單元 15

# 積分

## 15-1 無窮數列的極限

### 重點 無窮數列的收斂與發散

1. **無窮數列的極限：**一個無窮數列$\langle a_n \rangle$，當 $n$ 趨近於無限大時，若 $a_n$ 的值趨近於某一固定且唯一的定值 $\alpha$，則稱數列$\langle a_n \rangle$的極限值為 $\alpha$，以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 表示。
2. **數列的收斂與發散：**一個無窮數列$\langle a_n \rangle$有極限值 $\alpha$，則稱$\langle a_n \rangle$為**收斂數列**，反之則稱為**發散數列**。
3. **無窮數列極限的性質：**設數列$\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$皆收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$，$k$ 為常數，則：

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k\alpha$。
   (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$。
   (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha - \beta$。
   (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$。
   (5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$（$\beta \neq 0$）。

難易度

**01 老師講解　判斷無窮數列的收斂與發散　學生演練**

| 老師講解 | 學生演練 |
| --- | --- |
| 觀察下列各數列是收斂或發散？若收斂則求出其極限值。<br>(1) $\langle n \rangle$　(2) $\left\langle -\dfrac{1}{n} \right\rangle$　(3) $\langle (-1)^n \rangle$。 | 觀察下列各數列是收斂或發散？若收斂則求出其極限值。<br>(1) $\langle 3 \rangle$　(2) $\left\langle \dfrac{(-1)^n}{n^2} \right\rangle$　(3) $\langle 3^n \rangle$。 |

難易度

**02** 老師講解 **求數列的極限** 學生演練

試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{2n^2-100}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2+10}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+10}{2n+100}$。

試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+2}{5n^3-2}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+10n^2-1}{5n^3+3n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+10n^2-1}{5n^2+3n}$。

NOTE **由老師講解 2 可發現：**

**若** $a_n=\dfrac{a\cdot n^r+\cdots}{b\cdot n^s+\cdots}$**，其中** $r$ **、** $s$ **分別為分子、分母的最高次數（為正整數或 0），**
**而** $a$ **、** $b$ **為最高次方的係數，且皆不為 0，則：**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}0 & ,r<s\text{（分母次數較高）}\\ \dfrac{a}{b} & ,r=s\text{（分母分子次數一樣）}\\ \text{不存在} & ,r>s\text{（分子次數較高）}\end{cases}$$。

難易度

03 老師講解　**求數列的極限**　學生演練

試求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n-1}{3n^2-2}+\frac{2n+1}{3n+100}\right)$。

試求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+n}{n^3-1}+\frac{4n^2+1}{2n^2+n}\right)$。

難易度

04 老師講解　**求數列的極限**　學生演練

試求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}\right)$。

試求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1}{n+1}-\frac{2n^2+3}{n}\right)$。

難易度

05 老師講解　**求極限值**　學生演練

試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ 之值。

試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ 之值。

難易度 🐾

**06** 老師講解 **已知極限值求原無窮數列** 學生演練

設 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^3+bn^2+3}{2n^2+1}=-2$，試求 $a$ 、 $b$ 之值。

設 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^3-bn^2-2}{3n^2+n}=\dfrac{1}{2}$，試求 $a$ 、 $b$ 之值。

難易度 🐾🐾🐾

**07** 老師講解 **無窮數列的極限（根式型）** 學生演練

試求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+n})$ 之值。

試求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+n+3})$ 之值。

## 重點　無窮等比數列

1. 根據公比 $r$ 範圍的不同，觀察無窮等比數列 $\langle r^n \rangle$ 是否收斂：

| 公比範圍 | 無窮等比數列 $\langle r^n \rangle$ | 極限值 | 數列收斂或發散 |
|---|---|---|---|
| $r>1$ | $\langle 2^n \rangle$：$2, 4, 8, 16, \cdots$ | $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n$ 不存在 | 發散 |
| $r=1$ | $\langle 1^n \rangle$：$1, 1, 1, 1, \cdots$ | $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$ | 收斂 |
| $0<r<1$ | $\left\langle (\frac{1}{2})^n \right\rangle$：$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ | $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ | 收斂 |
| $-1<r<0$ | $\left\langle (-\frac{1}{2})^n \right\rangle$：$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ | $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$ | 收斂 |
| $r=-1$ | $\langle (-1)^n \rangle$：$-1, 1, -1, 1, \cdots$ | $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ 不存在 | 發散 |
| $r<-1$ | $\langle (-2)^n \rangle$：$-2, 4, -8, 16, \cdots$ | $\lim\limits_{n\to\infty} (-2)^n$ 不存在 | 發散 |

2. 對於一個無窮等比數列 $\langle r^n \rangle$，
   (1) 當 $-1<r\le 1$ 時，$\langle r^n \rangle$ 為收斂數列。
   (2) 當 $r\le -1$ 或 $r>1$ 時，$\langle r^n \rangle$ 為發散數列。
3. 夾擠定理：若三個無窮數列 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$、$\langle c_n \rangle$ 滿足 $a_n \le b_n \le c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$。

