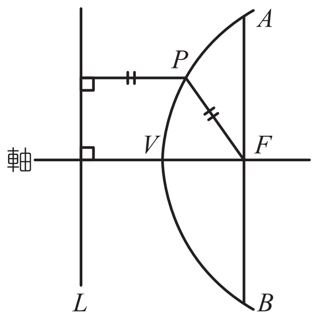
單元 13 二次曲線

13-1 拋物線

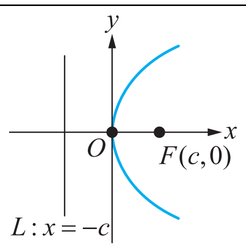
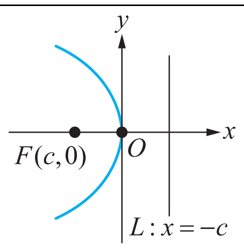
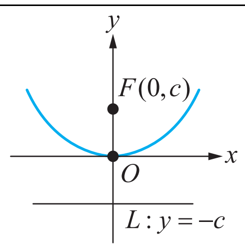
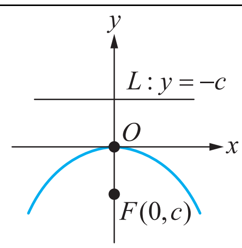
重點 拋物線的定義與方程式

1. **定義：** 平面上有一直線 L 和線外一點 F，若一動點 $P(x,y)$ 滿足「**與直線 L 的距離等於到點 F 的距離**」，即 $d(P,L)=\overline{PF}$，則 P 所形成的圖形稱為拋物線。其中 L 稱做此拋物線的準線，F 稱做焦點。

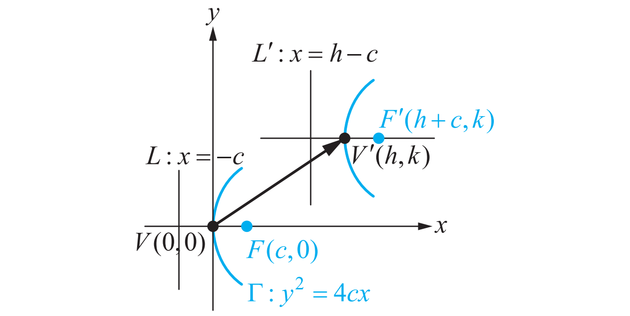
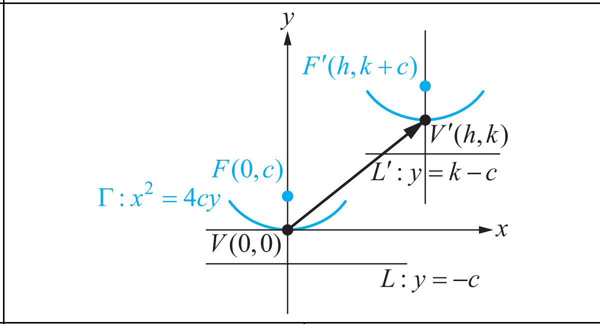
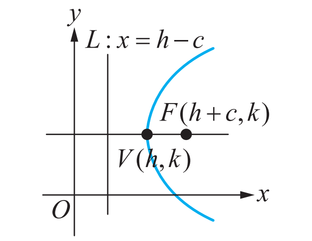
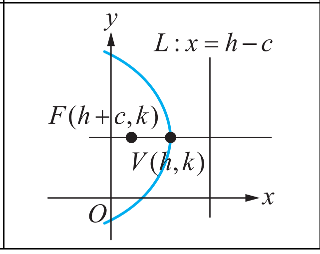
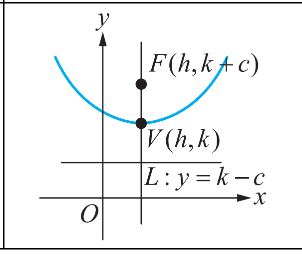
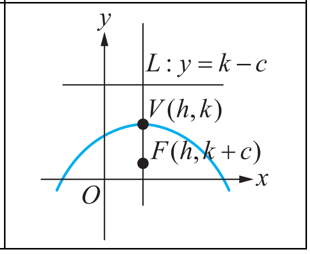


2. **拋物線的各要素名稱：**
   (1) 通過焦點 F 且與準線 L 垂直的直線稱為對稱軸或軸。
   (2) 對稱軸與拋物線的交點 V 稱為頂點。
   (3) 頂點 V 到焦點 F 的距離 $\overline{VF}$ 稱為焦距。
   (4) 通過焦點且與對稱軸垂直的弦 $\overline{AB}$，稱做正焦弦，
   且**正焦弦長為 4 個焦距**，$\overline{AB}=4\overline{VF}$。

3. **拋物線的標準式**
   (1) 頂點在原點 $(0,0)$

$y^2=4cx$		$x^2=4cy$	
$c>0$ 開口向右	$c<0$ 開口向左	$c>0$ 開口向上	$c<0$ 開口向下
			
焦點 $F(c,0)$，準線 $L:x=-c$，對稱軸 x 軸		焦點 $F(0,c)$，準線 $L:y=-c$，對稱軸 y 軸	

(2) 頂點在 (h,k)

