



14-1

函數的極限



重點

函數的極限

1. 函數的極限：對於函數 $y = f(x)$ ，「當 x 趨近實數 a 時 ($x \neq a$)， $f(x)$ 的函數值也會趨近 L 」，即 $x \rightarrow a$ ($x \neq a$)，則 $f(x) \rightarrow L$ ，我們稱 x 趨近 a 時， $f(x)$ 的極限是 L ，記做 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

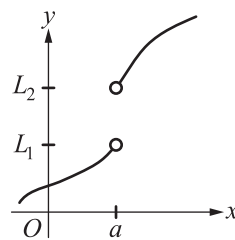


圖 (一)

2. 左極限與右極限：

(1) 左極限：當 $x < a$ 且 $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow a^-$) 時， $f(x) \rightarrow L_1$ ，我們稱 L_1 為 $f(x)$ 於 a 的左極限，記做 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ ，如圖 (一)。

(2) 右極限：當 $x > a$ 且 $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow a^+$) 時， $f(x) \rightarrow L_2$ ，我們稱 L_2 為 $f(x)$ 於 a 的右極限，記做 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ ，如圖 (一)。

(3) 當 $f(x)$ 於 a 的左極限等於右極限且等於 L 時，則函數 $f(x)$ 於 a 的極限是 L ，反之亦然。即 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ，

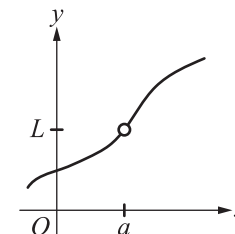
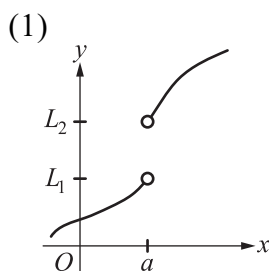


圖 (二)

如圖 (二)。

3. 以下三個函數的 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 是否存在？

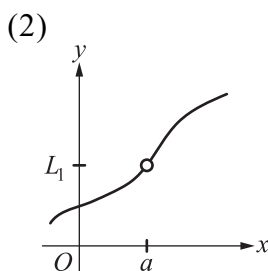


$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

$$\therefore L_1 \neq L_2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 不存在}$$

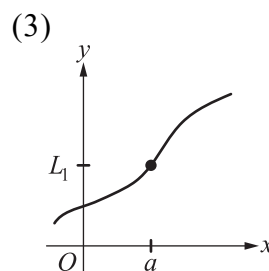


$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$$



NOTE 極限值的存在與函數值的存在與否並無關係，實心與空心皆不影響極限值存在與否之判斷。

難易度 🐾



01 老師講解

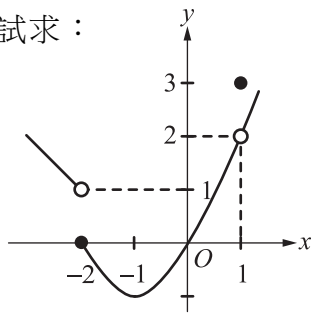
由圖形判斷函數的極限值

學生演練

函數 $f(x)$ 的圖形如右，試求：

(1) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

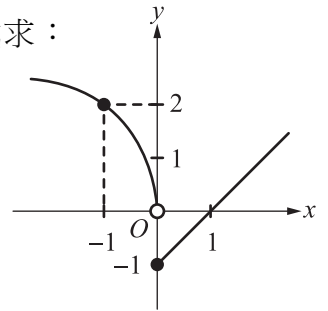
(2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 。



函數 $f(x)$ 的圖形如右，試求：

(1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。



難易度 🐾



02 老師講解

左極限與右極限

學生演練

設 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 之值。

設 $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 之值。

**重點****函數極限的求法與運算性質**

- 多項式型**：設 a 為實數，且 $f(x)$ 為實係數多項式函數，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，即極限值為 $x = a$ 代入所得的函數值。
- 分式型**：設 a 為實數，且 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為兩實係數多項式函數，計算 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 之值：
 - 若 $g(a) \neq 0$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ 。
 - 若 $g(a) = 0$ 、 $f(a) \neq 0$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。
 - 若 $g(a) = 0$ 、 $f(a) = 0$ ，即 $\frac{0}{0}$ 的不定型，將分母、分子因式分解，約去公因式 $x - a$ ，再將 $x = a$ 代入求得極限值。
- 根式型**：設 a 為實數，將 $x = a$ 代入根式，出現 $\infty - \infty$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 $\frac{0}{0}$ 等不定型，則乘除其有理化因式，約去公因式 $x - a$ ，再將 $x = a$ 代入求得極限值。
- 極限運算的性質**：設 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 、 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ， k 為一常數，則
 - $\lim_{x \rightarrow a} k = k$
 - $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kL$
 - $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$
 - $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \times M$
 - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$ ($M \neq 0$)
- 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 分別為 $\infty - \infty$ 、 $0 \times \infty$ 的不定型時，需先化簡再求極限值。