難易度

**08　老師講解　無窮等比數列的收斂與發散　學生演練**

試判斷下列各無窮等比數列為收斂或發散：

(1) $\langle 2\times 3^n \rangle$　(2) $\langle 3\times(-1)^n \rangle$　(3) $\left\langle 2\times(-\frac{1}{3})^n \right\rangle$。

試判斷下列各無窮等比數列為收斂或發散：

(1) $\left\langle -5\times(\frac{3}{4})^n \right\rangle$　(2) $\langle -3 \rangle$　(3) $\left\langle 5\times(-\frac{4}{3})^n \right\rangle$。

難易度

09 老師講解 **求極限值** 學生演練

試求出下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{4^n+5^n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+2\times5^n}{5^{n-1}+5\times2^n}$。

試求出下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-3)^n}{6^n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n}+4^n}{5^n-2\times3^{2n}}$。

難易度

10 老師講解 **夾擠定理** 學生演練

已知 $(\dfrac{1}{4})^n\le a_n\le(\dfrac{1}{3})^n$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 之值。

已知 $5n-2\le na_n\le5n+3$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 之值。

單元 15

## 重點　無窮等比級數

1. 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，若 $\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$ 存在，則稱此級數為**收斂級數**，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$，反之，若 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在，則稱此級數為**發散級數**。

2. 根據公比 $r$ 範圍的不同，觀察無窮等比級數 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$ 是否收斂：

| 公比範圍 | 無窮等比級數 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$ | 極限值 | 數列收斂或發散 |
|---|---|---|---|
| $r>1$ | $\sum_{n=1}^{\infty}2^n=2+4+8+\cdots$ | $\sum_{n=1}^{\infty}2^n$ 不存在 | 發散 |
| $r=1$ | $\sum_{n=1}^{\infty}1^n=1+1+1+\cdots$ | $\sum_{n=1}^{\infty}1^n$ 不存在 | **發散** |
| $0<r<1$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n=S_1$<br>（老師講解 11(1)） | 收斂 |
| $-1<r<0$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n=S_2$<br>（學生演練 11(1)） | 收斂 |
| $r=-1$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+\cdots$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 不存在 | 發散 |
| $r<-1$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n=-2+4-8+\cdots$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n$ 不存在 | 發散 |

3. 一首項為 $a$，公比為 $r$ 的無窮等比級數 $S=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots$

(1) 當 $-1<r<1$ 時，級數收斂，$S=a+ar+ar^2+\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}\times(1-\lim_{n\to\infty}r^n)=\frac{a}{1-r}$。

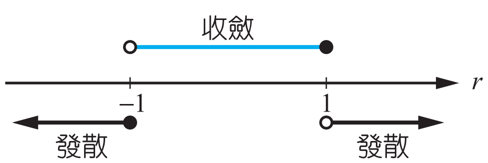
(2) 當 $r\le -1$ 或 $r\ge 1$ 時，級數發散，$S$ 無法求和。

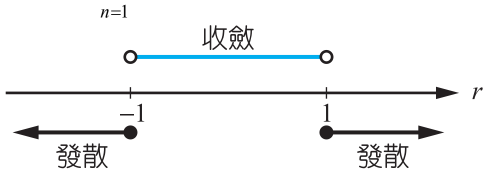
4. 無窮等比級數應用的解題要領：

Step1：找首項 $a_1$、公比 $r$；或找首項 $a_1$、第二項 $a_2$，再求出 $r=\frac{a_2}{a_1}$。

Step2：無窮等比級數和 $S=\frac{a_1}{1-r}$。

5. (1) 數列 $\langle a_1r^n\rangle$ 收斂 $\Leftrightarrow -1<r\le 1$。　(2) 級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_1r^n$ 收斂 $\Leftrightarrow -1<r<1$。



難易度

**11** 老師講解 **求無窮等比級數的極限值** 學生演練

試求下列各無窮等比級數的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ (2) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{4}{27}-\frac{8}{81}+\cdots$。

試求下列各無窮等比級數的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$ (2) $3-4+\frac{16}{3}-\frac{64}{27}+\cdots$。

難易度

**12** 老師講解 **無窮等比級數的和** 學生演練

試求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{5^n}$ 之值。

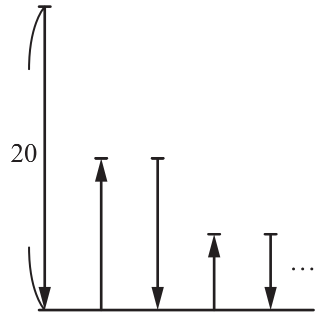
試求 $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}+\cdots$ 之值。