<table>
<tr><td colspan="2">$y^2=4cx \xrightarrow[\text{向上平移 }k]{\text{向右平移 }h} (y-k)^2=4c(x-h)$</td><td colspan="2">$x^2=4cy \xrightarrow[\text{向上平移 }k]{\text{向右平移 }h} (x-h)^2=4c(y-k)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$c>0$ 開口向右</td><td>$c<0$ 開口向左</td><td>$c>0$ 開口向上</td><td>$c<0$ 開口向下</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

NOTE 1. 焦距 $\overline{VF}=|c|$，正焦弦長 $=4\overline{VF}=4|c|$。

2. 求拋物線的方程式時，先畫出題目的已知條件，判斷 x、y 何者有平方及開口方向，找出頂點 V 坐標與 c，即可求出拋物線的標準式。

4. **拋物線的一般式**

(1) 將拋物線的標準式展開所得的方程式，稱做拋物線的一般式，如：

$(y-1)^2=4(x-1) \underset{\text{配方}}{\overset{\text{展開}}{\rightleftarrows}} y^2-4x-2y+5=0$。

(2) 將一般式移項可整理成：（其中 a、b、c 為實數，且 $a\neq 0$）

① $x=ay^2+by+c$（開口向左或右）。② $y=ax^2+bx+c$（開口向上或下）。

難易度

01　老師講解　由拋物線的標準式求各要素　學生演練

試求拋物線 $(x+1)^2=-8(y-1)$ 的：

(1) 頂點　(2) 焦點　(3) 準線

(4) 對稱軸　(5) 正焦弦長。

試求拋物線 $(y-2)^2=12(x-1)$ 的：

(1) 頂點　(2) 焦點　(3) 準線

(4) 對稱軸　(5) 正焦弦長。

難易度

02 老師講解 由拋物線的一般式求各要素 學生演練

試求拋物線 $x^2-2x+4y-3=0$ 的
(1) 焦點坐標 (2) 準線方程式
(3) 正焦弦長。

試求拋物線 $y^2-4y+2x-2=0$ 的
(1) 頂點坐標 (2) 準線方程式
(3) 正焦弦長。

難易度

03 老師講解 由拋物線的各要素求標準式 學生演練

試求滿足下列條件的拋物線方程式：
(1) 頂點 V 為 $(2,-1)$，焦點 F 為 $(2,2)$。
(2) 焦點 F 為 $(-3,1)$，且正焦弦長為 8，開口向左。

試求滿足下列條件的拋物線方程式：
(1) 頂點 V 為 $(-2,3)$，準線 $L: y=1$
(2) 焦點 F 為 $(0,3)$，準線 $L: x=4$。

難易度

04　老師講解　**已知拋物線上的三點求拋物線方程式**　學生演練

已知一拋物線 Γ 的對稱軸垂直 x 軸，且拋物線通過 $A(0,3)$ 、 $B(-1,6)$ 、 $C(2,-9)$ ，試求此拋物線方程式。

已知一拋物線 Γ 的準線平行 y 軸，且拋物線通過 $A(5,-1)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(-1,1)$ ，試求此拋物線方程式。

重點　由拋物線的定義式 $\overline{PF}=d(P,L)$ 找出焦點及準線

難易度

05　老師講解　**由定義式中的要素求其他要素**　學生演練

已知一拋物線方程式為

$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=|x-1|$，試求此拋物線的：

(1)焦點坐標　(2)準線方程式　(3)正焦弦長。

已知一拋物線方程式為

$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=|y-3|$，試求此拋物線的：

(1)頂點　(2)焦距　(3)正焦弦長。

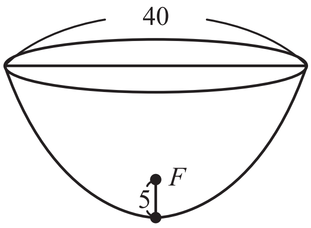
單元 13

重點　拋物線的應用-自訂直角坐標系

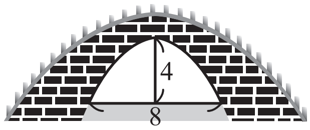
難易度

06　老師講解　**自訂坐標系**　學生演練

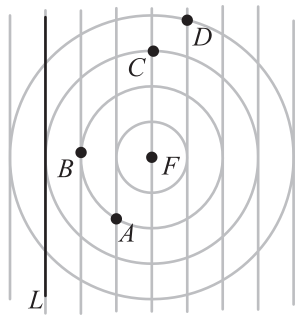
已知一拋物線型的太陽爐焦距為 5 公分，口徑為 40 公分，如右圖，試求此太陽爐的深度為何？



河面上有一拋物線形狀的拱橋如右，已知河面寬度為 8 公尺時，水面距離拱頂為 4 公尺，當水面上升一公尺後，水面寬為多少公尺？



自我挑戰



1. 右圖中的同心圓皆以 F 為圓心，試問下列哪一些點在以 F 為焦點，L 為準線的拋物線 Γ 上？____________。

2. 已知拋物線方程式 $x^2+4x+2y-3=0$，試求：
   (1) 焦點為 ____________。　(2) 準線為 ________。
   (3) 正焦弦長為 ______。