難易度

03

老師講解

函數的極限值

學生演練



試求出下列各函數的極限：

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)$ (2) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - x^2 + 1)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x-1}$ 。

試求下列各函數的極限：

(1) $\lim_{x \rightarrow -2} (-x^2 + 3)$ (2) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x}$ 。

難易度 🐾🐾



04 老師講解

分式型的極限值

學生演練

試求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$ 之值。

試求 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 3x + 2}$ 之值。

難易度 🐾🐾



05 老師講解

根式型的極限值

學生演練

試求 $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ 之值。

試求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$ 之值。

難易度 🐾🐾🐾

06 老師講解

不定型求極限

學生演練



試求下列各式極限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 + 3x} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \left[\left(\frac{3}{x-2} \right) \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \right) \right]。$$

試求下列各式極限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{x} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} \right) \right]。$$

難易度 🐾🐾

07 老師講解

函數極限的應用

學生演練



若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1} = 1$ ，試求 a 、 b 之值？

若 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + ax + b}{x + 3} = -2$ ，試求 a 、 b 之值？



重點

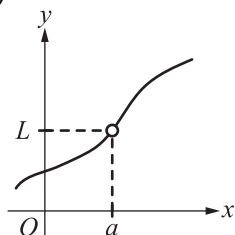
函數的連續

1. 若 $f(x)$ 滿足下列三個條件：

- (1) $f(a)$ 存在 (函數值存在)
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在 (極限值存在)
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (極限值等於函數值)

則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 處連續。

(i)

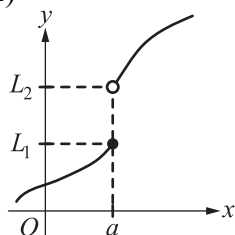


$\therefore f(a)$ 不存在

$\therefore f(x)$ 在 $x = a$

不連續

(ii)



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$

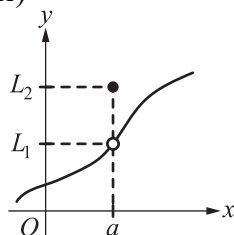
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 不存在}$$

$\therefore f(x)$ 在 $x = a$ 不連續

(iii)



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$$

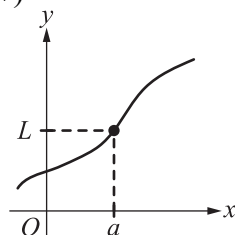
$$f(a) = L_2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

$\therefore f(x)$ 在 $x = a$

不連續

(iv)



$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = L$$

$\therefore f(x)$ 在 $x = a$ 連續

2. 若函數 $f(x)$ 在 (a, b) 中每一點都連續，則稱 $f(x)$ 在 (a, b) 連續。

難易度



08

老師講解

判斷 $f(x)$ 在 $x = a$ 處是否連續？

學生演練

若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ ，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 處是否

連續？

若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$ 在 $x=2$ 處連續，則

k 之值為何？

難易度

09 老師講解

連續函數

學生演練

若 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + k, & x \leq -1 \\ kx - 4, & x > -1 \end{cases}$ 為連續函數，試求 k 之值為何？

若 $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < -2 \\ ax + b, & -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 3, & x \geq 0 \end{cases}$ 為連續函數，則 a 、 b 之值為何？



自我挑戰



1. 已知函數 $f(x)$ 的圖形如右，試求下列各小題：

(1) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$;
 $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

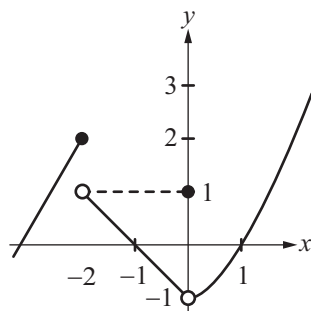
(2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$;
 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 試求 $\lim_{x \rightarrow -2} 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 試求 $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 試求 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{8}{x^2-4} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 若 $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x \geq 2 \\ x^2+ax+b, & -1 \leq x < 2 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$ 為連續函數，則 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



