



二元一次不等式與 線性規劃



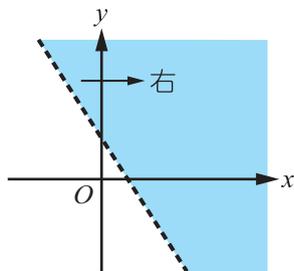
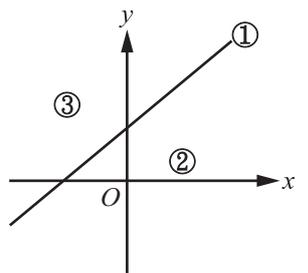
12-1

二元一次不等式的圖形

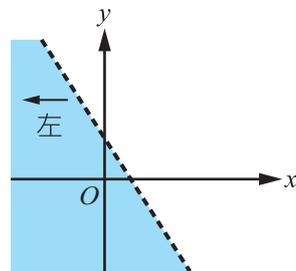


重點 二元一次不等式的圖形

- 二元一次方程式 $ax+by+c=0$ (a 、 b 不同時為 0) 的圖形為平面上的
一直線，此直線將平面分成三部分，即直線本身①，及兩個半平面②
與③。
- 若 a 、 b 、 c 為實數，且 a 、 b 不同時為 0，形如 $ax+by+c>0$ 、
 $ax+by+c<0$ 、 $ax+by+c\geq 0$ 、 $ax+by+c\leq 0$ 的式子稱為二元一次不等
式，其中 $ax+by+c>0$ 、 $ax+by+c<0$ 的圖形為不包含直線的半平面，
而 $ax+by+c\geq 0$ 、 $ax+by+c\leq 0$ 則包含直線本身與半平面。
- 判斷不等式的圖形是在哪一個半平面時，可將原點 $(0,0)$ 代入 $ax+by+c$ ，若值大於 0，
表包含原點 $(0,0)$ 的半平面為 $ax+by+c>0$ 解的區域；反之，若值小於 0，則包含原點 $(0,0)$
的半平面為 $ax+by+c<0$ 解的區域。
- 平面上一直線 $L:ax+by+c=0$ ，
 - 當 $a>0$ 時，則：
 - $ax+by+c>0$ 的圖形為不包含直線本身的右半平面，如圖（一）。
 - $ax+by+c<0$ 的圖形為不包含直線本身的左半平面，如圖（二）。
 若不等式中含有等號，則另外包含直線 L 本身。



圖（一）



圖（二）

- 當 $b>0$ 時，則：
 - $ax+by+c>0$ 的圖形為不包含直線本身的上半平面，如圖（三）。
 - $ax+by+c<0$ 的圖形為不包含直線本身的下半平面，如圖（四）。

若不等式中含有等號，則另外包含直線 L 本身。

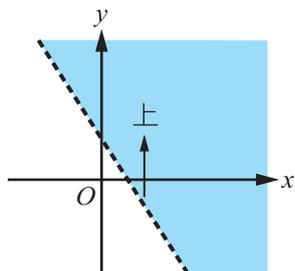


圖 (三)

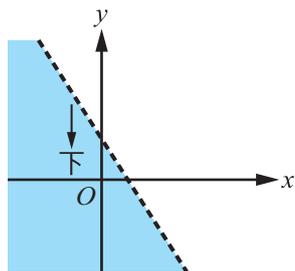


圖 (四)

5. 已知 $L: ax+by+c=0$ (a 、 b 不同時為 0)，坐標平面上有 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 兩點，

(1) ① 若 A 、 B 兩點在直線 L 的異側，則 $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) < 0$ 。

② 若 A 、 B 兩點在直線 L 的同側，則 $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) > 0$ 。

(2) ① 若 \overline{AB} 與 L 相交 (\Rightarrow 點在異側或在直線上)，則 $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) \leq 0$ 。

② 若 \overline{AB} 與 L 不相交 (\Rightarrow 點在同側)，則 $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) > 0$ 。