3. 頂點為 $(-1,2)$，焦點為 $(3,2)$ 的拋物線方程式為 ________________。

4. 在坐標平面上，將拋物線 $y^2+4y+6x-2=0$ 向左平移 1 個單位，再向上平移 3 個單位，則新的拋物線方程式為 ______________。

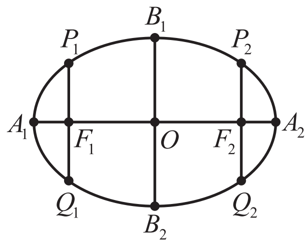
5. 設拋物線的焦點為 $F(2,3)$，焦距為 3，且拋物線開口向下，則此拋物線方程式為 __________________。

6. 已知拋物線 Γ 的方程式為 $\sqrt{x^2+(y+2)^2}=\dfrac{|3x+4y+3|}{5}$，試求 Γ 的
   (1) 對稱軸方程式為 _____________　(2) 正焦弦長為 ____。

13-2 橢圓

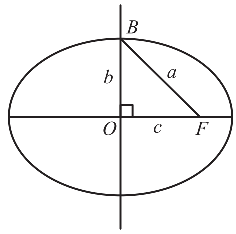
重點　橢圓的定義與方程式

1. **定義**：在平面上，F_1、F_2 為相異兩個定點，若一動點 $P(x,y)$ 滿足「**到此兩定點的距離和為一定值**」，令此定值為 $2a$，即 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$（$2a>\overline{F_1F_2}$），則 P 所形成的圖形稱為橢圓。其中 F_1、F_2 為橢圓的兩個焦點。



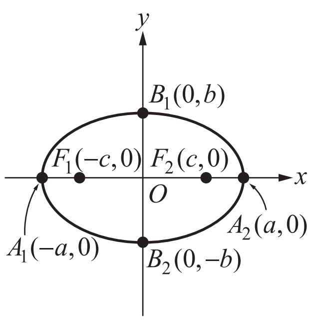
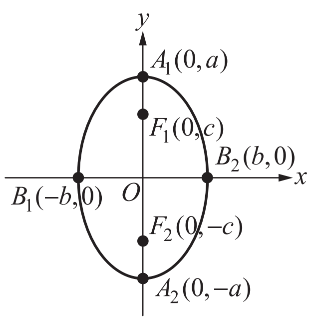
   (1) 當 $2a>\overline{F_1F_2}$，P 點所形成的圖形為橢圓。
   (2) 當 $2a=\overline{F_1F_2}$，P 點所形成的圖形為線段 $\overline{F_1F_2}$。
   (3) 當 $2a<\overline{F_1F_2}$，P 點無法形成圖形。

2. **橢圓的各要素名稱：**
   (1) F_1 與 F_2 的中點 O，稱為橢圓的中心。
   (2) 通過 F_1、F_2 的直線與橢圓交於 A_1、A_2，$\overline{A_1A_2}$ 稱為橢圓的長軸，長軸長 $\overline{A_1A_2}=2a$。
   (3) 通過橢圓中心 O，且與長軸垂直的直線與橢圓交於 B_1、B_2，$\overline{B_1B_2}$ 稱為橢圓的短軸，短軸長 $\overline{B_1B_2}=2b$。
   (4) 橢圓頂點有 4 個，分別為長軸頂點 2 個：A_1、A_2，短軸頂點 2 個：B_1、B_2。
   (5) 通過焦點且與長軸垂直的弦 $\overline{P_1Q_1}$、$\overline{P_2Q_2}$ 稱為正焦弦，正焦弦長 $\overline{P_1Q_1}=\overline{P_2Q_2}=\dfrac{2b^2}{a}$。

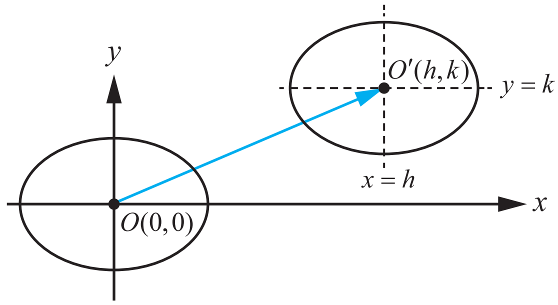
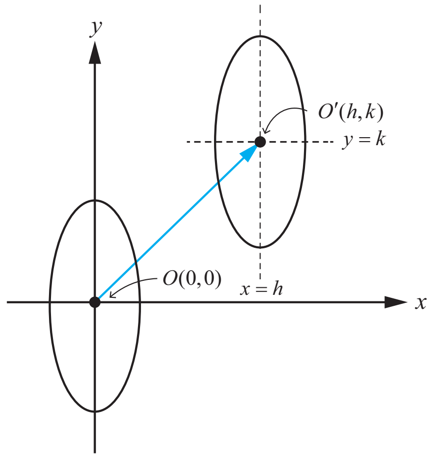


