單元 02

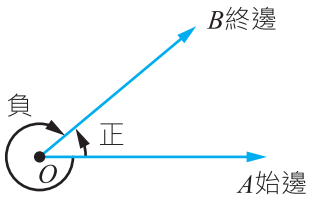
三角函數

2-1 有向角及其度量

重點 有向角及角的度量

1. **有向角：**

平面上以 O 點為軸心，將一射線 $\overrightarrow{OA}$ 旋轉至 $\overrightarrow{OB}$ 的位置形成 $\angle AOB$，稱為有向角。其中 $\overrightarrow{OA}$ 稱為始邊，$\overrightarrow{OB}$ 稱為終邊，O 點稱為頂點。而依逆時針方向旋轉的角為正角，依順時針方向旋轉的角為負角。



2. **角的度量：**

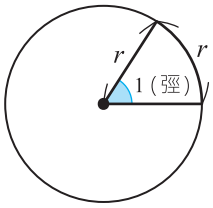
(1) 六十分制：將圓周 360 等分，每一等分所對之圓心角為 1 度。

1 度 = 60 分，1 分 = 60 秒。記為 $1^\circ = 60'$，$1' = 60''$。

(2) 弧度制：一圓之弧長等於半徑時，則定義此弧所對應的圓心角為 1 弧度（弳）。

(3) 六十分制與弧度制的換算：

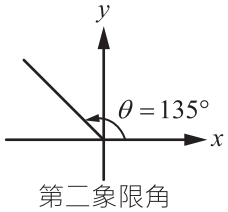
$$360^\circ = 2\pi \text{（弳）} \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\text{（弳）} \\ 1\text{（弳）} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \end{cases}。$$



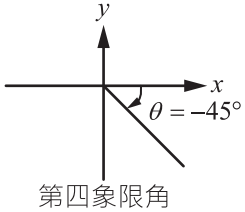
3. **標準位置角：**

(1) 坐標平面上，將有向角的頂點與原點重合，始邊位於 x 軸正向，則此角稱為有向角的標準位置角。

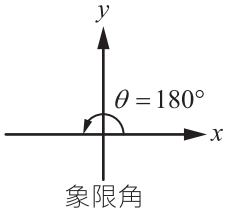
(2) 標準位置角終邊落在第 n 象限，則稱為第 n 象限角（$n = 1, 2, 3, 4$）。終邊落在 x 軸或 y 軸上則稱為象限角。



第二象限角



第四象限角



象限角

4. **同界角：**

(1) 兩標準位置角具有相同的始邊和終邊，則稱此兩有向角為同界角。

(2) θ_1 和 θ_2 為同界角 $\Leftrightarrow \theta_1-\theta_2=360°\cdot n$ 或 $2\pi\cdot n$（n 為整數）。

(3) $\theta=360°\cdot n+\phi$（n 為整數，$0°<\phi<360°$），則 ϕ 稱為 θ 的最小正同界角（同界角中最小的正角）。而 $\phi-360°$ 稱為 θ 的最大負同界角（同界角中最大的負角）。

NOTE 若以弧度制表示 $\theta=2\pi\cdot n+\phi$（n 為整數，$0<\phi<2\pi$），則 ϕ 稱為 θ 的最小正同界角，而 $\phi-2\pi$ 稱為 θ 的最大負同界角。

難易度

01 老師講解　角度單位換算　學生演練

(1) $120°=$_____弳。

(2) $\frac{2\pi}{3}=$_____度。

(3) $3=$_____度。

(1) $225°=$_____弳。

(2) $\frac{3\pi}{2}=$_____度。

(3) $-10°=$_____弳。

難易度

02 老師講解　同界角　學生演練

試求下列各角之最小正同界角與最大負同界角

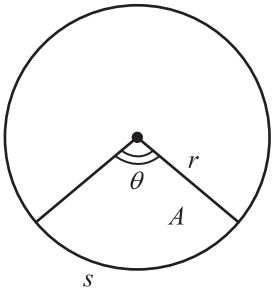
(1) $1300°$　(2) $-920°$　(3) $\frac{15\pi}{4}$。

試求下列各角之最小正同界角與最大負同界角

(1) $950°$　(2) $-1000°$　(3) $-\frac{20\pi}{6}$。

重點 扇形的弧長和面積

1. **扇形：**
   扇形圖形為圓的一部份，其大小由半徑 r 和圓心角 θ 所決定。
2. **弧長 s ：**
   $\frac{s}{2\pi r}=\frac{\theta}{2\pi}\Rightarrow s=r\cdot\theta$（其中 θ 為弧度制）。
3. **面積 A ：**
   $\frac{A}{\pi r^2}=\frac{\theta}{2\pi}\Rightarrow A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r\cdot s$（其中 θ 為弧度制）。
4. **周長：**
   扇形周長 $=s+2r$ 。



難易度

03 老師講解 **扇形的弧長和面積** **學生演練**

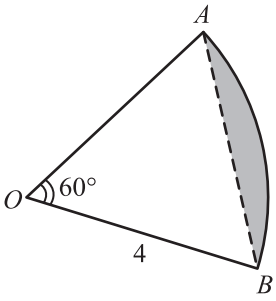
已知扇形弧長 6π 公分，圓心角 $120°$，試求扇形半徑及面積。

已知扇形半徑為 4 公分，面積為 8π 平方公分，試求圓心角 θ 及弧長。

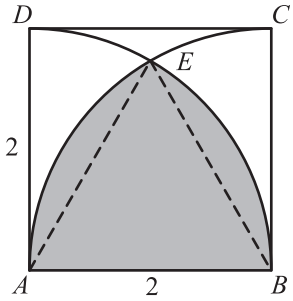
難易度

04 老師講解 **弧長及面積應用** **學生演練**

試求右圖陰影部分面積。



試求右圖陰影部分面積。



自我挑戰

1. 標準位置角 $\frac{-25\pi}{6}$ 為第 _____ 象限角。

2. (1) $\pi^\circ =$ _____ 弳。　　(2) $\frac{2}{\pi} =$ _____ 度。

3. -480° 的最小正同界角為 _____ 。

4. 若 $\frac{-17\pi}{3}$ 的最小正同界角為 α ，最大負同界角為 β ，則 $\alpha+\beta =$ _____ 。

5. 某扇形半徑為 4 ，角度為 θ ，其面積為 π 。若另一扇形半徑為 1 ，角度為 θ ，則其弧長為 _____ 。

素 6. 美式賣場賣披薩共有直徑 9 吋和 12 吋兩款，小閔兩款披薩各買一個，且二種尺寸各切一片。已知先切下第一片圓心角 $\frac{\pi}{3}$ 的 9 吋披薩，若想讓第二片披薩的大小也一樣，則 12 吋披薩必須切下圓心角為 _____ 。

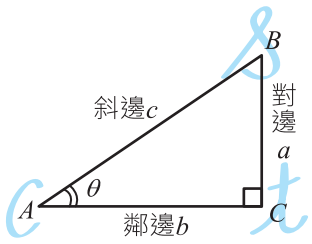
2-2 銳角的三角函數

重點　銳角的三角函數

定義：直角三角形 ABC 中 $\angle C$ 為 $90°$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 對邊長分別為 a、b、c。如圖（一），$\angle A=\theta$，則定義 θ 的六個三角函數值

（對稱成倒數）

- 正弦 $\sin\theta=\frac{a}{c}$（$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$）
- 餘弦 $\cos\theta=\frac{b}{c}$（$\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$）
- 正切 $\tan\theta=\frac{a}{b}$（$\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$）
- 餘切 $\cot\theta=\frac{b}{a}$（$\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$）
- 正割 $\sec\theta=\frac{c}{b}$（$\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$）
- 餘割 $\csc\theta=\frac{c}{a}$（$\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$）