單元15

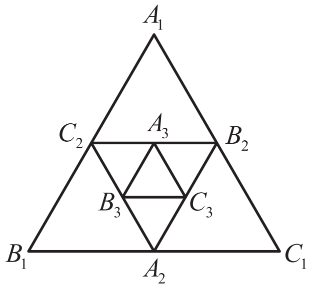
難易度

**13　老師講解　　無窮等比級數的應用　　學生演練**

若一皮球自離地面 20 公尺高處落下，每次返跳高度為其落下時高度的 $\frac{3}{5}$，則這皮球到靜止時所經過的距離為多少公尺？




設有一個邊長為 10 的正三角形 $\triangle A_1B_1C_1$，將其各邊中點連接起來，得第二個正三角形 $\triangle A_2B_2C_2$，再將 $\triangle A_2B_2C_2$ 的各邊中點連接起來，得第三個正三角形 $\triangle A_3B_3C_3$，依此類推，試求正三角形 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$，…的周長總和與面積總和。




難易度

**14　老師講解　　無窮數列與無窮級數收斂的範圍　　學生演練**

級數 $S=1+(4x-1)+(4x-1)^2+(4x-1)^3+\cdots$，

(1) 若此級數收斂，試求 $x$ 的範圍。

(2) 若 $S=3$，試求 $x$。

若 $\left\langle\left(\frac{2x-1}{3}\right)^n\right\rangle$ 為收斂數列，試求 $x$ 的範圍。

## 重點 循環小數

如 $0.\overline{3}=0.333\cdots$，$0.\overline{12}=0.1212\cdots$，$0.1\overline{23}=0.12323\cdots$這樣的小數稱做循環小數，循環小數是有理數，可以化為分數，而化為分數的方法有二：

【方法一】令 $x=0.\overline{3}=0.333\cdots$①

$\overset{\times 10}{\Rightarrow} 10x=3.333\cdots$②

將②－①$\Rightarrow 9x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

【方法二】$0.\overline{3}=0.333\cdots=0.3+0.03+0.003+\cdots$

$=\dfrac{0.3}{1-0.1}=\dfrac{0.3}{0.9}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

**NOTE** $c.a_1a_2\cdots a_n\overline{b_1b_2\cdots b_k}=c+\dfrac{a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_k-a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots9}_{k個9}\underbrace{00\cdots0}_{n個0}}$。

難易度 🐾

**15 老師講解　循環小數化分數　學生演練**

將下列循環小數化為分數：

(1) $0.\overline{520}$　(2) $1.5\overline{20}$。

試求 $0.\overline{5}+0.1\overline{5}$ 之值。

單元 15

## 自我挑戰

1. 判斷下列各數列為收斂數列或發散數列：

(1) $\left\langle \dfrac{n^2-1}{100n} \right\rangle$：______。　(2) $\left\langle \dfrac{1}{9}(-\sqrt{3})^n \right\rangle$：______。

(3) $\left\langle 3\times(-0.3)^n \right\rangle$：______。　(4) $\left\langle 0.03\times 2^n \right\rangle$：______。

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n+1}-\dfrac{n^2}{2n-1}\right)=$ ______。

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+4^n}{2\times 3^n+4^{n-1}}=$ ______。

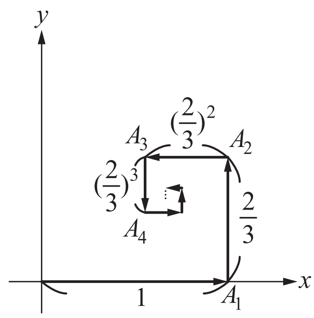
4. $2-\sqrt{2}+1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots=$ ______。

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+4n^2}+3}{4n}=$ ______。

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})=$ ______。

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n\theta}{n}=$ ______。

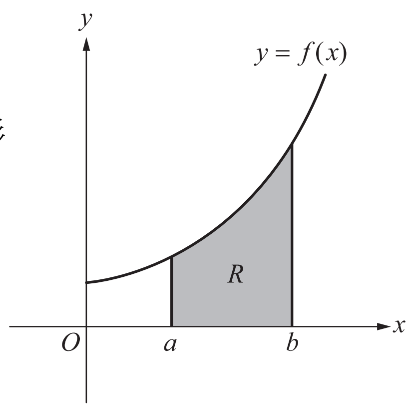
素 8. 有隻蝸牛從原點向右走 1 單位到 $A_1$ 點，再向上走 $\dfrac{2}{3}$ 單位到 $A_2$ 點，之後依照右圖的方式行走，已知每一次直角轉彎後的行進距離皆為前一次行進距離的 $\dfrac{2}{3}$，即 $\overline{A_2A_3}=(\dfrac{2}{3})^2$，$\overline{A_3A_4}=(\dfrac{2}{3})^3\cdots$，設 $A_n(X_n,Y_n)$，則 $(\lim\limits_{n\to\infty}X_n,\lim\limits_{n\to\infty}Y_n)=$ ______。




