單元 11 一次聯立方程式與矩陣

11-1 一次方程組與列運算

重點 克拉瑪公式

1. 二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 中，令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$（$x$、$y$ 前面的係數）

$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$（等號右邊的常數項取代 x 的係數）

$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$（等號右邊的常數項取代 y 的係數）

則 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$（$\Delta\neq 0$）。

2. **平面上兩條直線的關係與方程組解的意義**

名稱	相容方程組	相依方程組	矛盾方程組
幾何意義（兩直線的關係）	相交於一點	兩直線重合	兩直線平行
代數意義（方程組的解）	恰有一組解	無限多組解	無解
克拉瑪公式	$\Delta\neq 0$ $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$	$\Delta=0$ $\Delta_x=\Delta_y=0$	$\Delta=0$ $\Delta_x\neq 0$ 或 $\Delta_y\neq 0$

3. 三元一次聯立方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 中，令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$（$x$、$y$、$z$ 前面的係數）

$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$　$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$　$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

（等號右邊的常數項分別取代 x、y、z 項的係數）

則 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$（$\Delta\neq 0$）。

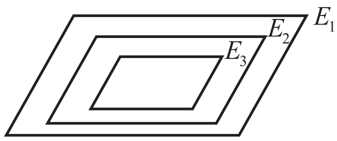
4.　Δ與解的關係

(1) $\Delta \neq 0$時，方程組恰有一組解：$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$。

(2) $\Delta = 0$，$\Delta_x \neq 0$或$\Delta_y \neq 0$或$\Delta_z \neq 0$時，方程組無解。

(3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$時，方程組有無限多組解或無解。

① $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$，$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$（兩列成比例，行列式值為 0），且$\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$，



圖（一）

（兩列成比例，行列式值為 0）

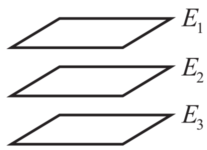
三個平面的關係為三平面重合，如圖（一），有無限多組解。

② $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+2y+2z=3 \\ 3x+3y+3z=4 \end{cases}$，$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$（兩列成比例，行列式值為 0），

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$

（皆其中兩行成比例，行列式值為 0），

三個平面的關係為三平面互相平行，如圖（二），沒有共同解。



圖（二）

難易度

01　**老師講解**　**認識克拉瑪公式**　**學生演練**

利用克拉瑪公式解方程組$\begin{cases} 2x+3y+4=0 \\ 7x+11y-1=0 \end{cases}$。

利用克拉瑪公式解方程組$\begin{cases} 8x+7y=-2 \\ 6x+5y=1 \end{cases}$。

難易度

02 老師講解 **無解與無限多組的條件** 學生演練

若聯立方程組 $\begin{cases}4x+ky=2\\kx+9y=-3\end{cases}$ 無解，則 k 之值為何？

NOTE 亦可用單元 5 的方法 $\frac{4}{k}=\frac{k}{9}\neq\frac{2}{-3}$ 解之。

若聯立方程組 $\begin{cases}x+ay=3\\ax+4y=a-4\end{cases}$ 有無限多組解，則 a 之值為何？

NOTE 亦可用單元 5 的方法 $\frac{1}{a}=\frac{a}{4}=\frac{3}{a-4}$ 解之。

難易度

03 老師講解 **利用克拉瑪公式解三元一次聯立方程組** 學生演練

利用克拉瑪公式求出方程組 $\begin{cases}2x+y-3z=1\\3x+5z=-2\\-x+3y+2z=0\end{cases}$ 中 y 的值。

利用克拉瑪公式求出方程組 $\begin{cases}x+2y+3z=4\\-2x+3y-z=0\\x-y+2z=3\end{cases}$ 中 z 的值。

難易度

04 老師講解 **Δ與解的關係** 學生演練

已知方程組 $\begin{cases} 2x+ky-5z=2 \\ (k-2)x-2y+z=0 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ 有唯一解，試求 k 的條件。

已知方程組 $\begin{cases} x+3y+kz=4 \\ 2x+5y-kz=-1 \\ x+5y-7z=22 \end{cases}$ 有唯一解，試求 k 的條件。

難易度

05 老師講解 **特殊方程組** 學生演練

解方程組 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{z}=1 \\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{z}=11 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=13 \end{cases}$ 。

令 x、y、z 皆為不為 0 的實數，解方程組
$\begin{cases} x+6y=xy \\ 2x+3z=2xz \\ 4y+z=yz \end{cases}$ 。

單元 11

重點　列運算

一、矩陣

1. 為了簡化方程組的運算過程，將方程組的係數分離出來，依照順序排成矩形的陣列，稱為矩陣，例如將方程組 $\begin{cases}2x+y-3z=1\\3x+5z=-2\\-x+3y+2z=0\end{cases}$ 表示成增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&-3&1\\3&0&5&-2\\-1&3&2&0\end{array}\right]$。