14-2

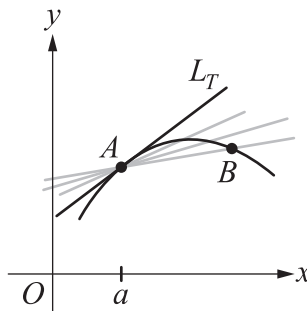
多項式函數的導數與導函數



重點

導數的定義

1. 割線與切線：函數 $f(x)$ 的圖形如右，通過定點 $A(a, f(a))$ 與任意點 $B(x, f(x))$ 兩點的直線 L （割線）斜率為 $m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ，當 B 點沿著函數圖形逐漸靠近 A 點時，割線 L 的斜率會逐漸趨近通過 A 點的切線 L_T 的斜率 m_T ，故切線斜率 $m_T = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 。



2. 導數的定義（一）：

(1) 對於函數 $f(x)$ ，若極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在，則稱此極限為 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的導數，記做 $f'(a)$ 。

(2) 通過函數 $y = f(x)$ 圖形上一點 $A(a, f(a))$ 的切線斜率為 $m_T = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ 。

(3) 若導數 $f'(a)$ 存在，則稱做函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處可微分。

3. 導數的定義（二）：

$f(x)$ 在 $x = a$ 處的導數 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ，令 $x - a = h$ ，則 $x = a + h$ ，

且當 $x \rightarrow a$ 時， $h \rightarrow 0$ ， $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ 。

4. 導數的物理意義：

(1) 平均變化率、瞬時變化率：

① $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 為函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 的平均變化率。

② $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 為函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 的瞬時變化率。

(2) 若函數 $s(t)$ 為運動物體的位移函數，則：

① $\frac{s(b) - s(a)}{b - a}$ 為 $t = a$ 到 $t = b$ 的平均速度。

② 導數 $s'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$ 為 $t = a$ 時的瞬時速度。

(3) 若函數 $v(t)$ 為運動物體的速度函數，則：

① $\frac{v(b) - v(a)}{b - a}$ 為 $t = a$ 到 $t = b$ 的平均加速度。

② 導數 $v'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{v(t) - v(a)}{t - a}$ 為 $t = a$ 時的瞬時加速度。

5. 導函數：給定函數 $f(x)$ ，此函數在某個範圍內 $f'(a)$ 皆存在， $f(x)$ 定義域中的每一個 $a \rightarrow f'(a)$ ，此種對應形成了一個函數關係，將此函數稱為 $f(x)$ 的導函數，記作 $f'(x)$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$ 、 $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{d}{dx} f(x)$ 。

難易度 🐾🐾



01 老師講解

導數的定義

學生演練

設 $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2+3}$ ，試求 $f(x)$ 在 $x=1$ 的導數。

設 $f(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x-2)(x-4)}$ ，試求 $f'(-1)$ 之值。

難易度 🐾🐾



02 老師講解

切線方程式

學生演練

設 $f(x) = \sqrt{x}$ ，試求 $f(x)$ 在 $x=4$ 處的切線方程式。

先備公式：

通過定點 $A(x_0, y_0)$ 且斜率為 m 的直線方程式為： $y - y_0 = m(x - x_0)$ 。

設 $f(x) = \frac{2}{x-2}$ ，試求通過 $f(x)$ 圖形上一點 $A(4,1)$ 的切線方程式。

難易度 🐾🐾



03 老師講解

導數定義的應用

學生演練

已知 $f(x)$ 的導函數 $f'(x) = 3x - 1$ ，試求：

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{2h}$ 。

已知 $f'(2) = a$ ，試以 a 表示下列各導數值：

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2)}{3h}$ 。

難易度 🐾🐾



04 老師講解

瞬時速度與瞬時加速度

學生演練

設某一運動物體的位移函數

$s(t) = t^2 + t + 2$ ， $t \geq 0$ ，試求：

(1) 物體在 $t = 0$ 到 $t = 2$ 的平均速度。(2) 物體在 $t = 2$ 的瞬時速度。某一運動物體的速度函數 $v(t) = \sqrt{t+1}$ ， $t \geq 0$ ，

試求：

(1) 物體在 $t = 3$ 到 $t = 8$ 的平均加速度。(2) 物體在 $t = 3$ 的瞬時加速度。

**重點****連續與微分**

- 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處滿足：
 - $f(a)$ 存在
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。
- 若 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分。
- 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續，反之未必成立。

NOTE 可微分 $\begin{matrix} \xrightarrow{\text{一定}} \\ \xleftarrow{\text{不一定}} \end{matrix}$ 連續 $\begin{matrix} \xrightarrow{\text{一定}} \\ \xleftarrow{\text{不一定}} \end{matrix}$ 極限值存在。