圖（一）

NOTE 銳角三角函數可視為一直角三角形中兩邊長的比值。只需熟記前三個，其餘由上而下按順序對稱成倒數。

難易度

01　老師講解　銳角三角函數　學生演練

已知直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$、$\overline{AB}=15$，且 $\cos A=\frac{3}{5}$，試求

(1) $\sin A$　(2) $\tan B$　(3) 周長。

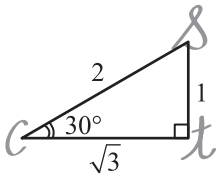
已知直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$、$\overline{BC}=10$，且 $\tan A=\frac{5}{12}$，試求

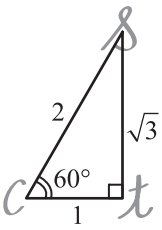
(1) $\sin A$　(2) $\tan B$　(3) 周長。

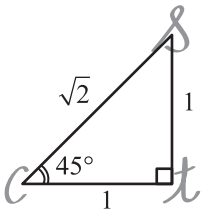
重點　特別角的三角函數值

30°、60°、45°的三角函數值：由 30°－60°－90° 及 45°－45°－90° 等特殊三角形的邊長比例可得以下銳角特別角的三角函數值。

三角函數 \ θ	$\theta=30°$	$\theta=60°$	$\theta=45°$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\sqrt{2}$
$\csc\theta$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$







NOTE　三角函數的次方標示在正上方，例：$\sin^2 30°=(\sin 30°)^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$。

難易度

02　老師講解　**特別角的三角函數**　學生演練

試求下列各式之值：

(1) $\sin^2 45°\sec^2 45°+\tan^2 60°-\cos 60°\csc 30°$。

(2) $\cos\frac{\pi}{3}+\tan^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{4}-\sec^2\frac{\pi}{6}$。

試求下列各式之值：

(1) $\sin 30°\sec^2 45°-\cot^2 30°+\cos^2 30°\csc^2 30°$。

(2) $\cot^2\frac{\pi}{4}+\tan^2\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}+\sec\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}$。

自我挑戰

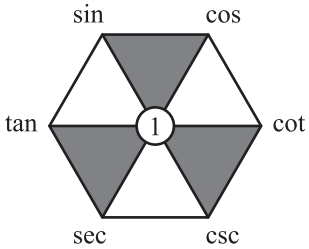
1. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{12}{13}$，若 $\overline{AC}=10$ 公分，則 $\triangle ABC$ 之面積為 _____ 平方公分。

2. 求 $3\cos\frac{\pi}{3}\times\csc^2\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{3}$ 之值為 _____。

3. 已知 α、β 為直角三角形 $\triangle ABC$ 之兩銳角，且 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，則 $\tan\beta=$ _____。

2-3 三角函數的基本性質

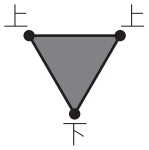
重點　三角函數的恆等關係



圖（二）

1. **平方關係：** $\begin{cases}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\ \tan^2\theta+1=\sec^2\theta\\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\end{cases}$。

NOTE 可由圖（二）著色部分三角形方便記誦。



$\Rightarrow$ 上^2 + 上^2 = 下^2

2. **倒數關係：** $\begin{cases}\sin\theta\cdot\csc\theta=1\\ \tan\theta\cdot\cot\theta=1\\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\end{cases}$。

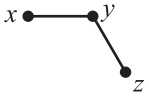
NOTE 可由圖（二）對角線方便記誦。



$\Rightarrow$ 對角相乘 $=1$（$a\times b=1$）

3. **商數關係：** $\begin{cases}\tan\theta\cos\theta=\sin\theta\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta\\ \cot\theta\sin\theta=\cos\theta\Rightarrow\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta\end{cases}$。

NOTE 可由圖（二）連續的三頂點方便記誦，任意的連續三點均有商數關係，在此僅列出最常用的二組。



$\Rightarrow$ 外$\times$外 = 內（$x\times z=y$）

4. **餘角關係：**
$$\begin{cases}(1)\ \sin\theta=\cos(90°-\theta)\ ,\ \cos\theta=\sin(90°-\theta)\\(2)\ \tan\theta=\cot(90°-\theta)\ ,\ \cot\theta=\tan(90°-\theta)\\(3)\ \sec\theta=\csc(90°-\theta)\ ,\ \csc\theta=\sec(90°-\theta)\end{cases}$$。

NOTE 圖（二）中左邊為正函數（正弦、正切、正割），右邊為餘函數（餘弦、餘切、餘割），角度θ的正函數值等於餘角（$90°-\theta$）的餘函數值，反之亦同。

難易度 ●●

01 老師講解　平方關係　學生演練

試求$3\sin^2 10°-2\tan^2 35°+3\cos^2 10°+2\sec^2 35°$之值。

試求$2\sin^2 10°+2\sin^2 80°+3\tan^2 10°-3\csc^2 80°$之值。

難易度 ●●

02 老師講解　倒數關係　學生演練

化簡$\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1+\sec\theta}+\dfrac{1}{1+\csc\theta}$。

化簡$\dfrac{2}{1+\sin\theta}+\dfrac{3}{1+\cos\theta}+\dfrac{3}{1+\sec\theta}+\dfrac{2}{1+\csc\theta}$。

難易度 ●●

03 **老師講解** **商數關係** **學生演練**

已知 $\tan\theta=\frac{2}{3}$，試求 $\frac{3\sin\theta+2\cos\theta}{2\sin\theta-3\cos\theta}$。

已知 $\cot\theta=\frac{3}{4}$，試求 $\frac{3\sin\theta+2\cos\theta}{2\sin\theta-3\cos\theta}$。

重點 $\sin\theta\pm\cos\theta$題型整理

1. 已知 $\sin\theta\pm\cos\theta$ $\xrightarrow{\text{平方關係}}$ 可求得 $\sin\theta\cos\theta$。

   已知 $\sin\theta\cos\theta$ $\xrightarrow{\text{平方關係}}$ 可求得 $\sin\theta\pm\cos\theta$

   NOTE $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta\pm2\sin\theta\cos\theta=1\pm2\sin\theta\cos\theta$

2. 商數及平方關係應用：

   $$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

3. 倒數關係應用：

   $$\sec\theta\pm\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}\pm\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta\pm\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

4. (1) 立方和公式：

   $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。

   (2) 立方差公式：

   $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

   NOTE ① $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

   $=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$。

   ② $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

   $=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$。

   ③ **遇高次方：** $\sin^4\theta$ **可視為** $(\sin^2\theta)^2$，$\sin^6\theta$ **可視為** $(\sin^2\theta)^3$ **再代入化簡。**

難易度

04 老師講解　$\sin\theta\pm\cos\theta$ 題型　學生演練

若 θ 為銳角，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，試求下列各式之值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\tan\theta+\cot\theta$。

若 θ 為銳角，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$，試求下列各式之值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\tan\theta+\cot\theta$。

難易度

05 老師講解　根與係數關係應用　學生演練

已知 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 為 $3x^2-2x+k=0$ 之兩根，試求 k。

已知 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 為 $2x^2+x+k=0$ 之兩根，試求 k 值。

自我挑戰

1. 試求 $(\sin 20°-\csc 20°)^2+(\cos 20°-\sec 20°)^2-(\tan 20°)^2-(\cot 20°)^2=$ _____。