# 15-2 積分的概念與反導函數



### 重點　定積分與面積




1. **黎曼和**：多項式函數 $y=f(x)$（$f(x)\ge 0$ 且連續）的圖形與 $x$ 軸及直線 $x=a$、$x=b$ 所圍成的區域面積 $R$ 為何？

Step1： 將 $[a,b]$ 平分 $n$ 等分，每段寬度為 $\dfrac{b-a}{n}$

上和 $U_n=$ 上矩形的面積總和

$=\dfrac{b-a}{n}(M_1+M_2+\cdots+M_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta x$，

其中 $M_i$ 為每一段區間內函數的最大值。

下和 $L_n$ = 下矩形的面積總和

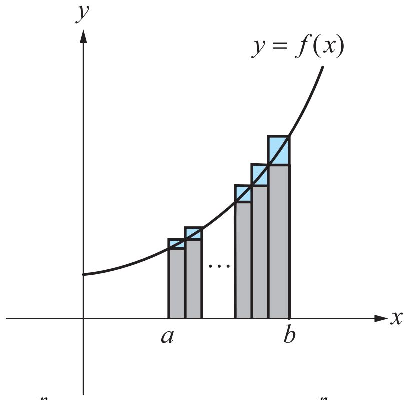
$$=\frac{b-a}{n}(m_1+m_2+\cdots+m_n)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x \text{，}$$

其中 $m_i$ 為每一段區間內函數的最小值。

可知 $L_n \le$ 區域面積 $R \le U_n$

Step2：使 $n\to\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty} U_n=\lim\limits_{x\to\infty} L_n$

由夾擠定理得 $R=\lim\limits_{x\to\infty} U_n=\lim\limits_{x\to\infty} L_n$。




2. 將一個在 $[a,b]$ 連續且有定義的函數，同上定義上和 $U_n=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x$，下和 $L_n=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x$，當 $n\to\infty$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty} U_n=\lim\limits_{n\to\infty} L_n$，將此極限值稱為連續函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 的**定積分**，記做 $\int_a^b f(x)dx$，其中 $f(x)$ 稱做被積分函數，$a$ 稱做下限，$b$ 稱做上限，亦即

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x$$

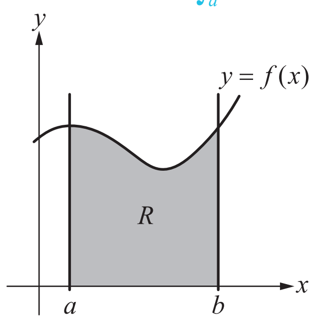
$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$$

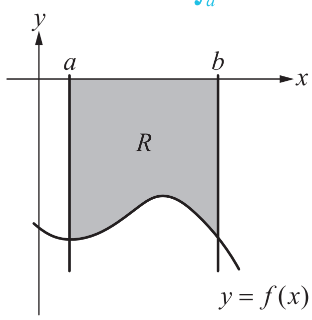
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

3. **定積分與面積的關係：**

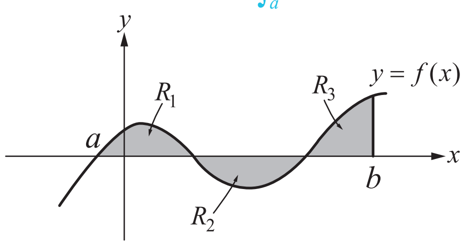
(1) 一個連續且有定義的函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 與 $x$ 軸圍成的區域面積為 $R$，則：

① 當 $f(x)\ge 0$，$\int_a^b f(x)dx=R$。　　② 當 $f(x)\le 0$，$\int_a^b f(x)dx=-R$。




(2) 當 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 有正有負時，定積分 $\int_a^b f(x)dx=R_1-R_2+R_3$




4. 在敘述定積分的性質前，先定義兩個定積分式：$\int_a^a f(x)dx=0$ 及 $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

5. **定積分的性質：** 若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上都是連續函數，$k$ 為常數，則：

(1) $\int_a^b kdx=k(b-a)$。

(2) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$。

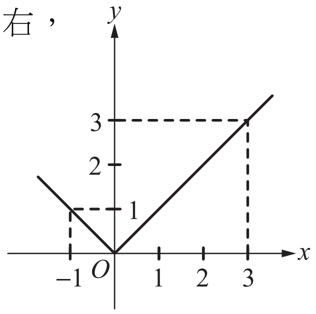
(3) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$。

(4) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$。

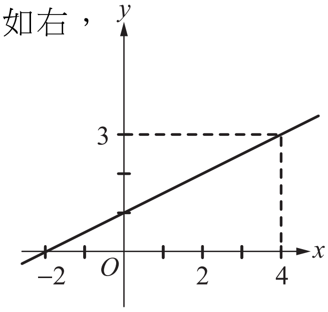
難易度

**01**　**老師講解**　**定積分與面積**　**學生演練**

已知 $f(x)=|x|$ 的圖形如右，利用面積求出定積分 $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ 之值。