難易度 ●●●

05

老師講解

是否連續與是否可微分

學生演練



已知 $f(x) = |x|$ ，試問：

- 在 $x=0$ 處是否連續？
- 在 $x=0$ 處是否可微分？

已知 $f(x) = x|x|$ ，試問：

- 在 $x=0$ 處是否連續？
- 在 $x=0$ 處是否可微分？

06 老師講解

導數與連續

學生演練



已知 $f(x) = \begin{cases} 4x+1, & x \leq 2 \\ x^2+k, & x > 2 \end{cases}$ ，且 $f(x)$ 在 $x=2$ 處的導數存在，試求 k 之值。

已知 $f(x) = \begin{cases} x^2+x+2, & x \geq 1 \\ 3x+k, & x < 1 \end{cases}$ ，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 處可微分，試求 k 之值。



自我挑戰



1. 已知函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數值為 3，試求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 設某一運動物體的位移函數為 $s(t) = \frac{1}{2t+1}$ ，則物體在 $t=2$ 時的瞬時速度為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 若 $f(x) = \sqrt{3x+1}$ ，則 $f(x)$ 在 $x=5$ 的切線斜率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 已知 $f(x) = \sqrt{x^2}$ ，則 $f'(0)$ 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 設 $f(x) = \begin{cases} 2x^2+k, & x \geq -2 \\ -8x, & x < -2 \end{cases}$ 在 $x=-2$ 處可以微分，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14-3

微分公式



重點 微分公式

1. 設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均為可微分函數：

(1) $f(x) = cx^n$ ， c 為一常數，則 $f'(x) = cnx^{n-1}$ 。

(2) $f(x) = c$ ， c 為一常數，則 $f'(x) = 0$ 。

(3) 若 $F(x) = f(x) \pm g(x)$ ，則 $F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ 。

(4) 若 $F(x) = f(x)g(x)$ ，則 $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(5) 若 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$)，則 $F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

2. 連鎖規則：若 $F(x) = [f(x)]^n$ ，且 $f'(x)$ 存在，則 $F'(x) = n[f(x)]^{n-1} \times f'(x)$ 。

難易度

01 老師講解

微分公式

學生演練



利用微分公式，試求函數

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ 的導函數與 $f'(2)$ 之值。

利用微分公式，試求函數 $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$ 的導函數與 $f'(4)$ 之值。

難易度

02 老師講解

微分公式

學生演練



已知 $f(x) = \frac{8}{x} - \sqrt[3]{x^2}$ ，利用微分公式試求 $f'(8)$ 之值。

已知 $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$ ，利用微分公式試求 $f'(4)$ 之值。

難易度 🐾



03 老師講解

乘法的微分公式

學生演練

若 $f(x) = (2x+1)(3x^2-2x+1)$ ，試求 $f'(1)$ 之值。

若 $f(x) = (x^2+x+1)(-2x^2+3x-1)$ ，試求 $f'(-1)$ 之值。

難易度 🐾



04 老師講解

除法的微分公式

學生演練

若 $f(x) = \frac{x+1}{3x-4}$ ，試求 $f'(x)$ 與 $f'(1)$ 。

若 $f(x) = \frac{x^2+2}{3x+1}$ ，試求 $f'(x)$ 與 $f'(-1)$ 。



試求下列各函數的導函數：

(1) 若 $f(x) = (2x-1)^5$ 。

(2) 若 $f(x) = \sqrt{(2x-1)^5}$ 。

試求下列各函數的導數值：

(1) 若 $f(x) = \frac{1}{(2x^2-5x+4)^3}$ ，試求 $f'(2)$ 。

(2) 若 $f(x) = \sqrt{(2x^2-5x+4)^3}$ ，試求 $f'(1)$ 。



重點 高階導函數

1. 若 $y = f(x)$ 為可微分的函數，則：

$f'(x)$ 為 $f(x)$ 的**一階導函數**，可用 $f'(x)$ 、 $\frac{df(x)}{dx}$ 、 $\frac{d}{dx}f(x)$ 、 y' 、 $\frac{dy}{dx}$ 表示。

2. 若 $f'(x)$ 仍可微分，則：

$(f'(x))'$ 為 $f(x)$ 的**二階導函數**，可用 $f''(x)$ 、 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ 、 $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ 、 y'' 、 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 表示。

3. 若 $f''(x)$ 仍可微分，則：

$(f''(x))'$ 為 $f(x)$ 的**三階導函數**，可用 $f'''(x)$ 、 $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ 、 $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$ 、 y''' 、 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 表示。

4. 若 $f'''(x)$ 仍可微分，則：

$(f'''(x))'$ 為 $f(x)$ 的**四階導函數**，可用 $f^{(4)}(x)$ 、 $\frac{d^4f(x)}{dx^4}$ 、 $\frac{d^4}{dx^4}f(x)$ 、 $y^{(4)}$ 、 $\frac{d^4y}{dx^4}$ 表示。