難易度

01

老師講解

二元一次不等式的圖形

學生演練



試在坐標平面上，畫出下列不等式的圖形：

(1) $3x+4y-12 \geq 0$ (2) $-3x+y+6 > 0$ 。

試在坐標平面上，畫出下列不等式的圖形：

(1) $x+2y+2 < 0$ (2) $-x-y+4 \geq 0$ 。

難易度 🐾🐾



02 老師講解

由已知的解區域寫二元一次不等式

學生演練

已知 $A(-1,2)$ ， $B(3,0)$ ，試求包含直線 AB 與原點所在的半平面不等式。

先備公式：

通過 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 兩點的直線斜率為

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

已知 $A(3,0)$ ， $B(0,-2)$ ，試求不含直線 AB 也不包含原點所在的半平面不等式。

先備公式：

截距式：已知直線 L 的 x 截距為 a ， y 截距為 b ， a 、 b 皆不為 0，則直線 L 方程式：

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1。$$

單元
12

難易度 🐾🐾



03 老師講解

已知點在直線的某一側平面

學生演練

已知 $P(2,3)$ 在直線 $L: x - 2y + k = 0$ 的右半平面，試求 k 的範圍。

已知 $A(-2,1)$ 在直線 $L: 3x - y = k$ 的左半平面，試求 k 的範圍。

難易度 

04 老師講解

同側異側與相交不相交

學生演練 

已知 $A(-1,4)$ 、 $B(3,0)$ ，若線段 \overline{AB} 與直線 $L:2x+y+k=0$ 相交，試求 k 的範圍。

已知 $A(2,-1)$ 、 $B(4,3)$ 在直線 $L:x-2y=k$ 的同側，試求 k 的範圍。

**重點** 二元一次聯立不等式的圖形

- 二元一次聯立不等式的圖形，為每一個不等式圖形的重疊區域，即共同解的區域。
- 若每一個不等式的圖形沒有重疊的區域，則此二元一次聯立不等式無解。

難易度 

05 老師講解

二元一次聯立不等式的圖形

學生演練 

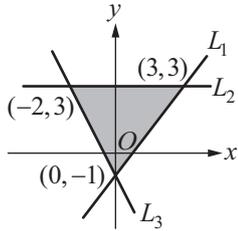
試在坐標平面上，畫出聯立不等式

$$\begin{cases} 3x+y+3 \leq 0 \\ x-4y-4 > 0 \end{cases} \text{的圖形。}$$

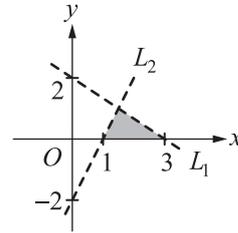
試在坐標平面上，畫出聯立不等式

$$\begin{cases} x-2y+2 \geq 0 \\ x-2y-4 \leq 0 \end{cases} \text{的圖形。}$$

試將下圖陰影處以聯立不等式表示。



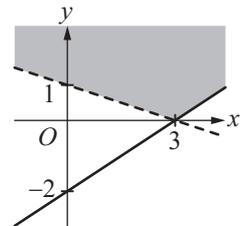
試將下圖陰影處以聯立不等式表示。



自我挑戰



- 若 $P(a, 2)$ 落在直線 $L: y - 2x + 4 = 0$ 的左側，則 a 的範圍為 _____。
- 已知 $A(-2, 1)$ 、 $B(3, -1)$ 在直線 $L: x + ky = 1$ 的異側，試求 k 的範圍為 _____。
- 試將右圖的解區域以聯立不等式表示： _____。
- 坐標平面上滿足 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $x - 3y + 2 \geq 0$ 、 $x + y - 2 \leq 0$ 的解區域面積為 _____。



- 素** 5. 已知坐標平面上沿著 $-5 \leq x \leq 5$ 、 $-5 \leq y \leq 5$ 的範圍有一圍籬，今有一小豬在 $(1, 4)$ 的位置，而大野狼位在 $(-1, -1)$ 的位置，今農夫想沿著 $kx - y + 3 = 0$ 的直線蓋一座磚牆，使得大野狼與小豬剛好在磚牆的兩側，試求 k 的範圍為 _____。