2. 化簡 $\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1-\sec\theta}+\frac{1}{1-\csc\theta}=$ _____。

3. 若 $\tan\theta=\frac{2}{3}$，則 $\frac{6\sin\theta+4\cos\theta}{3\sin\theta+5\cos\theta}=$ _____。

4. 設 θ 為實數，若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$，則 $\tan\theta+\cot\theta=$ _____。

5. 若 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，則 $\sec\theta+\csc\theta$ 的值為 _____。

6. 已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta>\cos\theta$。若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{17}}{3}$，則 $\sin\theta-\cos\theta$ 的值為 _____。

7. 試求 $2\sec^2 20°-2\cot^2 70°+\sin 50°\sec 40°$ 之值為 _____。

8. 若 θ 為銳角，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，試求下列各式之值：

(1) $\sec\theta-\csc\theta=$ _____　(2) $\sin\theta+\cos\theta=$ _____。

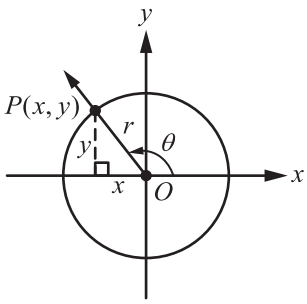
2-4 任意角的三角函數

重點　任意角三角函數的定義

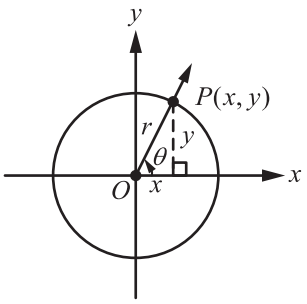
1. **任意角三角函數：**

設 $P(x,y)$ 為標準位置角 θ 終邊上任意一點，且 $\overline{OP}=r$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，如圖（三），則定義此任意角 θ 的三角函數，如下：

$$\begin{cases}\sin\theta=\frac{y}{r}\\ \cos\theta=\frac{x}{r}\\ \tan\theta=\frac{y}{x}\\ \cot\theta=\frac{x}{y}\\ \sec\theta=\frac{r}{x}\\ \csc\theta=\frac{r}{y}\end{cases}$$



圖（三）



圖（四）

NOTE θ 為第一象限角時，如圖（四），可視為銳角三角函數。
但 θ 為二、三、四象限角時，x、y 值有可能為負數，所以三角函數值亦可能小於 0，此為任意角三角函數與銳角三角函數最大的差異。

2. **各象限三角函數值正負判定：**

(1)

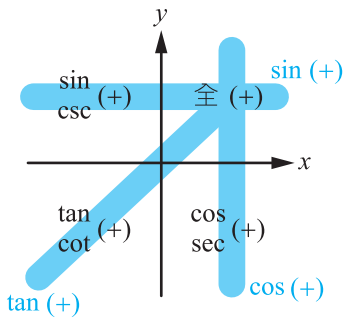
三角函數＼象限	一 $(+,+)$	二 $(-,+)$	三 $(-,-)$	四 $(+,-)$
$\sin\theta=\frac{y}{r}$	$\frac{+}{+}\Rightarrow+$	$\frac{+}{+}\Rightarrow+$	$\frac{-}{+}\Rightarrow-$	$\frac{-}{+}\Rightarrow-$
$\cos\theta=\frac{x}{r}$	$\frac{+}{+}\Rightarrow+$	$\frac{-}{+}\Rightarrow-$	$\frac{-}{+}\Rightarrow-$	$\frac{+}{+}\Rightarrow+$
$\tan\theta=\frac{y}{x}$	$\frac{+}{+}\Rightarrow+$	$\frac{+}{-}\Rightarrow-$	$\frac{-}{-}\Rightarrow+$	$\frac{-}{+}\Rightarrow-$

NOTE

1. $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$
2. $\csc\theta=\frac{r}{y}$ 正負與 $\sin\theta$ 相同；$\sec\theta=\frac{r}{x}$ 正負與 $\cos\theta$ 相同；$\cot\theta=\frac{x}{y}$ 正負與 $\tan\theta$ 相同

(2) 以上結論歸納整理如右，可用「才」字方便記誦。

(3) 本書提供以銳角三角函數的解題概念（畫直角三角形）解題，請熟記三角函數於各象限之正負判定。



難易度

01　老師講解　任意角三角函數　學生演練

若點 $P(-3,4)$ 在標準位置角 θ 的終邊上，試求 $\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta$。

若點 $P(\sqrt{3},-1)$ 在標準位置角 θ 的終邊上，試求 $\sin\theta+\cos\theta+\cot\theta$。

難易度

02 老師講解 三角函數正負判定 學生演練

已知坐標平面上點 $P(\sin\theta,\cos\theta)$ 在第二象限，試求：

(1) θ 為第幾象限角。

(2) 點 $Q(\tan\theta,\sec\theta)$ 在第幾象限。

已知坐標平面上點 $P(\tan\theta,\cos\theta)$ 在第三象限，試求：

(1) θ 為第幾象限角。

(2) 點 $Q(\sin\theta,\cot\theta)$ 在第幾象限。

難易度

03 老師講解 任意角三角函數求值 學生演練

已知 $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，且 $\sin\theta>0$，試求 $\sin\theta+\cos\theta$。

已知 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，且 $\tan\theta<0$，試求 $\sin\theta+\tan\theta$。

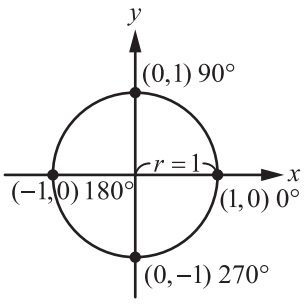
重點　象限角的三角函數

象限角三角函數值求法：

(1) 象限角終邊在 x 軸或 y 軸上，無法畫出直角三角形，所以只能由定義求值。

(2) 可令 $r=1$，則單位圓與 x、y 軸交於四點 $(1,0)$、$(0,1)$、$(-1,0)$、$(0,-1)$ 分別對應為 $\theta=0°$、$90°$、$180°$、$270°$ 終邊上的一點坐標，如圖（五），再由定義可得以下三角函數值。

$r=1$，θ / 三角函數	$0°(1,0)$	$90°(0,1)$	$180°(-1,0)$	$270°(0,-1)$
$\sin\theta=\frac{y}{r}$	0	1	0	-1
$\cos\theta=\frac{x}{r}$	1	0	-1	0
$\tan\theta=\frac{y}{x}$	0	無意義	0	無意義
$\cot\theta=\frac{x}{y}$	無意義	0	無意義	0
$\sec\theta=\frac{r}{x}$	1	無意義	-1	無意義
$\csc\theta=\frac{r}{y}$	無意義	1	無意義	-1



圖（五）

難易度

04　老師講解　**象限角的三角函數值**　學生演練

試求 $\sin 270°+\cos 180°+\tan 0°+\csc 90°$。

試求 $\sin 90°+\cos 0°+\tan 180°+\csc 270°$。

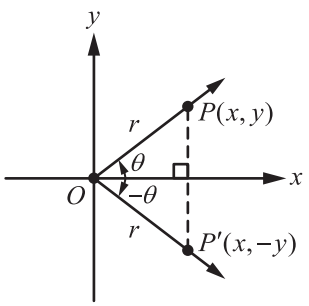
重點　任意角化為銳角的三角函數

1. 負角公式：

(1) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$。　(4) $\cot(-\theta)=-\cot\theta$。