依此類推， $f(x)$ 的 n 階導函數，可用 $f^{(n)}(x)$ 、 $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ 、 $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ 、 $y^{(n)}$ 、 $\frac{d^ny}{dx^n}$ 表示 ($n \geq 4$)。

難易度 🐾

06

老師講解

高階導函數

學生演練



設 $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2$ ，試求 $f^{(4)}(x)$ 。

設 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ ，試求 $f''(\frac{1}{2})$ 。

難易度 🐾

07

老師講解

高階導函數

學生演練



設 $f(x) = \sqrt{(2x+1)^3}$ ，試求 $f''(4)$ 。

設 $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$ ，試求 $f'''(-1)$ 。



自我挑戰



1. 已知 $f(x) = 2021^{100}$ ，則 $f'(2) =$ _____。
2. 設 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ ，則 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} =$ _____。
3. 若 $f(x) = (x^3 + 2x^2 - 1)^2$ ，則使 $f^{(n)}(x) = 0$ 的最小正整數 n 為 _____。
4. 已知 $f(x) = \sqrt{(x^2 + 2x + 3)^3}$ ，則 $f'(1) =$ _____。
- 素 5. 自由落體運動是指只受**重力**作用（不存在空氣阻力的理想狀態）的均勻加速度運動過程，今有一石頭從高度 980 公尺高的懸崖做自由落體， t 秒後的高度為 $s(t) = 980 - 4.9t^2$ ，試求 $t = 10$ 秒的瞬時速度為 _____ 公尺/秒。

14-4

微分的應用



重點

函數圖形與導數的關係

1. 區間的表示法：為使集合方便表示可以使用區間來表示。

(1) 閉區間： $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

(2) 開區間： $(a, b) = \{x | a < x < b\}$

(3) 半開區間（或半閉區間）： $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 、 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

(4) $(a, \infty) = \{x | x > a\}$ ，其中 ∞ 稱為正無限大

(5) $[a, \infty) = \{x | x \geq a\}$

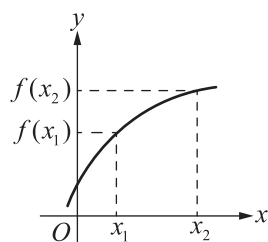
(6) $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$ ，其中 $-\infty$ 稱為負無限大

(7) $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$

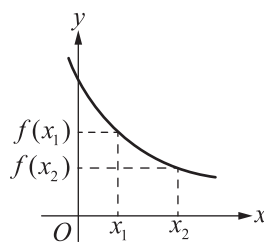
2. 遞增與遞減：若函數 $f(x)$ 在某一區間滿足：

(1) x_1 、 x_2 為該區間內的任意兩點，若 $x_1 < x_2$ ，而 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，則稱 $f(x)$ 在該區間上為**遞增函數**，若將上述不等號「 $\leq$ 」改為「 $<$ 」，則稱 $f(x)$ 在該區間上為嚴格遞增函數，如圖（一）。

(2) x_1 、 x_2 為該區間內的任意兩點，若 $x_1 < x_2$ ，而 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，則稱 $f(x)$ 在該區間上為**遞減函數**，若將上述不等號「 $\geq$ 」改為「 $>$ 」，則稱 $f(x)$ 在該區間上為嚴格遞減函數，如圖（二）。



圖（一）

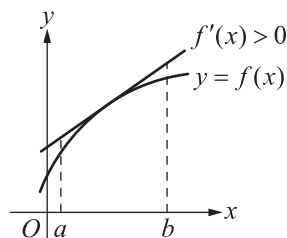


圖（二）

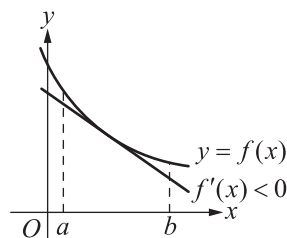
3. 設 $f(x)$ 為一次以上的多項式函數，在 $[a, b]$ 上連續且在區間 (a, b) 內每一點皆可微分：

(1) 若 $f'(x) \geq 0$ 在區間 (a, b) 上都成立，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上為遞增函數，如圖（三）。

(2) 若 $f'(x) \leq 0$ 在區間 (a, b) 上都成立，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上為遞減函數，如圖（四）。