12-2

線性規劃



重點

線性規劃

1. 在二元一次聯立不等式解的區域（可行解區域）中，若有一個解 (x, y) ，可使二元一次式 $ax+by$ （ a 、 b 為任意實數且不同時為 0）得到最大值或最小值，解 (x, y) 稱為**最佳解**，而最大值或最小值則稱為**最佳值**。
2. 日常生活中，常有一些找最佳值與最佳解的問題，像是在限定的資源成本下，希望可以將其資源適當的分配以得到最大利潤的問題，而又因為此類問題的目標函數大多為一次函數，故將找最佳值的方法稱做線性規劃。
3. 線性規劃求最佳解的一般步驟：
 - (1) 依題意列出滿足條件的限制式與目標函數
 - (2) 畫出可行解區域
 - (3) 求出可行解區域的頂點坐標
 - (4) 利用頂點法，將各頂點坐標代入目標函數，可求出最大值或最小值。

難易度

01

老師講解

封閉區域找最佳值

學生演練



試求在限制式 $\begin{cases} y \geq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ 3x + 2y - 9 \leq 0 \end{cases}$ 的條件下，目標

函數 $f(x, y) = x - 2y$ 的最大值與最小值。

試求在限制式 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + 3y \leq 12 \\ 2x + 5y \leq 10 \end{cases}$ 的條件下，目標函

數 $f(x, y) = 7x + 14y - 5$ 的最大值與最小值。



02 老師講解

開放區域找最佳值

學生演練

試求在限制式 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 8 \\ 3x + y \geq 5 \end{cases}$ 的條件下，目標函數

$f(x, y) = 2x + y + 1$ 的最小值。

試求在限制式 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 3 \\ 2x + y \geq 3 \end{cases}$ 的條件下，目標函數

$f(x, y) = 2x + 5y$ 的最小值。

難易度 🐾🐾🐾

03 老師講解

線性規劃

學生演練



翔宇高中校慶某班級製作了壓克力與木頭兩種材質的鑰匙圈，兩種鑰匙圈的總數不超過 200 個，成本不超過 6200 元。已知壓克力與木頭的成本一個分別為 25 元和 40 元，而獲利分別為 40 元與 50 元。試問在全數賣出的情況下需要各製作兩種鑰匙圈多少個，可得到最大的獲利？

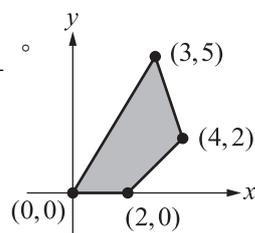
某縣市規劃兩種包裝的垃圾袋， A 包裝內有 3 公升袋 12 個，5 公升袋 10 個； B 包裝內有 3 公升袋 15 個，5 公升袋 5 個，已知 A 包裝售價一包 30 元， B 包裝售價一包 25 元，今阿泰家中一季至少需要使用 3 公升袋 120 個，5 公升袋 70 個，試問兩種包裝該各買多少包，可在花費最少下，獲得足夠的需求量？



自我挑戰



- 在 $x \geq 0$ 、 $y \geq -1$ 、 $x + y \leq 2$ 的條件下，求 $2x - 3y$ 的最大值為 _____。
- 在 $y \geq 0$ 、 $3x + y - 6 \leq 0$ 、 $2x - 3y + 7 \geq 0$ 的條件下， $2x - y$ 的最小值為 _____。
- 在不等式 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $2x + y \leq 4$ 、 $x + 3y \leq 6$ 的條件下，求 $f(x, y) = x + y$ 的最大值為 _____。
- x 、 y 滿足限制條件 $\begin{cases} -1 \leq x - y \leq 3 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$ ，求 $f(x, y) = x - 3y$ 的最小值為 _____。
- 設 (x, y) 為右圖中區域內（含邊界）的一點，試求 a 的範圍，使得當 $(x, y) = (3, 5)$ 時， $f(x, y) = ax + y$ 有唯一最大值。答：_____