(2) $\cos(-\theta)=\cos\theta$。　(5) $\sec(-\theta)=\sec\theta$。

(3) $\tan(-\theta)=-\tan\theta$。　(6) $\csc(-\theta)=-\csc\theta$。

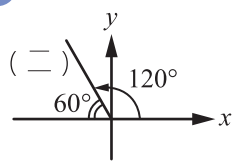


圖（六）

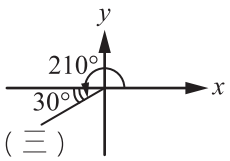
NOTE 由圖（六）得知標準位置角 θ 與 $-\theta$ 之終邊上一點 $P(x,y)$ 與 $P'(x,-y)$ 之 y 坐標異號，x 坐標相同，所以三角函數中僅 $\cos\theta=\frac{x}{r}=\cos(-\theta)$ 和 $\sec\theta=\frac{r}{x}=\sec(-\theta)$ 其正負角函數值相同。

2. 將任意角 ϕ（$0°<\phi<360°$）之三角函數值化為銳角（$0°<\theta<90°$）三角函數值之步驟：
   (1) 確定任意角 ϕ 終邊之象限。
   (2) 找出任意角 ϕ 與 x 軸所夾之銳角 θ。
   (3) $F(\phi)=\pm F(\theta)$，其中 F 表任一三角函數，「±」號由該函數與 ϕ 角終邊所在之象限決定。

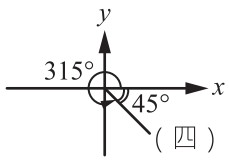
例如 $\sin120°=+\sin60°$、$\sin210°=-\sin30°$、$\cos315°=+\cos45°$、$\tan150°=-\tan30°$。



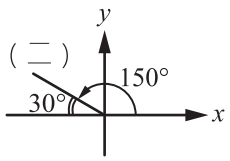
第二象限 sin 為＋



第三象限 sin 為－



第四象限 cos 為＋



第二象限 tan 為－

難易度 ●●

05 老師講解　任意角化為銳角

試求下列各式之值：

(1) $\sin330°$　(2) $\cos510°$
(3) $\sec(-210°)$　(4) $\tan(-300°)$。

學生演練

試求下列各式之值：

(1) $\cos120°$　(2) $\sin930°$
(3) $\csc(-480°)$　(4) $\cot(-405°)$。

難易度

06 老師講解 **任意角化為銳角之應用** 學生演練

若 $\sin 590° = k$ ，試以 k 表示 $\tan 860°$ 。

若 $\tan 490° = k$ ，試以 k 表示 $\cos 580°$ 。

自我挑戰

1. 設 θ 終邊上一點 P 的坐標為 $(x,-1)$ ，且 $\cot\theta = 2$ ，則 $\cos\theta =$ _____ 。

2. 若點 $A(\cos\theta, \tan\theta)$ 在第四象限內，則 θ 為第 _____ 象限角。

3. 若 $\cot\theta = \frac{3}{4}$ ，且 $\sin\theta < 0$ ，則 $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\tan\theta} =$ _____ 。

4. 求 $\sin 1200° \times \cot(-480°) + \cos(-240°) \times \tan 495°$ 之值為 _____ 。

5. 設 $0° < \theta < 360°$ ，若 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\theta =$ _____ 。

6. 若 $\cos 140° = k$ ，則 $\tan 2020° =$ _____ 。

7. 設 θ 為銳角，則 $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(360°+\theta)} + \frac{\tan(180°+\theta)}{\tan(360°-\theta)} - \frac{\sin(270°-\theta)}{\cos(90°+\theta)} =$ _____ 。

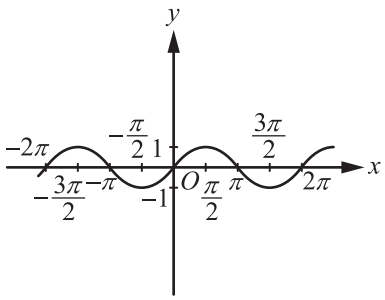
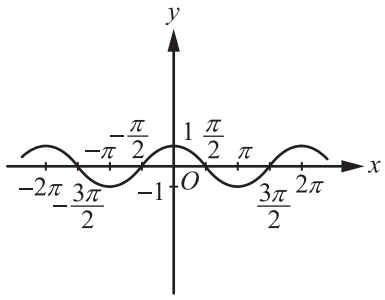
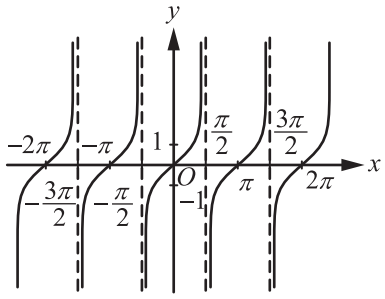
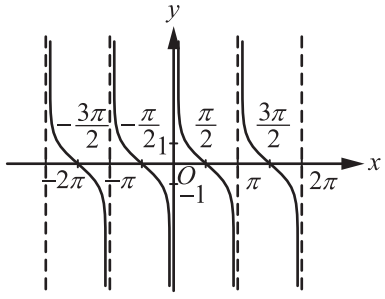
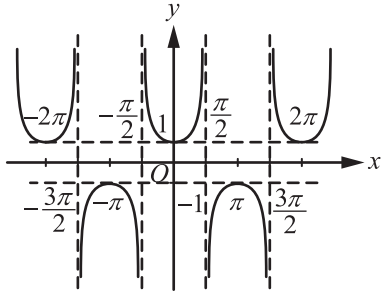
2-5 三角函數的圖形與週期

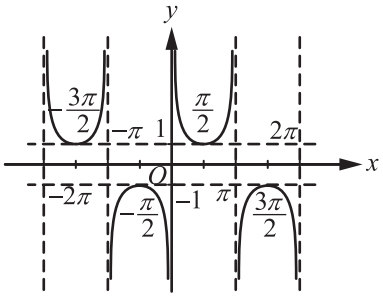
重點　三角函數的圖形和週期

1. **週期函數：**

   若 $F(x)$ 為週期函數且週期為 P，則 $F(nP+x)=F(x)$，其中 n 為整數。

2. **三角函數之圖形、週期、值域和定義域：**

函數	圖形	定義域	值域	週期
$y=\sin x$		$x\in\mathbb{R}$	$-1\le\sin x\le 1$	2π
$y=\cos x$		$x\in\mathbb{R}$	$-1\le\cos x\le 1$	2π
$y=\tan x$		$x\ne n\pi+\frac{1}{2}\pi$ $n\in\mathbb{Z}$	$\tan x\in\mathbb{R}$	π
$y=\cot x$		$x\ne n\pi$ $n\in\mathbb{Z}$	$\cot x\in\mathbb{R}$	π
$y=\sec x$		$x\ne n\pi+\frac{1}{2}\pi$ $n\in\mathbb{Z}$	$\sec x\ge 1$ 或 $\sec x\le -1$	2π

$y=\csc x$		$x\neq n\pi$ $n\in\mathbb{Z}$	$\csc x\geq 1$ 或 $\csc x\leq -1$	2π

NOTE ① $|\sin x|$，$|\cos x|$，$|\sec x|$，$|\csc x|$ 之週期為原函數週期 $\frac{1}{2}$ 倍。

② $|\tan x|$，$|\cot x|$ 之週期與原函數週期相同。

3. **週期與係數：**

原函數 $F(x)$ 之週期為 P，則 $aF(kx+b)+c$ 之函數圖形其

(1) 週期 $=\frac{P}{|k|}$。

(2) 振幅變成原來的 $|a|$ 倍。

(3) 圖形向上平移 c 單位。

(4) 圖形向左平移 $\frac{b}{|k|}$ 單位。

NOTE ①週期僅受自變數 x 之係數 k 影響，與 a、b、c 無關。

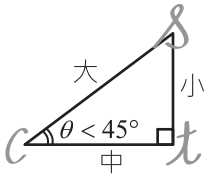
②以 $y=2\sin(3x+\pi)+1$ 為例，其週期為 $\frac{2\pi}{3}$，振幅為原來 2 倍，圖形向上平移 1 單位，向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位。