圖（三）



圖（四）

難易度 🐾



01 老師講解

一階導數與函數的增減情形

學生演練

利用一階導數求出 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 的遞增區間與遞減區間。

利用一階導數求出 $f(x) = -x^2 + 4x$ 的遞增區間與遞減區間。

難易度 🐾



02 老師講解

一階導數與函數的增減情形

學生演練

利用一階導數求出函數 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ 的遞增區間與遞減區間。

利用一階導數求出函數 $f(x) = x^3 - 3x$ 的遞增區間與遞減區間。



重點

函數的極值

1. 相對極值：設 c 為函數 $f(x)$ 定義域中的一點：

(1) 若在 c 附近的每一個 x 皆滿足 $f(c) \geq f(x)$ ，則稱 $f(c)$ 是 $f(x)$ 的（相對）極大值。

(2) 若在 c 附近的每一個 x 皆滿足 $f(c) \leq f(x)$ ，則稱 $f(c)$ 是 $f(x)$ 的（相對）極小值。

2. 最大值與最小值：

(1) 若對定義域中的每一個 x 皆滿足 $f(c) \geq f(x)$ ，則稱 $f(c)$ 是 $f(x)$ 的最大值。

(2) 若對定義域中的每一個 x 皆滿足 $f(c) \leq f(x)$ ，則稱 $f(c)$ 是 $f(x)$ 的最小值。

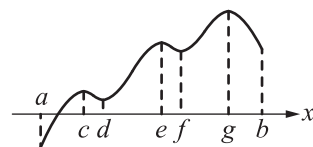
3 若函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 區間的圖形如右，則：

(1) $f(x)$ 在 $x=c$ 、 $x=e$ 、 $x=g$ 處有相對極大值。

(2) $f(x)$ 在 $x=a$ 、 $x=d$ 、 $x=f$ ， $x=b$ 有相對極小值。

(3) $f(x)$ 在 $x=g$ 處有最大值。

(4) $f(x)$ 在 $x=a$ 處有最小值。



4. 求相對極值的步驟：

Step1：先求 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 。

Step2：找出 $f'(x)=0$ 的所有根。

Step3：利用表格與 $f'(x)$ 的正負寫出 $f(x)$ 的增減情形。

Step4：由增減情形可找出極值。

難易度

03 老師講解

求函數的極值

學生演練



試求函數 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ 的極值，與發生極值的 x 值。

試求函數 $f(x) = x^3 - 3x$ 的極值，與發生極值的 x 值。

難易度 🐾🐾

04 老師講解

有範圍時的極值

學生演練



承老師講解 3，試求 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ 在 $-3 \leq x \leq 3$ 中的最大、最小值。

承學生演練 3，試求 $f(x) = x^3 - 3x$ 在 $-2 \leq x \leq 3$ 中的最大、最小值。

難易度 🐾🐾

05 老師講解

由極值條件求原函數

學生演練



設 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ ，其中 a 、 b 皆為常數，若 $x=1$ 時 $f(x)$ 有極大值 3，試求 a 、 b 之值。

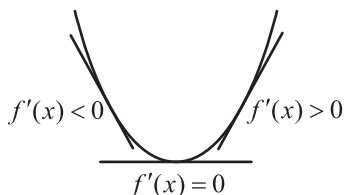
設 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + bx - 1$ ，其中 a 、 b 皆為常數，若 $x=-1$ 與 $x=3$ 時， $f(x)$ 有極值，試求 a 、 b 之值。



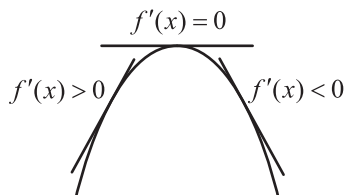
重點

二階導函數與函數圖形凹向性

1. 凹性：若函數在某一個區間圖形均在切線上方時，如圖（一），則稱函數在此區間為凹口向上；若圖形均在切線下方時，如圖（二），則稱函數在此區間為凹口向下。



圖（一）



圖（二）

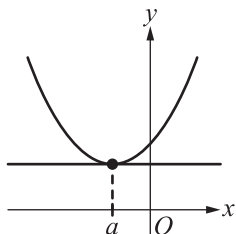
2. 設 $f(x)$ 為二次以上的多項式函數，且在區間 (a, b) 內每一點二階導數值皆存在：
- (1) 若 $f''(x) > 0$ 在區間 (a, b) 上都成立，則 $f(x)$ 的圖形在 (a, b) 上為凹口向上。
 - (2) 若 $f''(x) < 0$ 在區間 (a, b) 上都成立，則 $f(x)$ 的圖形在 (a, b) 上為凹口向下。
 - (3) 反曲點：若 $f(x)$ 在 $x=c$ 處連續，且 $f(x)$ 的圖形在點 $(c, f(c))$ 的兩側凹性相反，則稱 $(c, f(c))$ 為 $f(x)$ 的**反曲點**。

3. 二階導函數與函數的極值：

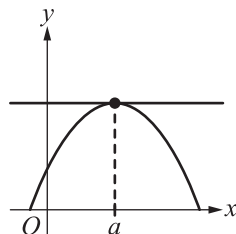
設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處， $f'(a)=0$ ，即在此處有水平切線，且 $f''(a)$ 存在，