NOTE 1. a、b、c 中，a 最大。
2. $a^2=b^2+c^2$。

3. **橢圓的標準式：**
   (1) 中心在原點 O：

橫向型橢圓	直向立型橢圓
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$
	
長軸在 x 軸上，焦點為 $(\pm c,0)$， 長軸頂點 $(\pm a,0)$，短軸頂點 $(0,\pm b)$	長軸在 y 軸上，焦點為 $(0,\pm c)$， 長軸頂點 $(0,\pm a)$，短軸頂點 $(\pm b,0)$

(2) 中心在 (h,k)

橫向型橢圓	直向型橢圓
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow[\text{向上平移 } k]{\text{向右平移 } h} \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 \xrightarrow[\text{向上平移 } k]{\text{向右平移 } h} \dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$
	

NOTE　1. 分母大的為 a^2 。
2. x、y 誰的分母大，橢圓就趴在誰上面。
3. 焦點落在長軸上。
4. 求橢圓的方程式時，先畫出題目的已知條件，判斷橫橢或是直橢，找出中心 O 的坐標與 a、b，即可求出橢圓的標準式。

4. **橢圓的一般式：**將橢圓的標準式展開所得的方程式，稱為橢圓的一般式，如
$$\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y+2)^2}{3}=1 \underset{\text{配方}}{\overset{\text{展開}}{\rightleftarrows}} 3x^2+2y^2-6x+8y+5=0$$ 。

NOTE　1. 將一般式 x，y 各別配方後可得回標準式，並可找出橢圓的各要素。
2. 一般式中，當 x^2 與 y^2 的係數相等時，方程式的圖形為第二冊所學的圓。

難易度

01　老師講解　由橢圓的標準式求各要素　學生演練

試求橢圓 $\Gamma: 4x^2+9y^2=36$ 的：

(1) 中心　(2) 頂點　(3) 焦點

(4) 長、短軸長　(5) 正焦弦長。

試求橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 的：

(1) 中心　(2) 頂點　(3) 焦點

(4) 長、短軸長　(5) 正焦弦長。

難易度

02　老師講解　由橢圓的一般式求各要素　學生演練

試求橢圓 $9x^2+4y^2+18x-16y+21=0$ 的：

(1) 中心　(2) 長軸頂點　(3) 焦點。

試求橢圓 $x^2+4y^2-4x+8y+7=0$ 的：

(1) 短軸頂點　(2) 焦點　(3) 正焦弦長。

難易度

03 老師講解 **求橢圓的方程式** 學生演練

試求滿足下列條件的橢圓方程式：

(1) 橢圓的一焦點為 $(2,-1)$，短軸長為 8，且短軸在直線 $y=2$ 上。

(2) 橢圓的兩焦點 $F_1(-2,1)$、$F_2(6,1)$，且橢圓上有一點 $P(6,-5)$。

試求滿足下列條件的橢圓方程式：

(1) 橢圓的長軸在 $x-1=0$ 上，短軸在 $y+1=0$ 上，且長軸長為 8，正焦弦長為 6。

(2) 橢圓的兩焦點為 $F_1(-2,2)$、$F_2(8,2)$，且橢圓上有一點 P 到兩焦點的距離和為 12。

單元 13

重點　由橢圓的定義式 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$（$2a>\overline{F_1F_2}$）找出焦點及長軸長

難易度

04　老師講解　由定義式中的要素求其他要素　學生演練

已知一橢圓方程式為

$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}=10$，試求橢圓的：

(1)焦點坐標　(2)長軸長　(3)短軸長。

已知一橢圓方程式為

$\sqrt{x^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=8$，試求橢圓的：

(1)中心　(2)長軸頂點　(3)正焦弦長。

重點　判別橢圓方程式

若方程式 $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}=1$ 為橢圓，則 $\begin{cases}A>0\\B>0\\A\neq B\end{cases}$。

難易度

05　老師講解　判別橢圓方程式　學生演練

已知方程式 $\dfrac{x^2}{k-3}+\dfrac{y^2}{7-k}=1$，

(1)若此方程式為一橢圓，試求 k 的範圍？

(2)若此橢圓的長軸在 y 軸上，試求 k 的範圍？

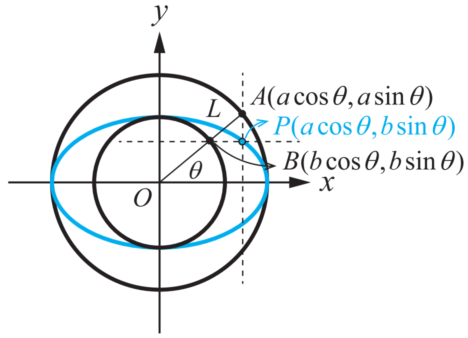
已知方程式 $\dfrac{x^2}{2k-5}+\dfrac{y^2}{k-1}=1$ 為長軸在 x 軸上的橢圓，試求 k 的範圍？

重點 橢圓的參數式

1. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的參數式可令為 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。

2. 橢圓 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 的參數式 $\begin{cases} x=h+a\cos\theta \\ y=k+b\sin\theta \end{cases}$，

   $0\le\pi<2\pi$。



NOTE 1. 圓方程式 $x^2+y^2=r^2$ 的參數式為：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。