4. **三角函數值比較大小：**

(1) 同角度不同函數：

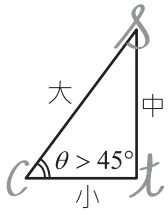
可化為銳角再由直角三角形邊長判定：

① $\theta<45°$



$$\begin{pmatrix}\sin\theta=\frac{小}{大} & \csc\theta=\frac{大}{小}\\ \cos\theta=\frac{中}{大} & \sec\theta=\frac{大}{中}\\ \tan\theta=\frac{小}{中} & \cot\theta=\frac{中}{小}\end{pmatrix}$$

② $\theta>45°$



$$\begin{pmatrix}\sin\theta=\frac{中}{大} & \csc\theta=\frac{大}{中}\\ \cos\theta=\frac{小}{大} & \sec\theta=\frac{大}{小}\\ \tan\theta=\frac{中}{小} & \cot\theta=\frac{小}{中}\end{pmatrix}$$

(2) 同函數不同角度：

可由圖形特徵判定：

① $\sin x$、$\cos x$ 這兩個函數圖形一定要會畫。

② $\tan x$ 圖形在同象限內恆為遞增函數，角度愈大函數值就愈大。

③ $\cot x$，$\sec x$，$\csc x$ 分別為 $\tan x$，$\cos x$，$\sin x$ 之倒數，其大小會與之相反。

難易度 ●●

01 老師講解 三角函數圖形 學生演練

畫圖求下列函數之週期和最大、最小值

$y=3\sin 2x+1$。

畫圖求下列函數之週期和最大、最小值

$y=3\cos\frac{x}{2}-1$。

難易度 ●

02 老師講解 三角函數週期 學生演練

試求下列三角函數之週期

(1) $y=2\sin\frac{x}{2}-3$　(2) $y=4\tan 2x+1$

(3) $y=3|\sec 2x|$　(4) $y=|\cot 3x|+2$。

求下列三角函數之週期

(1) $y=\cos\frac{x}{3}+2$　(2) $y=-2\cot\frac{x}{3}+1$

(3) $y=2|\sin 3x|-1$　(4) $y=|\tan 2x|$。

難易度

03 老師講解 方程式求三角函數值 學生演練

若 $3\sin^2\theta-5\cos\theta-1=0$，試求 $\cos\theta$。

若 $2\tan^2\theta-3\sec\theta=0$，試求 $\sec\theta$。

難易度

04 老師講解 三角函數比較大小 學生演練

比較下列各值大小

(1) $a=\sin 400°$、$b=\cos(-40°)$、$c=\cot 220°$、$d=\sec 50°$，試比較 a、b、c、d 大小。

(2) $a=\sin 20°$、$b=\cos 50°$、$c=\sin 35°$、$d=\tan 50°$，試比較 a、b、c、d 大小。

比較下列各值大小

(1) $a=\sin 130°$、$b=\cos 310°$、$c=\tan 230°$、$d=\sec(-50°)$，試比較 a、b、c、d 大小。

(2) $a=\sin 70°$、$b=\cos 40°$、$c=\cos 10°$、$d=\cot 35°$，試比較 a、b、c、d 大小。

自我挑戰

1. 求函數 $y=2\cos 3x-1$ 之週期和最大、最小值（可利用畫圖）：

   週期為＿＿＿＿、最大值為＿＿＿、最小值為＿＿＿＿。

2. 若 $f(x)=3\sin 2x$ 的週期為 A，$g(x)=5\tan\frac{x}{2}$ 的週期為 B，$h(x)=|\cos x|$ 的週期為 C，則 $A+B+C=$＿＿＿＿。

3. $2\cos^2\theta+3\sin\theta=0$，則 $\sin\theta=$＿＿＿＿。

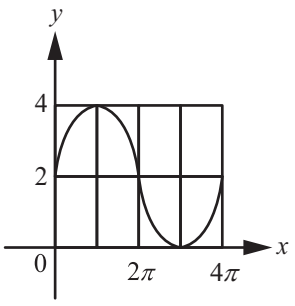
4. 設 $0\le x\le 2\pi$，若 $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$ 的最大值為 a，最小值為 b，則 (a,b) 為＿＿＿＿＿。

5. 下列何者為真？

   (A) $\sin 35°>\cos 45°$、(B) $\sec 47°>\tan 47°$、(C) $\tan 222°>\tan 223°$、(D) $\sin 65°<\cos 65°$。

   ＿＿＿＿。

素 6. 以正弦函數圖形模擬六月份旗津沿海潮汐概況，設 $b>0$，$y=a\sin(bx)+c$ 圖形如右，求 $a+b+c$ 之值為＿＿＿＿。



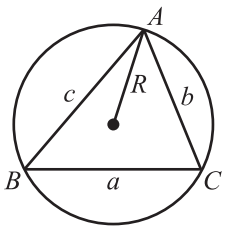
2-6 正弦定理與餘弦定理

重點　正弦定理與餘弦定理

1. **正弦定理：**

△ABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對邊長分別為 a、b、c，

△ABC 之外接圓半徑為 R，則



(1) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

(2) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$。

NOTE (a)正弦定理(1)使用時機：① 對角及其對邊（Aa 或 Bb 或 Cc）已知時 ② （R 與角）或（R 與邊）已知時。

(b)正弦定理(2)使用時機：由邊求 $\sin A:\sin B:\sin C$ 或由角求 $a:b:c$。

2. **餘弦定理：**

△ABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對邊長分別為 a、b、c，則

$$(1)\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{cases}\Rightarrow(2)\begin{cases}\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{cases}$$

NOTE (a)餘弦定理(1)使用時機：兩邊長及其夾角已知時可求第三邊。

(b)餘弦定理(2)使用時機：三邊長已知時可求任一角。

難易度 ●●

01　老師講解　正弦定理 (1)　學生演練

△ABC 中，已知 $\overline{AB}=\sqrt{3}$、$\angle C=60°$、$\angle B=45°$，試求：(1) $\overline{AC}$　(2) 外接圓半徑 R。

△ABC 中，已知 $\overline{BC}=4$、$\angle B=30°$、$\angle C=15°$，試求：(1) $\overline{AC}$　(2) 外接圓半徑 R。

難易度

02 老師講解 正弦定理(2) 學生演練

若 $\triangle ABC$ 中，三邊長分別為 a 、 b 、 c ，且 $(a+b):(b+c):(c+a)=5:6:7$ ，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$ 。

若 $\triangle ABC$ 中， $\angle A:\angle B:\angle C=1:1:4$ ，試求 $a:b:c$ 。

難易度

03 老師講解 餘弦定理(1) 學生演練

已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{BC}=5$ 、 $\angle B=120°$ ，試求 $\overline{AC}$ 長度。

已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC}=3$ 、 $\overline{AC}=4$ 、 $\angle C=60°$ ，試求 $\overline{AB}$ 長度。

難易度

04 餘弦定理 (2)