(1) 若 $f''(a)>0$ ，則 $f(a)$ 為極小值，如圖（三）。

(2) 若 $f''(a)<0$ ，則 $f(a)$ 為極大值，如圖（四）。



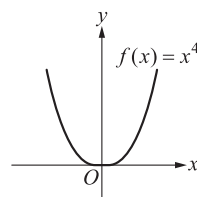
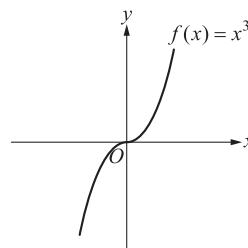
圖（三）



圖（四）

NOTE 1. $f'(a)=0$ 代表 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的切線為水平切線，並不代表 $x=a$ 處一定有極值，需利用左右兩側的增減情形判別。如 $f(x)=x^3$ ， $f'(0)=0$ ，但 $x=0$ 處並無極值。

2. $f''(a)=0$ 並不代表點 $(a, f(a))$ 一定為反曲點，需利用左右兩側圖形的凹向性判別。如 $f(x)=x^4$ ， $f''(0)=0$ ，但 $x=0$ 處並非反曲點。



難易度 🐾

06 老師講解

二階導函數與凹向性

學生演練



設 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ ，試判斷 $f(x)$ 圖形的凹口方向與反曲點坐標。

設 $f(x) = x^3 - 3x$ ，試判斷 $f(x)$ 圖形的凹口方向與反曲點坐標。

難易度 🐾

07

老師講解

利用二階導函數求函數的極值

學生演練



設函數 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ ，利用二階導數法求出 $f(x)$ 的極值，與發生極值的 x 值。

利用二階導數法求出函數 $f(x) = x^3 - 3x$ 的極值，與發生極值的 x 值。



重點

導數的應用

1. 函數圖形的描繪：利用 $f(x)$ 的一階導函數判斷函數增減情形，再利用二階導函數判斷凹向性，即可描繪出函數圖形。
2. 極值的應用：依題意寫出函數 $f(x)$ ，再利用一階、二階導函數求極值。

難易度 🐾

08

老師講解

描繪函數的圖形

學生演練



描繪出函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 18$ 的圖形。

描繪出函數 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ 的圖形。

09 老師講解

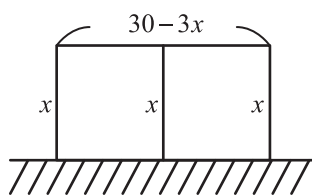
極值的應用

學生演練



一個邊長為 10 公分的正方形硬紙板，今將四個角各切去一個一樣的正方形，以便摺出一個無蓋的紙盒，試求該紙盒的最大容積為何？

已知農夫想在牆邊用 30 公尺的圍籬圍出兩個面積一樣大的農地，如右圖，試問當 x 之值為何時，可使兩塊農地的面積總和最大？



自我挑戰



1. 函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ 之相對極大值為 _____，相對極小值為 _____，且反曲點坐標為 _____。

2. 已知函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x + b$ 在 $x = -2$ 處有極值 3，則數對 $(a, b) =$ _____。

3. 關於函數 $f(x) = x^3 + 2x - 2$ ，下列敘述哪些正確？_____。

- (A) $f(x)$ 為遞增函數 (B) $f(x)$ 沒有極值
(C) $f(x)$ 的圖形沒有水平切線 (D) 反曲點不存在。

素 4. 某種型號汽車行駛的平均速度 x （公里／小時）與耗油量 y （公升）關係為 $y = (\frac{1}{128000}x^3 - \frac{3}{80}x + 8) \times \frac{d}{x}$ ($0 < x \leq 120$)，其中 d 為行駛距離，若甲乙兩地距離 80 公里，平均速度為 _____ 公里/小時，可使耗油量最小。

素 5. 翔泰公司第 t 個月的營收函數為 $f(t) = \frac{t^2 + 400}{t + 15}$ 萬元，其中 $0 \leq t \leq 36$ ，則該集團在第 _____ 個月時營收最小。