2. 圓方程式 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 的參數式為：$\begin{cases} x=h+r\cos\theta \\ y=k+r\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。

難易度

06 老師講解 **橢圓的參數式** 學生演練

若 $P(x,y)$ 為橢圓 $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ 上任意一點，則 $2x-y$ 的最大值為何？

若 $P(x,y)$ 為橢圓 $3x^2+2y^2-18x+21=0$ 上任意一點，則 $x+y$ 的最小值為何？

單元 13

自我挑戰

1. 橢圓 $9x^2+4y^2=1$ 的正焦弦長為＿＿＿＿。

2. 試求橢圓 $4x^2+y^2-8x+6y+9=0$ 的
(1) 短軸頂點為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。
(2) 焦點坐標為＿＿＿＿＿＿＿＿。
(3) 長軸長為＿＿＿＿。
(4) 正焦弦長為＿＿＿＿。

3. 焦點為 $(-1,2)$、$(7,2)$，長軸的兩端點為 $(-2,2)$、$(8,2)$ 的橢圓方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

4. 已知橢圓 $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$ 上有一點 $P(3,\dfrac{-4+5\sqrt{3}}{2})$，則 P 點與兩焦點 F_1、F_2 所形成的 $\triangle PF_1F_2$ 的周長為＿＿＿＿。

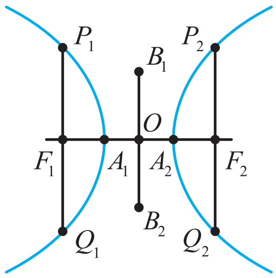
素 5. 由克卜勒行星第一運動定律可知各行星繞日的軌道均為橢圓，且太陽位在其中一個焦點上，而離心率定義為「中心到焦點的距離除以半長軸長」即 $\dfrac{c}{a}$。已知水星是八大行星中離心率最大的行星，水星的近日點到太陽的距離約為 46 百萬公里，遠日點到太陽的距離約為 70 百萬公里，那麼水星的離心率大約是＿＿＿＿。（四捨五入至小數點後第一位）

單元 13

13-3 雙曲線

重點　雙曲線的定義與方程式

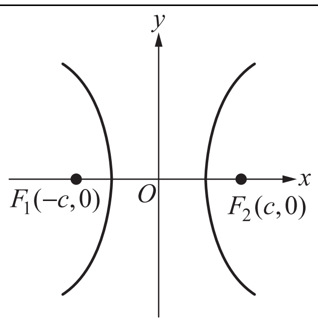
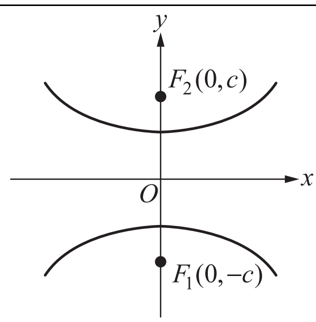
1. **定義：** 在平面上，F_1、F_2 為相異兩個定點，若一動點 $P(x,y)$ 滿足「**到此兩定點距離差的絕對值為一定值**」，令此定值為 $2a$，即 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$（$\overline{F_1F_2}>2a$），則 P 所形成的圖形稱為雙曲線。其中 F_1、F_2 為雙曲線的兩個焦點。



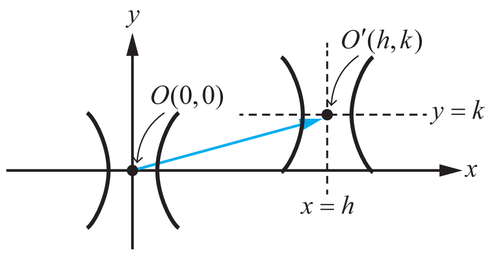
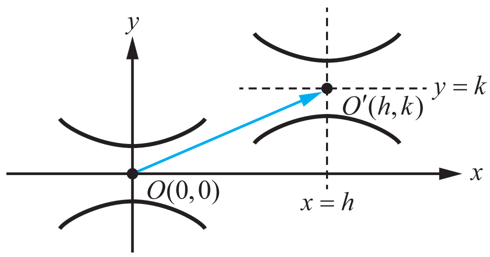
   (1) 當 $\overline{F_1F_2}>2a$，P 點所形成的圖形為雙曲線。
   (2) 當 $\overline{F_1F_2}=2a$，P 點所形成的圖形為以 F_1 與 F_2 為端點的兩射線。
   (3) 當 $\overline{F_1F_2}<2a$，P 點無法形成圖形。

2. **雙曲線的各要素名稱：**
   (1) F_1 與 F_2 的中點 O，稱為雙曲線的中心。
   (2) 通過 F_1、F_2 的直線與雙曲線交於 A_1、A_2，$\overline{A_1A_2}$ 稱為雙曲線的貫軸，貫軸長 $\overline{A_1A_2}=2a$。
   (3) 通過中心而與貫軸垂直的直線上，找一特定線段 $\overline{B_1B_2}$（$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{\overline{OF_1}^2-\overline{OA_1}^2}$），且使其中點為中心 O，$\overline{B_1B_2}$ 稱為雙曲線的共軛軸，共軛軸長 $\overline{B_1B_2}=2b$。
   (4) A_1、A_2 為雙曲線的頂點。
   (5) 通過焦點且與貫軸垂直的弦 $\overline{P_1Q_1}$、$\overline{P_2Q_2}$ 稱做正焦弦，正焦弦長 $\overline{P_1Q_1}=\overline{P_2Q_2}=\dfrac{2b^2}{a}$。