老師講解

已知 $\triangle ABC$ 中，$a=3$、$b=7$、$c=8$，試求：

(1) $\angle B$　(2) $\sec B$　(3)最小角之餘弦值。

學生演練

已知 $\triangle ABC$ 中，$a=4$、$b=5$、$c=6$，試求：

(1) 最小角之餘弦值　(2) $\sec A$　(3) $\cos B$。

難易度

05 餘弦定理應用

老師講解

於 $\triangle ABC$ 中，已知 $a^2+b^2=c^2+\sqrt{3}ab$，試求 $\angle C$。

學生演練

於 $\triangle ABC$ 中，已知 $(a-b)^2-c^2+3ab=0$，試求 $\angle C$。

補充　解三角形

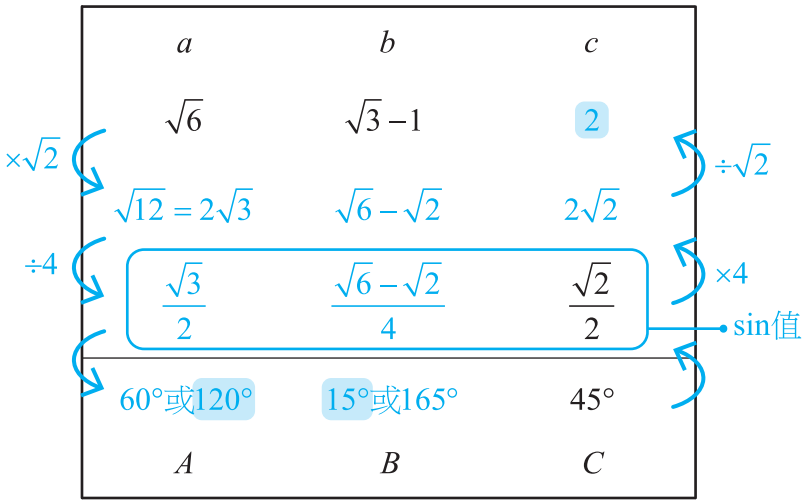
在 $\triangle ABC$ 中，三個邊 a、b、c 與三個角 A、B、C 只要任知其中三項（其中需包含一邊長），即可求得另外三項。求出 $\triangle ABC$ 之三邊三角的過程稱為解 $\triangle ABC$。交互使用正餘弦定理雖可解出三角形，但因解題條件不同需多次計算，過程十分繁複，在此我們可以正弦定理 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ 的性質，找出各式之比例關係，即可輕易求算，但**需熟記第一、二象限所有特別角的正弦函數值**：

$\sin 30°=\sin 150°=\frac{1}{2}$；　$\sin 45°=\sin 135°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；　$\sin 60°=\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

$\sin 75°=\sin 105°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$；　$\sin 15°=\sin 165°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$。

例如　已知 $\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{6}$、$b=\sqrt{3}-1$、$\angle C=45°$，試求 $\angle A$、$\angle B$、$\overline{AB}$。

先列出表格填入已知數據（黑色為已知，藍色為求算過程）：



說明　表中黑色為已知數據，邊在第一列，角在最下列，由第一列 $\times\sqrt{2}$ 再 $\div 4$ 湊出 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$、$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 等正弦值，可得 $\angle A=60°$ 或 $120°$、$\angle B=15°$ 或 $165°$。

再由已知 $\angle C=45°$ 得正弦值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，反向 $\times 4$ 再 $\div\sqrt{2}$ 即可求出邊長 $c=2$。

由 $\triangle ABC$ 大角對大邊性質知 $a>c>b$，所以 $\angle A>\angle C>\angle B$ 且 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，即可判斷 $\angle A=120°$、$\angle B=15°$。

難易度 🐾🐾🐾

06 解三角形

老師講解

$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=2$、$\overline{AC}=\sqrt{2}$、$\overline{AB}=\sqrt{3}-1$，試求 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$。

學生演練

$\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{6}$、$b=2$、$c=\sqrt{3}+1$，試求 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$。

難易度 🐾🐾🐾

07 解三角形

老師講解

$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$、$\overline{AC}=\sqrt{3}+1$、$\overline{AB}=2$，試求 $\overline{BC}$、$\angle B$、$\angle C$。

學生演練

$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$、$\overline{AC}=\sqrt{2}$、$\angle B=30°$，試求 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\angle C$。

重點　三角形面積公式

三角形面積求算：

$\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對邊長分別為 a、b、c，R 為 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑，r 為 $\triangle ABC$ 之內切圓半徑，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，則

(1) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$。

(2) $\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（海龍公式）。

(3) $\triangle ABC=\dfrac{abc}{4R}$。

(4) $\triangle ABC=rs$。

NOTE ①公式(1)之使用時機：
三角形兩邊長及其夾角已知時。（和餘弦定理(1)相同）
②公式(2)之使用時機：
三角形三邊長已知時。（和餘弦定理(2)相同）
③由註①②知餘弦定理可用之時機，均可求算三角形面積。
④公式(3)(4)多用以由三角形面積反求 R、r。

難易度 ●●

08　老師講解　三角形面積和餘弦定理　學生演練

已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=120°$、$b=1$、$c=2$，試求：
(1) $\triangle ABC$ 面積　(2) $\overline{BC}$ 長。

已知 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=3$、$\overline{AB}=2$、$\angle B=60°$，試求：
(1) $\triangle ABC$ 面積　(2) $\overline{AC}$ 長。

難易度 ●●

09 老師講解　三角形面積、海龍、R、r　學生演練

若 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=3$、$\overline{BC}=6$、$\overline{AC}=7$，試求：

(1) $\triangle ABC$ 面積　(2) 外接圓半徑 R

(3) 內切圓半徑 r。

若 $\triangle ABC$ 中，$a=4$、$b=5$、$c=7$，試求：

(1) $\triangle ABC$ 面積　(2) 外接圓半徑 R

(3) 內切圓半徑 r。

難易度 ●●

10 老師講解　面積公式求分角線長　學生演練

已知 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{AC}=6$、$\angle A=120°$，$\angle A$ 平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，試求 $\overline{AD}$ 長度。

已知 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=8$、$\overline{BC}=6$、$\angle B=60°$，$\angle B$ 平分線交 $\overline{AC}$ 於 D，試求 $\overline{BD}$ 長度。

自我挑戰

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60°$，$\angle B=75°$，$\overline{AB}=2$，則 $\overline{BC}$ 的長度為 _____。

2. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=8$，$\angle A=60°$，則 $\overline{BC}$ 的長度為 _____。

3. 若三角形中三邊長比值為 $3:5:7$，則最大角為 _____。

4. $\triangle ABC$ 中，$\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{3}:2$，則 $\sin A+\cos B+\sin C=$ _____。

5. 已知一圓的半徑為 10，則其內接正十二邊形的面積為 _____。

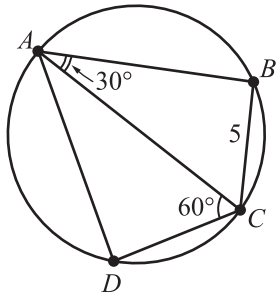
6. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=4$、$\angle A=120°$，若 $\angle A$ 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於一點 D，則 $\overline{AD}$ 長度為 _____。

7. 已知四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=8$、$\overline{BC}=3$、$\overline{AD}=5$，且 $\angle ABC=\angle ADC=60°$，則 $\overline{CD}$ 之長為 _____。

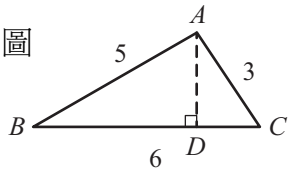
素 8. 一時鐘的時針長度為 3 公分，分針長度為 5 公分，試問從 8:00 到 8:20 時針針尖所移動的弧長為 _____ 公分。

