (D) $xy - 2 = 10$ 。

【113(B)，答對率 54%】

- () 2. 如右圖所示，已知文創園區在地圖上是 A 點，公園是 B 點，博物館是 C 點，試問哪一個向量 $\overrightarrow{PQ}$ 與向量 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 最相近(意即方向與大小最接近)？

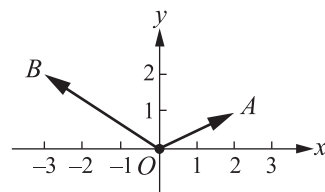
(A) P ：古蹟， Q ：老街
(B) P ：文化園區， Q ：東夜市
(C) P ：購物中心， Q ：東夜市
(D) P ：美術館， Q ：文化園區。



【113(B)，答對率 52%】

- () 3. 在坐標平面上，已知 O 為原點， $A(2, 1)$ ， $B(-3, 2)$ ，如圖所示，若 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$ ，其中 $-1 \leq t \leq 1$ ，則所有滿足 P 點所形成的線段長為多少？

(A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{2}$ 。



【113(C)，答對率 33%】

- () 4. 下列哪一個向量和向量 $(2, 1)$ 不平行也不垂直？

(A) $(-1, \frac{1}{2})$ (B) $(1, \frac{1}{2})$ (C) $(\frac{-1}{2}, 1)$ (D) $(-1, \frac{-1}{2})$ 。【112(B)，答對率 27%】

- () 5. 已知 $\vec{u}$ 、 $\vec{w}$ 兩向量的長度皆等於 2。若 $\vec{u} + \vec{w}$ 與 $\vec{u}$ 的夾角為 75° ，試問 $\vec{w}$ 與 $-\vec{u} - \vec{w}$ 的夾角為何？

(A) 75° (B) 77° (C) 105° (D) 150° 。

【112(B)，答對率 48%】

- () 6. 已知 $\vec{u} = (x, y)$ ， $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ 。若 $\vec{u}$ 與向量 $(1, 3)$ 和向量 $(2, -1)$ 的內積值皆不超過 14，試問 $\vec{u}$ 與向量 $(1, 1)$ 的內積最大值為何？

(A) 1 (B) 4 (C) 10 (D) 14。

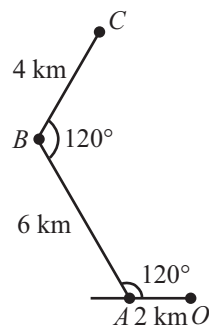
【112(B)，答對率 43%】

- () 7. 在坐標平面上，已知 $\triangle ABC$ 的三個頂點坐標為 $A(x, y)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(0, 0)$ ，線段 $\overline{AB}$ 的中點為 D ，線段 $\overline{BC}$ 的中點為 E ，線段 $\overline{AC}$ 的中點為 F 。若內積 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ ，則下列何者為真？

(A) $\triangle ABC$ 為銳角三角形 (B) $\triangle ABC$ 為鈍角三角形 (C) $\angle BCA$ 為直角
(D) $\angle BAC$ 為直角。

【112(C)，答對率 41%】

- () 8. 一公路依水平地形迂迴而建，如圖所示。從 O 地到 A 地、 A 地到 B 地、 B 地到 C 地的距離分別是 2、6、4 公里(km)，而 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 的夾角及 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的夾角均為 120° ，則 C 地到 O 地的直線距離為多少公里？



(A) $2\sqrt{11}$ (B) $2\sqrt{21}$ (C) $2\sqrt{31}$ (D) $2\sqrt{41}$ 。

【112(C)，答對率 40%】

- () 9. 已知平面上兩向量 $\vec{a} = (2x+1, -3)$ 、 $\vec{b} = (3, x-2)$ ，滿足 $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ ，則 $x = ?$

(A) 3 (B) 1 (C) -1 (D) -3。

【111(C)，答對率 38%】

- () 10. 已知 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 為平面上的三個向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ， $|\vec{a}| = 5$ ， $|\vec{b}| = 12$ ， $|\vec{c}| = 13$ 。若 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

(A) -30 (B) -60 (C) -65 (D) -165。

【110(C)，答對率 51%】

- () 11. 已知 $A(3,1)$ 、 $B(2,-3)$ 、 $C(7,-1)$ 及 $D(x,y)$ 為坐標平面上的四個點。

若 $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$ ，則 $x+y = ?$

(A) -8 (B) -4 (C) 5 (D) 6。

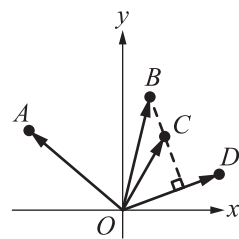
【109(B)，答對率 50%】

- () 12. 設平面上三點 $A(1,1)$ 、 $B(5,-2)$ 、 $C(5,2)$ ，且 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影為 $\overrightarrow{AD}$ ，若 $\overrightarrow{DC} = (x, y)$ ，則 $x+y = ?$

(A) $\frac{34}{25}$ (B) $\frac{89}{25}$ (C) $\frac{104}{25}$ (D) $\frac{112}{25}$ 。

【109(C)，答對率 25%】

- () 13. 設右圖所示，以 O 為原點的直角坐標系上有四點，由左至右依序為 A 、 B 、 C 、 D ，其中 A 落在第二象限， B 、 C 、 D 落在第一象限，且直線 BC 與直線 OD 的交點落在 O 、 D 兩點之間。已知 $\angle AOD > 90^\circ$ ，且 $\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{OD}$ 的內積為 0。若向量 $\overrightarrow{OD}$ 分別與向量 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 及 $\overrightarrow{OD}$ 求內積，依次得到 a 、 b 、 c 及 d 四個數值，則下列何者正確？



(A) $b > a > c > d$ (B) $b = c > d > a$ (C) $a > b > c > d$ (D) $d > b = c > a$ 。

【108(B)，答對率 30%】

- () 14. 已知 $\vec{u} = (1,1)$ ， $\vec{v} = (x+4, y-1)$ 及 $\vec{w} = (2x, y)$ 。若 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 垂直且 $\vec{u}$ 與 $\vec{w}$ 平行，則下列何者正確？

(A) $x=1$ (B) $y=-2$ (C) $y=1$ (D) $x=-2$ 。

【108(C)，答對率 45%】

- () 15. 已知坐標平面上三個點 $A(1,2)$ 、 $B(2,5)$ 、 $C(0,-1)$ ，則向量 $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = ?$

(A) $(-2,5)$ (B) $(3,0)$ (C) $(1,3)$ (D) $(3,15)$ 。

【107(B)，答對率 61%】

- () 16. 設已知坐標平面上三點 $A(1, a)$ 、 $B(2, 3)$ 、 $C(5, 1)$ ，若向量內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值為 1，則 $a = ?$

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 2。

【106(B)，答對率 39%】

- () 17. 已知 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ 。若 $t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ 和 $\vec{a} - \vec{b}$ 垂直，其中 t 為實數，則 $t = ?$

(A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 。

【106(C)，答對率 25%】