歷屆試題



- () 1. 若實係數多項式函數 $f(x) = ax^4 + bx^2 - 2x + c$ ，其導函數為 $f'(x) = 8x^3 - 6x + d$ 且 $f(1) = 5$ ，則 $a + b + c + d = ?$
 (A) 11 (B) 9 (C) 7 (D) 5。 【113(C)，答對率 50%】
- () 2. 下列哪一函數在 $x=1$ 的極限存在，但不連續？
 (A) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ (C) $f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}$ (D) $f(x) = (x - 1)^2$ 。
 【113(C)，答對率 21%】
- () 3. 已知 a 、 b 為實數， $f(x) = \sqrt{x} - x$ ， $g(x) = ax^3 + bx$ 的圖形均通過點 $(1, 0)$ 。若 $f(x)$ 以 $(1, 0)$ 為切點的切線 L_1 ，與 $g(x)$ 以 $(1, 0)$ 為切點的切線 L_2 相互垂直，則下列何者為真？
 (A) $a = -1$ (B) $b = 1$ (C) $ab = 1$ (D) $ab = -1$ 。 【112(C)，答對率 37%】
- () 4. 若 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x - 74$ ，則下列何者為真？
 (A) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x = 6$ (B) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x = 4$
 (C) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x = -1$ (D) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x = -6$ 。
 【112(C)，答對率 39%】
- () 5. 已知函數 $f(x) = x^3 + \frac{12}{x}$ 圖形在切點 (a, b) 的切線斜率為 9。若 $a > 0$ ，則 $a + b = ?$
 (A) -8 (B) 11 (C) 14 (D) 16。 【111(C)，答對率 27%】
- () 6. 若函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+a}{x^2-2x-3}, & x > 3 \\ \frac{x-5}{x-b}, & x \leq 3 \end{cases}$ 在 $x=3$ 處連續，則 $a+b = ?$
 (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3。 【111(C)，答對率 35%】
- () 7. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(3+h)+2} - \frac{1}{3+2}}{h} = ?$
 (A) $-\frac{1}{25}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{25}$ 。 【110(C)，答對率 36%】
- () 8. 若 $f(x) = x + \pi^2$ ，其中 π 為圓周率，則 $f'(x) = ?$
 (A) 1 (B) $1 + \pi$ (C) $1 + 2\pi$ (D) $1 + \pi^2$ 。 【109(B)，答對率 25%】

() 9. 關於下列各極限，何者錯誤？

(A) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[3]{x-2} = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x-2} = 0$ (C) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[3]{x-2} = 0$ (D) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ 。

【109(C)，答對率 33%】

() 10. 設 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 2 \\ x^2-2x+3, & x \leq 2 \end{cases}$ ，則 $f'(2) = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不存在。

【109(C)，答對率 42%】

() 11. 設 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ 在閉區間 $[-3, 3]$ 內的最大值與最小值分別為 m 、 n ，則 $m - n = ?$

(A) 90 (B) 98 (C) 100 (D) 108。

【109(C)，答對率 37%】

() 12. 設函數 $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ 。試問 $f'(1) + f''(1)$ 之值為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6。

【108(B)，答對率 49%】

() 13. 已知函數 $f(x)$ 的導函數為 $g(x) = x^2 - 4x + 2$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2。

【108(C)，答對率 39%】

() 14. 小明設計了一款迴力鏢，已知將此迴力鏢擲出後，迴力鏢過了時間 t 秒後與小明的距離為 $f(t) = \frac{100t}{t^2 + 9}$ 公尺，若在 t_0 秒時，迴力鏢離小明最遠，則 $t_0 = ?$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

【108(C)，答對率 49%】

() 15. 若 $f(x) = \frac{-3(x+1)}{x^4 + x^2 + 1}$ ，則 $f'(-1)$ 之值為何？

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。

【107(B)，答對率 31%】

() 16. 若 $f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}$ ($x \neq \pm 1$)，則 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 之值為何？

(A) 不存在 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1。

【107(B)，答對率 30%】

() 17. 在坐標平面上，函數 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ 的圖形於切點 $(2, 1)$ 的切線斜率為何？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

【107(B)，答對率 28%】

() 18. 若直線 L 過點 $(9, 5)$ ，且與函數 $y = f(x)$ 的圖形相切於點 $(3, 1)$ ，則

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = ?$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3。

【107(C)，答對率 39%】

- () 19. 求函數 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 2}$ 在 $x = 1$ 的導數為何？
 (A) -9 (B) -8 (C) -7 (D) -6 。 【106(B)，答對率 30%】
- () 20. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < -1 \\ 2, & x = -1 \\ 6 - 3x^2, & x > -1 \end{cases}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = ?$
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 。 【106(C)，答對率 36%】
- () 21. 已知 a 、 b 為實數，且 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 13$ 。若 $f'(-1) = 1$ 且 $f'(0) = 2$ ，則 $a + b = ?$
 (A) -1 (B) 0 (C) 3 (D) 4 。 【106(C)，答對率 51%】
- () 22. 若 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$ 的相對極大值為 a ，相對極小值為 b ，則 $a + b = ?$
 (A) $-\frac{27}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{27}{2}$ 。 【106(C)，答對率 45%】