素 9. 承上題，若時針針尖與分針針尖的距離為 7 公分，則時針與分針所夾的角度為 _____。

10. 圓內接四邊形 $ABCD$ 如右圖所示，已知 $\angle BAC=30°$、$\angle ACD=60°$、$\overline{BC}=5$，試求 $\overline{AD}=$ _____。



11. 已知三角形三邊長 $\overline{AB}=5$、$\overline{AC}=3$、$\overline{BC}=6$，如圖求 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}=$ _____。



12. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2$、$b=\sqrt{3}+1$、$\angle C=60°$，則 $\angle A=$ _____、$\angle B=$ _____、$\overline{AB}=$ _____。

歷屆試題

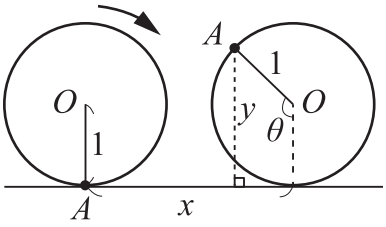
( ) 1. 若 $180° < \theta < 270°$ 且 $\sin\theta = \sin 2024°$，則 $\theta =$ ？

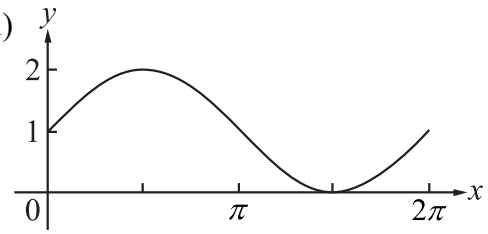
(A) $204°$　(B) $214°$　(C) $224°$　(D) $234°$。　【113(C)，答對率 69%】

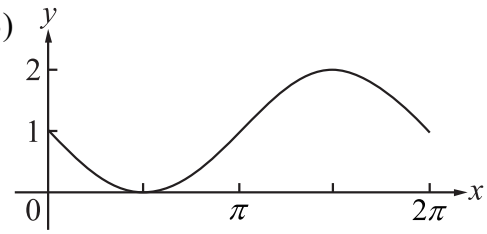
( ) 2. 已知 $\sin\theta\tan\theta < 0$ 且 $\cos\theta\cot\theta > 0$，則 θ 為第幾象限角？

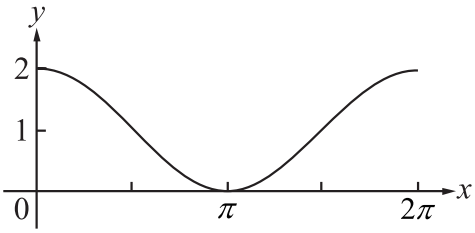
(A)一　(B)二　(C)三　(D)四。　【113(C)，答對率 51%】

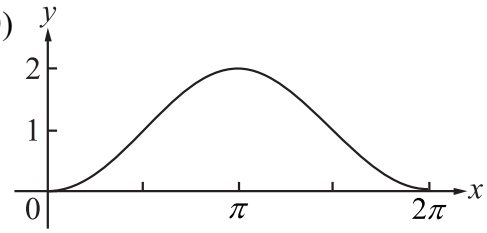
( ) 3. 有一個在水平地面上的圓形輪子，其半徑為1單位長。輪子上 A 點與地面接觸，如右圖所示，當輪子向右滾動，相對於圓心 O 而言，A 點以順時針轉動 θ 角，且輪子中心 O 前進 x 單位長的時候，A 點距離地面的高度為 y 單位長。在坐標平面上，若在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍中，y 可以表示為 x 的函數 $f(x)$，則下列圖形何者為 $y = f(x)$ 的圖形？



(A)


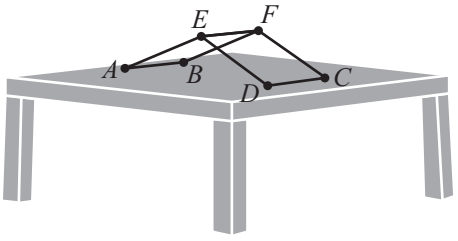
(B)


(C)


(D)


【113(C)，答對率 43%】

( ) 4. 有一款可調節角度的倒 V 型平板架，放置於平坦的桌面上，如示意圖所示。若 $\overline{EA} = \overline{ED} = 25\,\text{cm}$、$\overline{AB} = \overline{CD} = 18\,\text{cm}$ 且 $\angle AED = 120°$，則長方形 $ABCD$ 面積之值最接近下列哪一個選項（支柱厚度忽略不計）？



(A) $450\ \text{cm}^2$　(B) $450\sqrt{2}\ \text{cm}^2$

(C) $450\sqrt{3}\ \text{cm}^2$　(D) $900\ \text{cm}^2$。　【112(B)，答對率 46%】

(　　) 5. 阿青想了解港口 A 及港口 B 的潮汐變化，於某日凌晨 12 點整開始，經歷 t 小時後，測量港口 A 跟港口 B 的各特定點水深變化 y（單位：公尺），分別得到了：

港口 A： $y=4\sin(\frac{2\pi}{11}t)+16,\ t\geq 0$

港口 B： $y=-5\cos(\frac{2\pi}{13}t)+17,\ t\geq 0$

若滿潮代表水深升到最高以及乾潮代表水深降到最低，根據上述兩個函數，下列敘述何者正確？

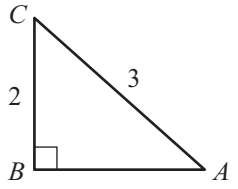
(A)港口 A 的滿潮高度為 20 公尺　(B)港口 A 的乾潮高度為 16 公尺

(C)港口 B 的滿潮高度為 17 公尺　(D)港口 B 的乾潮高度為 13 公尺。

【112(B)，答對率 24%】

(　　) 6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，如圖所示，且 $\overline{AC}=3$、$\overline{BC}=2$，則 $\tan A=$？

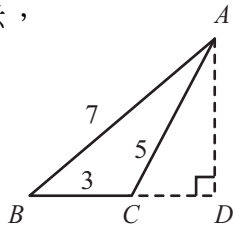
(A) $\frac{3}{\sqrt{5}}$　(B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$　(C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$　(D) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$。



【112(C)，答對率 62%】

(　　) 7. 已知 $\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=5$，如圖所示，試求 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}=$？

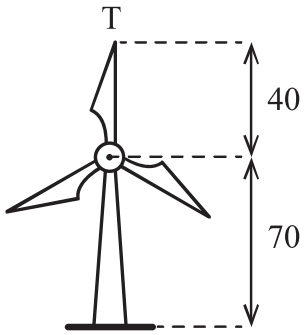
(A) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　(B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$。



【112(C)，答對率 44%】

(　　) 8. 假設風力發電的風車旋轉軸平行於地面，且有三葉片，T 點為某葉片的頂端，如圖所示，我們想了解 T 點在風車旋轉過程中距離地面的高度變化。已知風車逆時針方向等速旋轉一圈需時 4 秒，且每個葉片長度皆為 40 公尺，其旋轉中心離地面 70 公尺。若風車開始運轉時，T 點恰在離地面最高的位置上，且 x 秒後可用 $f(x)=40\sin(ax+\frac{\pi}{2})+70$（其中常數 $a>0$ 且 $0\leq x\leq 4$）來描述 T 點離地面的高度（單位：公尺），則 a 可為下列何者？

(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) $\frac{\pi}{2}$　(C) π　(D) $\frac{4\pi}{3}$。