3. **雙曲線的標準式：**
   (1) 中心在原點 $O(0,0)$：

左右開口	上下開口
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$
	
貫軸在 x 軸上，焦點 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$	貫軸在 y 軸上，焦點 $F_1(0,-c)$、$F_2(0,c)$

(2) 中心在任意點 $O(h,k)$：

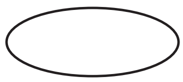
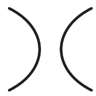
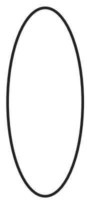
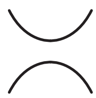
左右開口	上下開口
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \xrightarrow[\text{向上平移 }k]{\text{向右平移 }h} \dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1 \xrightarrow[\text{向上平移 }k]{\text{向右平移 }h} \dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$
	

NOTE 1. 正的放前面。

2. x 放前面左右向開口，y 放前面上下向開口。

3. $c^2=a^2+b^2$。

4. 橢圓與雙曲線的比較：

名稱	橢圓	雙曲線
定義	$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$（長軸長）（$2a>\overline{F_1F_2}$）	$\lvert\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\rvert=2a$（貫軸長）（$\overline{F_1F_2}>2a$）
方程式	橫向型橢圓：$\dfrac{x^2}{\underset{\substack{\downarrow\\大}}{a^2}}+\dfrac{y^2}{\underset{\substack{\downarrow\\小}}{b^2}}=1$ 	左右開口：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 
	直向型橢圓：$\dfrac{x^2}{\underset{\substack{\downarrow\\小}}{b^2}}+\dfrac{y^2}{\underset{\substack{\downarrow\\大}}{a^2}}=1$ 	上下開口：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 
形狀與方程式的判別方式	1. 誰的分母大，就趴在誰上面 2. 分母大的當 a^2	1. x 放前面開口向左右，y 放前面開口向上下 2. 前面的分母當 a^2
a、b、c 的平方關係	$a^2=b^2+c^2$	$c^2=a^2+b^2$

4. 將雙曲線的標準式展開所得的方程式，稱做雙曲線的一般式 $ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$，其中 $ac<0$。如：$\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(y+2)^2}{3}=1 \underset{\text{配方}}{\overset{\text{展開}}{\rightleftarrows}} 3x^2-2y^2-6x-8y-11=0$。

NOTE 將一般式 x、y 各別配方後可得回標準式，並可找出雙曲線的各要素。

難易度

01 老師講解 由雙曲線的標準式求各要素 學生演練

試求雙曲線 $9x^2-y^2=-1$ 的：

(1) 中心 (2) 頂點 (3) 焦點

(4) 貫軸長、共軛軸長 (5) 正焦弦長。

試求雙曲線 $4x^2-9y^2=36$ 的：

(1) 中心 (2) 頂點 (3) 焦點

(4) 貫軸長、共軛軸長 (5) 正焦弦長。

單元 13

難易度

02 老師講解 由雙曲線的一般式求各要素 學生演練

試求雙曲線 $\Gamma:9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$ 的：

(1) 頂點 (2) 焦點 (3) 正焦弦長。

試求雙曲線 $\Gamma:4x^2-25y^2-16x-50y+91=0$ 的：

(1) 中心 (2) 焦點 (3) 正焦弦長。

難易度

03 **老師講解**　**由已知條件求雙曲線的標準式**　**學生演練**

試求滿足下列條件的雙曲線方程式：

(1) 雙曲線上任一點到兩焦點 $F_1(-2,1)$、$F_2(-2,5)$ 距離差的絕對值為 2。

(2) 雙曲線的一焦點為 $(6,-2)$，共軛軸在直線 $x=1$ 上，正焦弦長 $\frac{9}{2}$。

試求滿足下列條件的雙曲線方程式：

(1) 雙曲線的頂點為 $(1,1)$、$(5,1)$，共軛軸長為 6。

(2) 雙曲線的兩焦點 $F_1(-1,3)$、$F_2(-1,-5)$，且雙曲線上有一點 $P(5,3)$。

重點 由雙曲線的定義式$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$（$\overline{F_1F_2}>2a$）找出焦點及貫軸長

難易度

04 老師講解 **由定義式中的要素求其他要素** **學生演練**

已知一雙曲線方程式為$|\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}|=6$，試求雙曲線的：

(1)焦點坐標　(2)貫軸長　(3)正焦弦長。

已知一雙曲線方程式為$|\sqrt{x^2+(y+2)^2}-\sqrt{x^2+(y-4)^2}|=4$，試求雙曲線的：　(1)中心　(2)頂點　(3)正焦弦長。