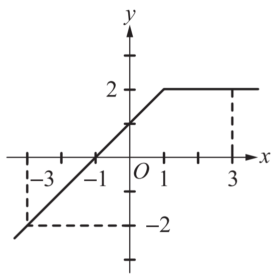

已知 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$ 的圖形如右，利用面積求出定積分 $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ 之值。



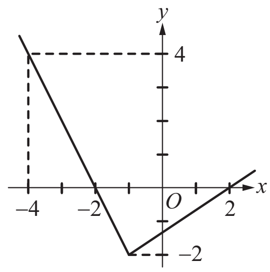

難易度

**02**　**老師講解**　**定積分與面積**　**學生演練**

設函數 $f(x)$ 的圖形如右，試求 $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ 之值。




設函數 $f(x)$ 的圖形如右，試求 $\int_{-4}^{2} f(x)dx$ 之值。



難易度

03 老師講解　**定積分的運算性質**　學生演練

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[-2,3]$ 上是連續函數，且 $\int_{-2}^{1} f(x)dx = 3$、$\int_{1}^{3} f(x)dx = -1$、$\int_{-2}^{0} g(x)dx = 2$、$\int_{3}^{0} g(x)dx = 3$，試求 $\int_{-2}^{3}[3f(x)-2g(x)]dx$ 之值。

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[-1,5]$ 上是連續函數，且 $\int_{-1}^{5} f(x)dx = -3$、$\int_{3}^{5} f(x)dx = 1$、$\int_{-1}^{2} g(x)dx = 3$、$\int_{3}^{2} g(x)dx = 4$，試求 $\int_{-1}^{3}[2f(x)+3g(x)]dx$ 之值。

## 重點　反導函數與不定積分

1. **反導函數：** 設 $F(x)$ 的導函數為 $f(x)$，即 $F'(x) = f(x)$，則 $F(x)$ 稱為 $f(x)$ 的**反導函數**，
例如 $F_1(x) = x^2 - 3x$、$F_2(x) = x^2 - 3x + 1$、$F_3(x) = x^2 - 3x + \pi$，
$F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = 2x - 3 = f(x)$，可發現反導函數不唯一，只差在常數項，故 $f(x)$ 的反導函數為 $F(x) = x^2 - 3x + c$，其中 $c$ 為任意實數。
2. **不定積分：** 反導函數也稱做**不定積分**，以 $\int f(x)dx$ 表示所有的反導函數，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的反導函數，則 $\int f(x)dx = F(x) + c$，其中 $c$ 為任意實數。
3. **不定積分的公式與性質：**
(1) 不定積分的公式：
① 若 $k$ 為常數，則 $\int kdx = kx + c$，$c$ 為任意實數。
② $\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$，其中 $n \neq -1$，$c$ 為任意實數。

**NOTE** 微分有多項式乘法與除法的微分公式，但積分沒有，積分只能逐項積。

(2) 不定積分的性質：
① 若 $k$ 為常數，則 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$。
② $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$。
4. **代換積分：** 當被積分函數的括號次方展開較為麻煩，亦或者根號無法化為單項時，可令括號內的函數為新變數的一種積分方法。

單元 15

難易度

04 老師講解　**不定積分**　學生演練

試求下列各不定積分：

(1) $\int (x^3+2x^2+3x+4)dx$

(2) $\int (\frac{2}{x^3}+3\sqrt{x})dx$ 。

試求下列各不定積分：

(1) $\int (2x^4-3x^2-1)dx$

(2) $\int (\frac{3}{x^2}+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}})dx$ 。

難易度

05 老師講解　**不定積分**　學生演練

試求下列各不定積分：

(1) $\int (3x+2)(2x-1)dx$　(2) $\int \frac{7x^3+3x}{\sqrt{x}}dx$ 。

試求下列各不定積分：

(1) $\int (2x+3)^2dx$　(2) $\int \frac{x^4+\sqrt{x}-1}{x^2}dx$ 。

難易度

06 老師講解 **代換積分** 學生演練

試求 $\int (2x-3)^5 dx$ 。

試求 $\int (3-4x)^{10} dx$ 。

難易度

07 老師講解 **代換積分** 學生演練

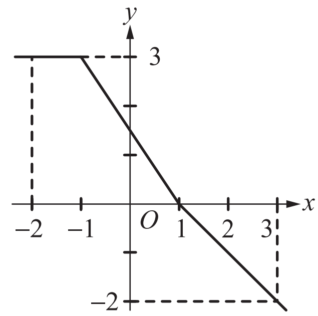
試求 $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2-1}} dx$ 。

試求 $\int [(2x+1)(x^2+x-3)^5] dx$ 。

單元15

## 自我挑戰

1. 函數 $f(x)$ 的圖形如右圖所示，則 $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ 之值為______。




2. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $[-3,2]$ 上是連續函數，且 $\int_{-3}^{-1} f(x)dx=-3$、$\int_{2}^{-1} f(x)dx=2$、$\int_{-3}^{0} g(x)dx=4$、$\int_{0}^{2} g(x)dx=-1$，試求 $\int_{-3}^{2}[f(x)-3g(x)]dx=$______。

3. 試求不定積分 $\int(2x-1)(x+2)dx=$______________。

4. 試求不定積分 $\int(\frac{1-3x^2}{x^2})dx=$__________。

5. 試求不定積分 $\int x(x-2)^{10}dx=$________________。

# 15-3 積分的應用

## 重點 微積分基本定理

1. 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，而 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的一個反導函數（即 $F'(x)=f(x)$），則 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$。
2. 代換積分法求定積分：求定積分時，當被積分函數的括號次方較不好展開時，可使用「代換積分」，但最後不需將 $u$ 還原成 $x$，直接找出新變數 $u$ 的上限與下限計算定積分值即可。

難易度

**01** 老師講解 **定積分** 學生演練

試求下列各定積分之值：

(1) $\int_{-1}^{2}(3x^2-2x+1)dx$ (2) $\int_4^9(\frac{x+1}{\sqrt{x}})dx$。

試求下列各定積分：

(1) $\int_{-2}^{1}(x+3)^2dx$ (2) $\int_1^3(\frac{4x^3+2x^2-1}{x^2})dx$。

難易度

## 02 老師講解　絕對值函數的定積分　學生演練

試求 $\int_{-3}^{1}|x+1|\,dx$ 之值。

試求 $\int_{0}^{2}|2x-1|\,dx$ 之值。

單元 15

NOTE　被積分函數為一次絕對值時，利用【方法二】面積解法較為快速。

難易度

03 老師講解 代換積分求定積分 學生演練

試求 $\int_{-1}^{0}(2x+1)^{10}dx$ 之值。

試求 $\int_{0}^{1}(2-3x)^{6}dx$ 之值。

難易度

04 老師講解 代換積分求定積分 學生演練

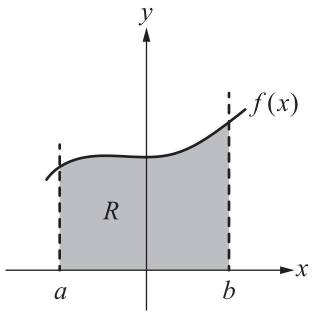
試求 $\int_{1}^{\sqrt{6}}\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$ 之值。

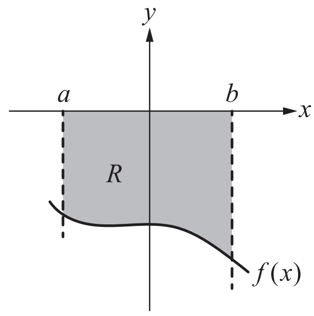
試求 $\int_{0}^{1}\frac{x}{(3x^2+1)^2}dx$ 之值。

## 重點　定積分的應用

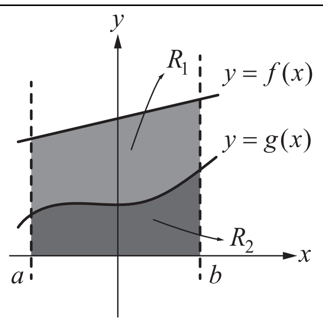
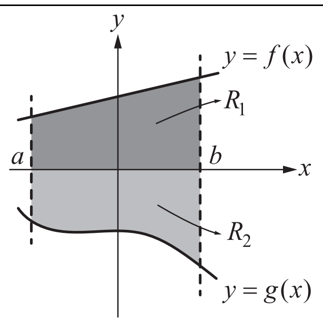
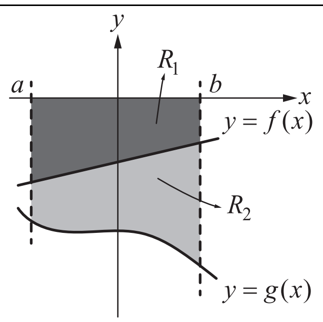
1. 求曲線與 $x$ 軸所圍成的區域面積：$f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為連續函數，$y=f(x)$ 的圖形與 $x=a$、$x=b$ 及 $x$ 軸圍成區域面積 $R$，則：