【112(C)，答對率 34%】

(　　) 9. 下列何者<u>錯誤</u>？

(A) $y=|\sin 2x|$ 之週期為 $\frac{\pi}{2}$　(B) $y=3\sin x$ 之週期為 2π

(C) $y=\cos 2x$ 之週期為 $\frac{\pi}{2}$　(D) $y=4\cos x$ 之週期為 2π。【111(C)，答對率 41%】

( ) 10. 若 $\triangle ABC$ 三邊長為 4、5、6，則其外接圓直徑為何？

(A) $\frac{8}{\sqrt{7}}$　(B) $\frac{12}{\sqrt{7}}$　(C) $\frac{16}{\sqrt{7}}$　(D) $\frac{20}{\sqrt{7}}$。　【111(C)，答對率 36%】

( ) 11. 已知 $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，其中 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=2$，且 $\angle BAC$ 為鈍角。若 $\overline{BC}$ 的長度為 a，則 $a^2=$？

(A) $13-6\sqrt{2}$　(B) $13-2\sqrt{6}$　(C) $13+2\sqrt{6}$　(D) $13+6\sqrt{2}$。【111(C)，答對率 29%】

( ) 12. 若 $\tan\theta+\sec\theta=5$，則 $\tan\theta-\sec\theta=$？

(A) $-\frac{3}{5}$　(B) $-\frac{1}{5}$　(C) $\frac{1}{5}$　(D) $\frac{3}{5}$。　【110(C)，答對率 38%】

( ) 13. 若下列四選項中，其中有三個互為同界角，則下列何者不是另外三個選項的同界角？

(A) $-\frac{9\pi}{5}$　(B) $-36°$　(C) $\frac{\pi}{5}$　(D) $1116°$　【110(B)，答對率 47%】

( ) 14. 已知 $\tan\theta=\frac{7}{25}$。若 $\sin\theta\cos\theta=a$，則下列何者正確？

(A) $\frac{1}{2}<a<1$　(B) $0<a<\frac{1}{2}$　(C) $-\frac{1}{2}<a<0$　(D) $-1<a<-\frac{1}{2}$。

【110(B)，答對率 43%】

( ) 15. 下列敘述何者正確？

(A) $y=\tan\frac{\theta}{3}$的週期為 $\frac{\pi}{3}$　(B) $\tan^2\theta-\sec^2\theta=1$　(C) $-\sqrt{2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

(D)若 $\cos\theta=\sin\theta$，則 $\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi$，其中 n 為整數。　【110(C)，答對率 40%】

( ) 16. 若 θ 為第二象限角，且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$，則 $\cos\theta=$？

(A) $\frac{-3}{4}$　(B) $\frac{-\sqrt{5}}{4}$　(C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$　(D) $\frac{3}{4}$。　【109(B)，答對率 48%】

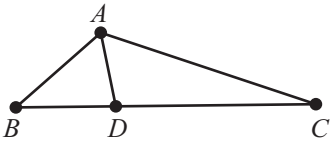
( ) 17. 若 $a=\tan 480°$，$b=\sec 135°$，$c=\cos(-60°)$，則下列有序數對何者在第二象限？

(A) (b,c)　(B) (a,b)　(C) (c,a)　(D) (c,b)。　【109(C)，答對率 42%】

( ) 18. 設函數 $f(x)=2\cos 3x-1, x\in[0,2\pi]$，若其圖形和 x 軸的交點個數與函數的最大值分別為 a、b，則 $ab=$？

(A) 6　(B) 9　(C) 12　(D) 18。　【109(C)，答對率 27%】

( ) 19. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，其中 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=6$，且 $\angle A=120°$，如右圖，則 $\overline{CD}=$？



(A) $\sqrt{26}$　(B) $3\sqrt{3}$　(C) $2\sqrt{7}$　(D) $\sqrt{7}$。　【109(C)，答對率 42%】

(　　) 20. 假設分針原始指在時鐘 12 的位置，現將分針依順時針的方向旋轉了 2019°。試問下列敘述何者正確？
(A) 分針指在 9 跟 10 之間　(B) 分針指在 7 跟 8 之間
(C) 分針指在 5 跟 6 之間　(D) 分針指在 3 跟 4 之間。【108(B)，答對率 66%】

(　　) 21. 當角度 θ 由 15° 上升至 75° 時，關於 $\tan\theta$ 之值的變化，下列敘述何者正確？
(A) 一直上升　(B) 一直下降
(C) 先上升後下降　(D) 先下降後上升。【108(B)，答對率 44%】

(　　) 22. 若 $a=\sin\theta$，則下列敘述何者恆為正確？
(A) $\sin(\theta+90°)=a$　(B) $\cos(\theta+90°)=a$
(C) $\sin(\theta+180°)=-a$　(D) $\cos(\theta+180°)=-a$。【108(B)，答對率 39%】

(　　) 23. 若點 $P(x,y)$ 為有向角 θ 終邊上一點且 $xy\neq 0$，則下列何者正確？
(A) $x\sin\theta>0$　(B) $y\cos\theta>0$　(C) $x\cot\theta>0$　(D) $y\csc\theta>0$。
【108(C)，答對率 28%】

(　　) 24. 已知扇形的面積為 1 且其周長為 5，試問此扇形的半徑為何？
(A) $\frac{2}{5}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2。【108(C)，答對率 39%】

(　　) 25. 有一梯子斜於牆上，且梯子、地面及牆面構成一個 30°、60°、90° 的直角三角形。若梯子沿牆面下滑 $\frac{1}{2}$ 公尺時，則梯子、地面及牆面構成一個 45°、45°、90° 的直角三角形。試問梯長為多少公尺？
(A) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　(C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$。【108(C)，答對率 30%】

(　　) 26. 若 $\sin\theta=\frac{33}{65}$，且 $\tan\theta=-\frac{33}{56}$，則 θ 為哪一象限角？
(A) 第一象限角　(B) 第二象限角　(C) 第三象限角　(D) 第四象限角。
【107(B)，答對率 57%】

(　　) 27. 若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，則 $\tan\theta+\sec\theta=$？
(A) $\frac{12}{35}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) 2　(D) $\frac{35}{12}$。【107(B)，答對率 55%】

(　　) 28. 若 $\tan\theta=\frac{8}{15}$，則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta=$？
(A) $\frac{514}{225}$　(B) $\frac{38}{15}$　(C) $\frac{64}{225}$　(D) $\frac{49}{625}$。【107(B)，答對率 40%】

(　　) 29. $\cos 0° + \cos 10° + \cos 20° + \cos 30° + \cdots + \cos 350° + \cos 360° = ?$

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3。　【107(C)，答對率 39%】

(　　) 30. 設三角形三邊長分別為 5、6、7，若三角形面積為 A，內切圓半徑為 r，則 $A \times r = ?$

(A) 24　(B) 35　(C) 105　(D) 210。　【107(C)，答對率 50%】

(　　) 31. 設三角形的三邊長為 7、24、25，其內切圓半徑為 r，外接圓半徑為 R，求 $\frac{r}{R} = ?$

(A) 0.12　(B) 0.24　(C) 0.25　(D) 0.48。　【106(C)，答對率 44%】

(　　) 32. 求 $\sin^2 18° + \sin^2 36° + \sin^2 54° + \sin^2 72° + \sin^2 90° = ?$

(A) 2　(B) 2.5　(C) 3　(D) 3.5。　【106(C)，答對率 62%】

(　　) 33. 若 $\tan\theta \csc\theta = -1 + 6\cos\theta$，其中 θ 為第三象限角，則 $\tan\theta = ?$

(A) $2\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $-\sqrt{3}$　(D) $-2\sqrt{2}$。　【106(C)，答對率 34%】