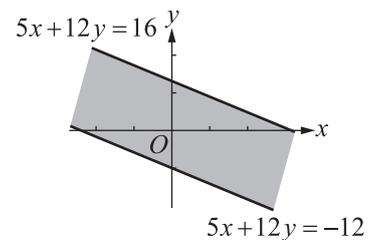
歷屆試題



- () 1. 設直線 $L: 2x - 3y - 6 = 0$ 及 $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$ 、 $C(1, 3)$ 三點。若 A 與 C 落在直線 L 的同側，而 B 與 C 落在直線 L 的異側，則點 $(2a_1 - 3a_2 - 6, 2b_1 - 3b_2 - 6)$ 落在第幾象限？
 (A)一 (B)二 (C)三 (D)四。 【113(B)，答對率 38%】

- () 2. 小明到便利商店購買奶茶與紅茶，奶茶與紅茶的價格分別為每瓶 20 元與 12 元。已知小明兩者都要買，而且花費又不想超過 70 元。若小明買了 x 瓶奶茶與 y 瓶紅茶，則數對 (x, y) 的可能性有幾種？
 (A)5 (B)6 (C)7 (D)8。 【113(B)，答對率 53%】

- () 3. 在坐標平面上，二元一次聯立不等式 $\begin{cases} 5x + 12y \leq 16 \\ 5x + 12y \geq -12 \end{cases}$ 的解如圖深色區域，下列選項中哪一個圓，完全落在此深色區域內？
 (A) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$ (B) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$
 (C) $x^2 + y^2 = 1$ (D) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$ 【113(B)，答對率 27%】



- () 4. 某間中式喜餅店推出 A 、 B 兩種新口味的糕餅，其製作成本與獲利如下表。已知店家想將這兩種糕餅的總數量限制在 28 個（含）以內、總製作成本限制在 3000 元（含）以下。若這兩種新產品最後都銷售一空，則販賣這兩種糕餅所獲得的最大利潤為多少元？

	製作成本	獲利
A 口味糕餅 1 個	100 元	80 元
B 口味糕餅 1 個	120 元	90 元

- (A)2340 (B)2360 (C)2380 (D)2400。 【113(B)，答對率 46%】
- () 5. 在坐標平面上，若 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別為 $A(-3, 4)$ 、 $B(-1, 2)$ 與 $C(3, 6)$ ，則 $\triangle ABC$ 與其內部區域可由下列哪一組不等式表示？
- (A) $\begin{cases} x - y + 3 \leq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \\ x - 3y + 15 \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \\ x - 3y + 15 \leq 0 \end{cases}$
- (C) $\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x + y - 1 \leq 0 \\ x - 3y + 15 \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x - y + 3 \leq 0 \\ x + y - 1 \leq 0 \\ x - 3y + 15 \leq 0 \end{cases}$ 。 【113(C)，答對率 41%】

() 6. 二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+3y \geq 6 \\ 2x+y \leq -4 \end{cases}$ 的圖解區域屬於哪一象限？

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限。

【112(C)，答對率 57%】

() 7. 坐標平面上，若點 $A(a, -6)$ 在直線 $L: 2x - y + 12 = 0$ 之右半平面，則下列何者為 a 的可能值？

- (A) -15 (B) -12 (C) -10 (D) -7。

【111(C)，答對率 53%】

() 8. 下列數對 (x, y) 何者滿足聯立不等式 $\begin{cases} 100x+2y-100 \geq 0 \\ 2x+100y+100 \leq 0 \end{cases}$ ？

- (A) (0,0) (B) (1,1) (C) (2,1) (D) (2,-2)。

【110(B)，答對率 64%】

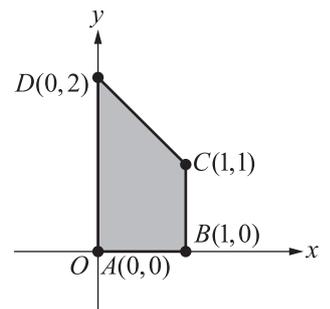
() 9. 若小林準備 600 萬元投資股票 x 萬元及債券 y 萬元，而投資股票金額不會低於債券金額的 2 倍，則下列何者為題意之限制條件？