重點　判別雙曲線方程式

若方程式 $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}=1$ 為雙曲線，則 $AB<0$。

難易度

05　老師講解　判別雙曲線的標準式　學生演練

已知方程式 $\dfrac{x^2}{k+3}+\dfrac{y^2}{2-k}=1$，

(1) 此方程式為一雙曲線，試求 k 的範圍？

(2) 若此雙曲線的貫軸在 y 軸上，試求 k 的範圍？

已知方程式 $\dfrac{x^2}{k+1}+\dfrac{y^2}{3-k}=1$，

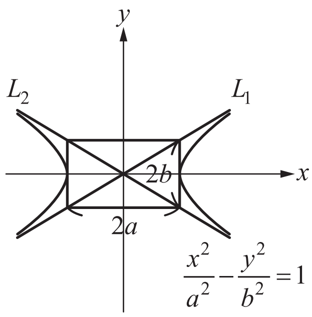
(1) 此方程式為一雙曲線，試求 k 的範圍？

(2) 若此雙曲線的貫軸在 x 軸上，試求 k 的範圍？

重點　雙曲線的漸近線

假設圖形上一點沿曲線無限遠離原點，而與某一條直線的距離越來越接近零，則這條直線稱為這個曲線的**漸近線**。

1. 雙曲線有兩條漸近線，下列四種雙曲線標準式的漸近線分別為：



   (1) 雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的漸近線為 $bx\pm ay=0$。

   (2) 雙曲線 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 的漸近線為 $ax\pm by=0$。

   (3) 雙曲線 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 的漸近線為 $b(x-h)\pm a(y-k)=0$。

   (4) 雙曲線 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ 的漸近線為 $a(x-h)\pm b(y-k)=0$。

2. 找雙曲線的漸近線時有兩種方法：

   方法 1：將雙曲線標準式等號右側的常數項令為 0，再將等號左側的二次式利用平方差公式因式分解，分解後 2 個括號內的式子令為 0，即為兩條漸近線。

   方法 2：通過雙曲線的貫軸頂點、共軛軸端點，做出長度為 $2a$、$2b$ 的矩形，兩條對角線即為兩條漸近線，利用斜率與中心坐標，可求出兩條漸近線方程式。

3. 雙曲線上任一點到兩漸近線的距離乘積為定值 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$。

4. 已知兩條漸近線求雙曲線：已知雙曲線 Γ 的漸近線 $L_1:a_1x+b_1y+c_1=0$，$L_2:a_2x+b_2y+c_2=0$，可令雙曲線 $\Gamma:(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k$，$k$ 為不等於 0 的常數。

難易度

06 老師講解 **雙曲線的漸近線** 學生演練

試求雙曲線 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ 的漸近線。

試求雙曲線 $(x-1)^2-\frac{(y+2)^2}{4}=1$ 的漸近線。

單元13

難易度

07 老師講解　**由雙曲線的漸近線求雙曲線方程式**　學生演練

已知一雙曲線 Γ 的兩條漸近線為 $x-3y+2=0$、$x+3y+2=0$，且 Γ 通過 $P(2,-1)$，試求：

(1) 雙曲線 Γ 的方程式　(2) 貫軸長。

已知一雙曲線 Γ 的兩條漸近線為 $2x+3y=0$、$2x-3y=0$，且 Γ 通過 $P(0,1)$，試求 Γ 的正焦弦長。

自我挑戰

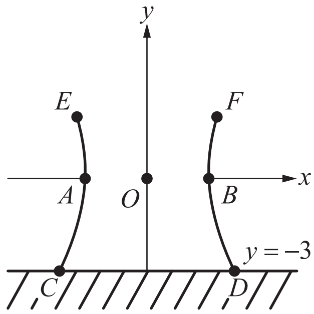
1. 設 x、y 均為實數，若滿足 $\left|\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}\right|=6$ 的所有點 $P(x,y)$ 所形成的圖形為雙曲線，試求雙曲線的共軛軸長為________。

2. 中心在 $(1,3)$，其中一個頂點為 $(-1,3)$，正焦弦長為 9 的雙曲線方程式為____________。

3. 已知雙曲線 Γ 的中心在原點，貫軸為 x 軸，Γ 的其中一條漸近線斜率為 $\frac{2}{3}$，且兩焦點間的距離為 $4\sqrt{13}$，則雙曲線方程式為__________。

4. 已知雙曲線 $\Gamma:\frac{(y+3)^2}{7}-\frac{(x+1)^2}{9}=1$ 的兩個焦點為 F_1、F_2，且 Γ 上有一點 $P(-5,k)$，則 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=$________。

素 5. 冷卻塔的塔身為雙曲線型，今有一冷卻塔模型塔身的方程式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>0$，$b>0$，且 $-3\le y\le 2$，最窄的部份 $\overline{AB}=4$，冷卻塔底部的長度 $\overline{CD}=4\sqrt{2}$，則數對 $(a,b)=$________。

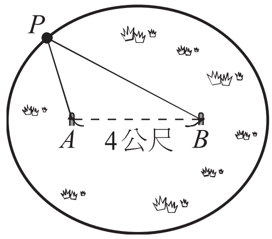


歷屆試題

(　　) 1. 已知 $a>0$，拋物線 $y=ax^2$ 的正焦弦 $\overline{F_1F_2}$ 長度為 8，且其頂點為 V，則 $\triangle VF_1F_2$ 的面積為何？