   (1) 當 $f(x)\ge 0$，$R=\int_a^b f(x)dx$　　(2) 當 $f(x)\le 0$，$R=-\int_a^b f(x)dx$。




2. 求兩曲線所圍成的區域面積：若 $f(x)$、$g(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為連續函數，且 $f(x)\ge g(x)$，則兩曲線 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在區間 $[a,b]$ 所圍成的區域面積為 $\int_a^b (f(x)-g(x))dx$。

| 令 $f(x)$ 與 $x$ 軸所圍成的區域面積為 $R_1$，$g(x)$ 與 $x$ 軸所圍成的區域面積為 $R_2$ | | |
|---|---|---|
| (1) $f(x)\ge g(x)\ge 0$ | (2) $f(x)\ge 0\ge g(x)$ | (3) $0\ge f(x)\ge g(x)$ |
|  |  |  |
| $R=R_1-R_2$<br>$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$<br>$=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ | $R=R_1+R_2$<br>$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b [-g(x)]dx$<br>$=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ | $R=R_2-R_1$<br>$=\int_a^b [-g(x)]dx-\int_a^b [-f(x)]dx$<br>$=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ |

**NOTE**　將已知的兩曲線畫出所圍區域，區域面積 $=\int_a^b$(上曲線 − 下曲線)$dx$。

單元 15

難易度

05 老師講解 **求 $f(x)$ 與 $x$ 軸所圍成的區域面積** 學生演練

設 $f(x)=x^2-x-2$，試求 $f(x)$ 與 $x$ 軸所圍成的區域面積。

設 $f(x)=-x^2+4$，試求 $f(x)$ 與 $x$ 軸所圍成的區域面積。

難易度

06 老師講解 **求 $f(x)$ 與 $x$ 軸所圍成的區域面積** 學生演練

設 $f(x)=x^2-9$，試求 $f(x)$ 的圖形與 $x=-1$、$x=4$ 及 $x$ 軸所圍成的區域面積。

設 $f(x)=-x^2+2x$，試求 $f(x)$ 的圖形與 $x=-1$、$x=1$ 及 $x$ 軸所圍成的區域面積。

難易度

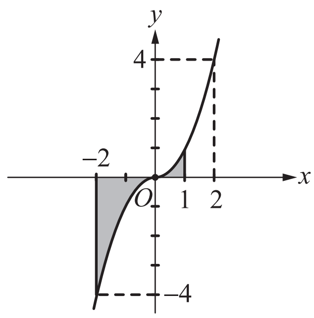
## 07 老師講解　求 $f(x)$ 與 $g(x)$ 所圍成的區域面積　學生演練

設 $f(x)=x^2-2$、$g(x)=2x+1$，試求 $f(x)$ 與 $g(x)$ 所圍成的區域面積。

設 $f(x)=x^2+1$、$g(x)=1-3x$，試求 $f(x)$ 與 $g(x)$ 所圍成的區域面積。

## 自我挑戰

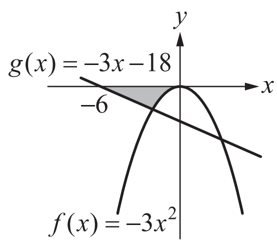
1. $\int_{-1}^{1}(3x+2)^2dx-\int_{-1}^{1}(3x-1)^2dx=$ ______。




2. 已知函數 $f(x)=\frac{1}{2}x^3$ 的圖形為右圖，則圖中陰影部分面積為 ______。

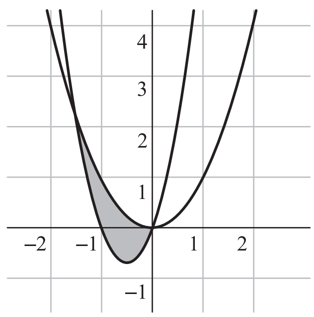
3. 函數 $f(x)=x^2+1$ 與 $x=-1$、$x=2$ 及 $x$ 軸所圍成的區域面積為 ______。

4. 在坐標平面上，由拋物線 $y=3x(x-2)$ 與 $x$ 軸所圍成的區域面積為 ______。




5. 試求右圖中陰影部份的面積為 ______。

6. 設 $f(x)=2x^2-9$、$g(x)=3-x^2$，試求 $f(x)$ 與 $g(x)$ 所圍成的區域面積為 ______。




素 7. 泰泰集團的商標 Logo 是由兩條拋物線 $f(x)=x^2$、$g(x)=3x^2+3x$ 所圍成的區域設計而成，如右圖陰影處，則此 Logo 面積為 ______。

# 歷屆試題

( 　　 ) 1. 若 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1\,,\,0\le x<1\\ x^2+x\,,\,1\le x\le 2\end{cases}$，則 $\int_0^2 f(x)\,dx=$？

(A) $\frac{9}{2}$　(B) $\frac{11}{2}$　(C) $\frac{13}{2}$　(D) $\frac{19}{3}$。　【113(C)，答對率 36%】

( 　　 ) 2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2-n}{n+1}-\frac{n^2+3n}{n+2})=$？