- (A) $\begin{cases} x+y \leq 600 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x+y \leq 600 \\ 2x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x+y > 600 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x+y > 600 \\ 2x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 。

【110(B)，答對率 55%】

() 10. 如圖所示，四邊形 $ABCD$ 的四個頂點為 $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(1,1)$ 及 $D(0,2)$ ，則四邊形 $ABCD$ 區域為下列哪一個聯立不等式的圖解？

- (A) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ x+2y \leq 2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \\ 2x+y \leq 2 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x+y \leq 2 \end{cases}$
 (D) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \\ x+y \leq 2 \end{cases}$ 。



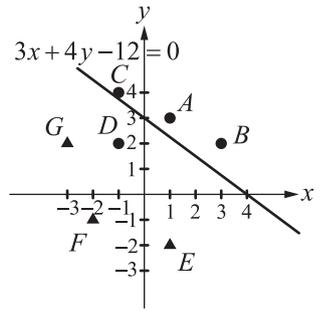
【109(B)，答對率 36%】

() 11. 在 $\begin{cases} x+2y-6 \geq 0 \\ x+y-10 \leq 0 \\ 2 \leq x \leq 9 \end{cases}$ 的條件下，求其可行解區域的面積（平方單位）為何？

- (A) $\frac{119}{4}$ (B) $\frac{59}{2}$ (C) $\frac{117}{4}$ (D) $\frac{55}{2}$ 。

【109(C)，答對率 27%】

- () 12. 在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點 $A(1,3)$ 、 $B(3,2)$ 、 $C(-1,4)$ 、 $D(-1,2)$ 、 $E(1,-2)$ 、 $F(-2,-1)$ 、 $G(-3,2)$ 分屬 ●、▲ 二類，其中直線 $L: 3x+4y-12=0$ 未能將它們正確分類，如右圖標示。若將 L 平行移動至新的位置成為新直線 L_1 且能達到正確分類目的，則下列何者可為 L_1 的直線方程式？



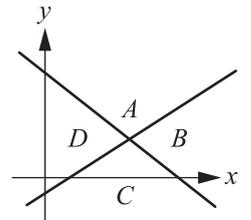
- (A) $3x+4y+2=0$ (B) $3x+4y-6=0$ (C) $6x+8y+3=0$
 (D) $6x+8y-3=0$ 。

【109(C)，答對率 30%】

- () 13. 設 (x,y) 滿足 $y \geq 0$ 、 $0 \leq x \leq 4$ 、 $-2 \leq x-2y \leq 2$ ，試問 $f(x,y) = x-y$ 之最大值為何？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

【108(B)，答對率 42%】

- () 14. 有兩條直線 $L_1: 3x-5y=2$ 、 $L_2: x+2y=3$ 將平面分成四個區域，如圖所示，試問區域 A 可用哪一組不等式表示？



- (A) $\begin{cases} 3x-5y \geq 2 \\ x+2y \geq 3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x-5y \leq 2 \\ x+2y \geq 3 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 3x-5y \geq 2 \\ x+2y \leq 3 \end{cases}$
 (D) $\begin{cases} 3x-5y \leq 2 \\ x+2y \leq 3 \end{cases}$ 。

【108(C)，答對率 49%】

- () 15. 在滿足二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \\ x-y \leq 3 \\ x+y \leq 4 \end{cases}$ 的條件下。若 $3x-5y$ 的最大值及最小值分別為 M 及 m ，則 $M+m$ 之值為何？

- (A) -9 (B) -4 (C) -3 (D) 3。

【107(B)，答對率 39%】

- () 16. 坐標平面上滿足不等式 $\begin{cases} 2x+y \leq 10 \\ x+2y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 的區域面積為何？

- (A) 12 (B) 13 (C) 15 (D) 16。

【107(C)，答對率 46%】