(A) 8　(B) 16　(C) 24　(D) 32。　**【113(C)，答對率 32%】**

(　　) 2. 農夫將一隻牛的項圈串上一條長 8 公尺的繩子，並將繩子的兩端分別套在相距 4 公尺的兩根木樁上。假設牛在草地上移動的最大範圍為一橢圓形區域，如圖所示，其中 A、B 為木樁位置，而 P 為牛的位置，且 $\overline{PA}+\overline{PB}\le 8$（公尺），則牛離兩根木樁連線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的最遠距離約為多少公尺？



(A) $\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) $4\sqrt{3}$　(D) 12。　**【112(C)，答對率 42%】**

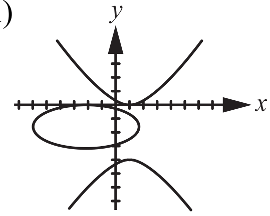
(　　) 3. 若 $P(x,y)$ 為橢圓 $4x^2+6y^2-12y-6=0$ 上任意一點，則 $x+3y$ 的最大值為何？

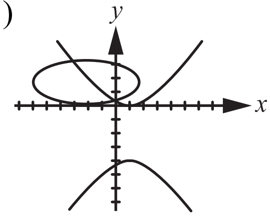
(A) $3+7\sqrt{3}$　(B) $3+5\sqrt{3}$　(C) $3+3\sqrt{5}$　(D) $3+\sqrt{21}$。　**【111(C)，答對率 26%】**

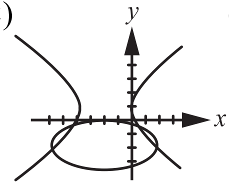
(　　) 4. 若橢圓曲線上的任意點到兩點 $(2,-3)$、$(-4,-3)$ 的距離和為 10，則此橢圓之短軸長為何？

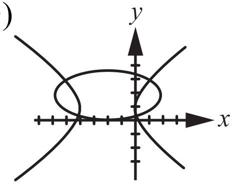
(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 8。　**【110(B)，答對率 26%】**

(　　) 5. 若有兩個二次曲線方程式，分別為 $x^2+4y^2+4x-16y+4=0$ 與 $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$，則下列何者為此兩曲線的圖形組合？

(A)


(B)


(C)


(D)


【110(C)，答對率 43%】

(　　) 6. 若 C 為坐標平面上的雙曲線，且其方程式為 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$，則下列哪一條直線與 C 沒有交點？

(A) $y=\dfrac{-2}{5}x$　(B) $y=\dfrac{-1}{5}x$　(C) $y=\dfrac{3}{5}x$　(D) $y=\dfrac{4}{5}x$。　**【109(B)，答對率 31%】**

(　　) 7. 若給定一橢圓標準式 $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{144}=1$，則下列何者正確？

(A) $(4,-2)$ 為其中一焦點　(B) $(9,-2)$ 為其中一長軸頂點

(C) $(4,10)$ 為其中一短軸頂點　(D) 正焦弦長為 $\dfrac{25}{6}$。　**【109(C)，答對率 46%】**

單元 13

(　　) 8. 已知點 F 及直線 L 分別為橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 的焦點及短軸。若以直線 L 為準線及點 F 為焦點所作出拋物線的方程式為 $4c(x-h)=(y-k)^2$，則 $|chk|=$？

(A) 12　(B) 8　(C) 6　(D) 4。　【108(C)，答對率 31%】

(　　) 9. 已知 F_1、F_2 為橢圓 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的焦點，且 F_3、F_4 為雙曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的焦點。若 P 點為上述橢圓與雙曲線之交點，則下列何者正確？

(A) $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=24$　(B) $\overline{PF_3}+\overline{PF_4}=26$　(C) $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=6$

(D) $|\overline{PF_3}-\overline{PF_4}|=6$。　【108(C)，答對率 29%】

(　　) 10. 若一拋物線之準線為 $x=-1$，焦點為 $(3,3)$，則此拋物線之方程式為何？

(A) $y^2-4x+6y+13=0$　(B) $y^2-4x-2y+13=0$

(C) $y^2-8x-2y+25=0$　(D) $y^2-8x-6y+17=0$。　【107(B)，答對率 32%】

(　　) 11. 已知橢圓 $E:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 與圓 $C:x^2+y^2-8x+12=0$，則橢圓 E 與圓 C 有多少個交點？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4。　【106(B)，答對率 45%】

(　　) 12. 已知雙曲線 $H:\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 兩頂點的距離為 a，橢圓 $E:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 長軸長為 b，則 $a+b=$

(A) 16　(B) 18　(C) 20　(D) 22。　【106(B)，答對率 39%】

(　　) 13. 若雙曲線 $4x^2-16y^2+4x+16y+1=0$ 的貫軸長及正焦弦長分別為 i、j，則 $i+j=$？

(A) $\frac{3}{2}$　(B) 2　(C) $\frac{5}{2}$　(D) 5。　【106(C)，答對率 29%】