(A) 0　(B) $-1$　(C) $-2$　(D) $-3$。　【113(C)，答對率 30%】

( 　　 ) 3. 兔子和烏龜在一條筆直的路上賽跑，起點到終點的距離為 2000 公尺，兔子和烏龜同時從起點出發，烏龜從頭到尾都是以 250 公尺/小時的速度前進。半小時過後，兔子已經到了離起點 600 公尺處，發現烏龜還在後面慢慢地爬，兔子認為比賽太輕鬆了，於是就地睡覺，結果兔子睡了 6.5 小時。當兔子醒來發現烏龜已經超過牠了，兔子立刻以 $v(t)=27t^2+52t+1262$（公尺／小時）的速度去追趕，其中 $t\ge 0$。若烏龜先到達終點，則此時兔子離終點還有多少公尺？

(A) 57　(B) 82　(C) 103　(D) 158。　【112(C)，答對率 28%】

( 　　 ) 4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+8n-3}-\sqrt{n^2+2n+5})=$？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3。　【112(C)，答對率 21%】

( 　　 ) 5. 不定積分 $\int\frac{x+3}{2\sqrt{x}}dx=$？

(A) $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}}+C$　(B) $\frac{\frac{x^3}{2}+3x}{x^{\frac{3}{2}}}+C$　(C) $\frac{\frac{x^2}{2}+3x}{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}+C$　(D) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+C$。

【111(C)，答對率 28%】

( 　　 ) 6. 小明計畫由基隆沿國道一號開車南下高雄渡假。早上 8:00 經過中興隧道 0 公里處的起點，經紀錄儀錶板上車速變化，在 8:00 開始後，時間 $t$（小時）的速度函數為 $v(t)=-1.5t^2+6t+90$（公里／小時）。若依此速度變化，則 11:00 時小明應該最接近哪一個服務區？

(A) 泰安服務區（158 公里處）　(B) 西螺服務區（229 公里處）
(C) 新營服務區（284 公里處）　(D) 仁德服務區（335 公里處）。

【111(C)，答對率 43%】

( 　　 ) 7. 已知兩多項式函數 $g(x)$ 及 $h(x)$ 之導函數分別為 $g'(x)$ 及 $h'(x)$，且 $h(x)=4g(x)-7x+9$。若 $g'(0)=3$，則 $h'(0)=$？

(A) 5　(B) 9　(C) 14　(D) 21。　【110(B)，答對率 33%】

(　　) 8. 若 $f(x)=(x^2+1)^{100}$，則 $\int_0^1[2x+f(x)]dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^0 f(x)dx=?$

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3。　【110(B)，答對率 33%】

(　　) 9. $\int_1^3(3x-2)^{110}\,dx=?$

(A) $\frac{7^{111}-1}{333}$　(B) $\frac{3^{111}-1}{333}$　(C) $\frac{7^{110}-1}{330}$　(D) $\frac{7^{111}-1}{111}$。　【110(C)，答對率 36%】

(　　) 10. $\int_1^4(x+\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}-\frac{1}{x})\,dx=?$

(A) $\frac{57}{5}$　(B) $\frac{77}{5}$　(C) $\frac{87}{5}$　(D) $\frac{107}{5}$。　【110(C)，答對率 32%】

(　　) 11. 求 $\int_{-2}^2(30x^5-16x^7-20x^3)dx=?$

(A) $-192$　(B) $-6$　(C) 0　(D) 192。　【109(B)，答對率 48%】

(　　) 12. 設 $g(x)=2x-1$，已知在閉區間 $[-1,1]$ 上 $f(x)\geq 1$ 且 $\int_{-1}^1 f(x)dx=5$，則此兩曲線 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在閉區間 $[-1,1]$ 所圍成區域的面積為何？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7。　【109(C)，答對率 25%】

(　　) 13. 設函數 $f(x)=3x^2+2x+1$。試問曲線 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 之間與 $x$ 軸所包圍之區域的面積為何？

(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 11。　【108(B)，答對率 42%】

(　　) 14. 已知 $F(x)=\frac{d}{dx}[\int_1^x(t^2+1)dt]$，則 $F(1)=?$

(A) $-1$　(B) 0　(C) 1　(D) 2。　【108(C)，答對率 27%】

(　　) 15. 計算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})=?$

(A) $\frac{3}{2}$　(B) 1　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{8}$。　【108(C)，答對率 23%】

(　　) 16. $\int_{-4}^0|2x+5|\,dx=?$

(A) $\frac{17}{2}$　(B) 8　(C) $\frac{17}{4}$　(D) 4。　【107(C)，答對率 29%】

(　　) 17. 求定積分 $\int_0^2 6x(x^2-1)^2dx$ 之值

(A) 24　(B) 26　(C) 28　(D) 30。　【106(B)，答對率 39%】

(　　) 18. 設 $f(x)$ 為多項式函數，若 $\int_1^3 f(x)dx=1$、$\int_2^5 f(x)dx=4$ 且 $\int_2^3 f(x)dx=2$，則 $\int_1^5 f(x)dx=?$

(A) 1　(B) 3　(C) 5　(D) 7。　【106(C)，答對率 52%】

單元 15