2. 矩陣中，橫的稱作列，直的稱作行，故上例為 3 列 4 行稱作 3×4 階的矩陣。

3. 上例矩陣稱作原方程組的增廣矩陣，若將最後一行的常數項刪去，則稱作原方程組的係數矩陣。

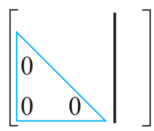
方程組　　增廣矩陣　　係數矩陣

$$\begin{cases}2x+y-3z=1\\3x+5z=-2\\-x+3y+2z=0\end{cases}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&-3&1\\3&0&5&-2\\-1&3&2&0\end{array}\right]\rightarrow\begin{bmatrix}2&1&-3\\3&0&5\\-1&3&2\end{bmatrix}$$

二、高斯消去法與矩陣的列運算

高斯消去法	矩陣的列運算
為了將方程組更有系統的解出來，利用以下 3 種運算方式，逐步消去未知數的方法：	對每個方程式的運算操作，相當於對增廣矩陣的各列操作，因此，可以對矩陣做下列操作：
1. 方程組的某兩個方程式互相對調。	1. 矩陣中的某兩列可相互對調。
2. 將某一個方程式乘以一個不為 0 的數。	2. 將某一列乘以一個不為 0 的數。
3. 將某一個方程式乘以一個不為 0 的數，並加到另一個方程式。	3. 將某一列乘以一個不為 0 的數，並加到另一列。

NOTE 矩陣的列運算目標：想辦法讓左下角三角形三個數字變 0。



例如 利用高斯消去法與矩陣的列運算解方程組 $\begin{cases}2x+y-z=3\\x-2y=-3\\3x+2y-2z=5\end{cases}$。

高斯消去法

$$\begin{cases}2x+y-z=3\cdots①\\x-2y=-3\cdots②\\3x+2y-2z=5\cdots③\end{cases}\xRightarrow{\text{將①②對調}}\begin{cases}x-2y=-3\cdots②\\2x+y-z=3\cdots①\\3x+2y-2z=5\cdots③\end{cases}\xRightarrow[②\times(-3)+③]{②\times(-2)+①}\begin{cases}x-2y=-3\cdots②\\5y-z=9\cdots④\\8y-2z=14\cdots⑤\end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{將④}\times(-\frac{8}{5})+⑤}\begin{cases}x-2y=-3\cdots②\\5y-z=9\cdots④\\-\frac{2}{5}z=-\frac{2}{5}\cdots⑥\end{cases}$$

，由⑥ $\Rightarrow z=1$ 代回④ $\Rightarrow 5y-1=9\Rightarrow y=2$ 代回②

$\Rightarrow x-4=-3\Rightarrow x=1$

矩陣的列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&3\\1&-2&0&-3\\3&2&-2&5\end{array}\right]\xrightarrow{\text{將1、2列對調}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-3\\2&1&-1&3\\3&2&-2&5\end{array}\right]\begin{array}{l}\times(-2)\\ \times(-3)\end{array}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-3\\0&5&-1&9\\0&8&-2&14\end{array}\right]\times\left(-\frac{8}{5}\right)$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-3\\0&5&-1&9\\0&0&-\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\end{array}\right]$$

，由第三列可知 $-\frac{2z}{5}=-\frac{2}{5}\Rightarrow z=1$ 代回第二列 $\Rightarrow 5y-1=9$

$\Rightarrow y=2$ 代回第一列 $\Rightarrow x-4=-3$

$\Rightarrow x=1$ $\therefore x=1$，$y=2$，$z=1$

難易度

06 老師講解 矩陣的列運算（恰有一組解） 學生演練

利用矩陣的列運算解方程組

$$\begin{cases}x+y+2z=4\\x-2y+z=5\\3x-6y-2z=5\end{cases}$$ 。

利用矩陣的列運算解方程組

$$\begin{cases}x+2y-z=-3\\x-3y+2z=10\\2x-y-3z=3\end{cases}$$ 。

難易度

07 老師講解　**矩陣的列運算（無限多組解與無解）**　學生演練

利用矩陣的列運算解方程組$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$。

利用矩陣的列運算解方程組$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2x+y+2z=5 \\ 3x+2y+3z=8 \end{cases}$。

難易度

08 老師講解　**由矩陣的列運算結果回推原方程組**　學生演練

設某三元一次方程組的增廣矩陣為

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ a & 2 & -1 & 9 \end{array}\right]$，經一系列的列運算後可化為

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$，試求$a$、$b$、$c$之值。

增廣矩陣$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$所表示的一次方程組

與方程組$\begin{cases} x+2y+az=3 \\ 2x+by-3z=-3 \\ 4x-y-2z=c \end{cases}$有相同的解，試求

a、b、c之值。

難易度 🐾🐾🐾

09 老師講解　**無限多組解與無解的條件**　學生演練

矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a & -3 \\ 0 & -3 & 9 & b \end{array}\right]$ 所對應的三元一次方程組有無限多組解，試求 a、b 之值。

矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & a & 4 \\ 0 & 3 & -9 & -5 \end{array}\right]$ 所對應的三元一次方程組無解，試求 a 之值。

自我挑戰

1. 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}=3$，$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}=5$，$\begin{vmatrix} a & 2c \\ d & 2f \end{vmatrix}=-8$，則 $\begin{cases} ax-2by=3c \\ dx-2ey=3f \end{cases}$ 的解 (x, y) 為__________。

2. 若方程組 $\begin{cases} kx-y=k-1 \\ 4x-ky=k \end{cases}$ 為矛盾方程組，則 $k=$________。

3. 將矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & b & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & c \end{array}\right]$ 經列運算後可化成 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right]$，則 $a+b+c=$______。

4. 若方程組 $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x+ky+z=2 \\ 2x-y-2z=9 \end{cases}$ 無解，則 $k=$_______。

素 5. 小宇每天早上幫全家人買早餐，今天買 1 個蛋餅、3 個漢堡蛋及 2 杯奶茶共花費 161 元；昨天買 2 個蛋餅，2 個漢堡蛋及 3 杯奶茶共花費 165 元；前天買 3 個蛋餅、4 個漢堡蛋及 1 杯奶茶共花費 223 元。則一杯奶茶為________元。

11-2 矩陣的運算

重點　矩陣的定義

1. 矩陣是資料統計表簡化的一種寫法，例如：兩家藥局庫存的口罩數量（包）紀錄表如下：

種類 \ 藥局	活性碳口罩	外科口罩	N95 口罩
健康藥局	5	1	3
幸福藥局	6	2	4

若將文字省略，數據部分可以用矩陣 $A=\begin{bmatrix}5&1&3\\6&2&4\end{bmatrix}$ 表示。

2. **矩陣的定義：** 設 m、n 為正整數，形如 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$，由 $m\times n$ 個數所形成的矩形陣列稱之為 $m\times n$ 階矩陣，記作 $[a_{ij}]_{m\times n}$。此矩陣有 m 列 n 行，其中 a_{ij} 為第 i 列與第 j 行交叉位置上的元，稱為矩陣的第 (i, j) 元。

第 (1, 2) 元

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}5&1&3\\6&2&4\end{bmatrix}&\begin{array}{l}\rightarrow\text{第一列}\\\rightarrow\text{第二列}\end{array}\\\begin{array}{ccc}\downarrow&\downarrow&\downarrow\\\text{第一行}&\text{第二行}&\text{第三行}\end{array}&\end{array}$$

3. **方陣：** 若一矩陣的列數與行數相等時，稱為方陣。例如：3 階方陣 $\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$。

4. **矩陣相等的定義：** 當兩個矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，階數相同，且每一個相對位置的元亦相同，則稱矩陣 A 和 B 相等，記作 $A=B$。

5. **零矩陣：**

(1) 若 $m\times n$ 階矩陣的每一個元都是 0，稱作 $m\times n$ 階的零矩陣，記作 $O_{m\times n}$，例如 $O_{2\times 3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$。

(2) 階數為 $n\times n$ 的零矩陣，記作 O_n，或簡記為 O，例如 $O_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$。

6. **單位方陣：** 若 n 階方陣的主對角元都是 1，其餘所有元都是 0，則稱此矩陣為 n 階單位方陣，記作 I_n，或簡記為 I。例如 $I_1=[1]$，$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

難易度 🐾

01 老師講解 **矩陣的元** 學生演練

已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$，其中 $a_{ij}=\begin{cases} i^2-1 &，i\ge j \\ 2j &，i<j \end{cases}$，則矩陣 $A=$？

寫出一個三階方陣 $A=[a_{ij}]$，其中 $a_{ij}=i-j^2+1$，則矩陣 $A=$？

難易度 🐾

02 老師講解 **矩陣的相等** 學生演練

設 $\begin{bmatrix} 3x-1 & -3 \\ 0 & x-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$，試求 x、y、z 之值？

設 $\begin{bmatrix} a & -2 & c \\ 3 & 2a & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2b-1 & -2 & a+1 \\ 3 & b & 0 \end{bmatrix}$，則 a、b、c 之值為何？

單元11

重點　矩陣的運算

1. **矩陣的加法：**

(1) 設 A、B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$，

則 $A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$，即將相同位置的元相加，且亦為 $m\times n$ 階的矩陣。

(2) 加法反矩陣：對於每一個矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，都有另一個矩陣 $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$（即矩陣 A 的所有位置的元都乘以 (-1)），使得 $A+(-A)=O$，我們稱 $-A$ 為 A 的加法反矩陣。

例如　$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，則 $-A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$。

(3) 矩陣加法的性質：設 A、B、C 都是 $m\times n$ 階的矩陣，O 是 $m\times n$ 階的零矩陣，則

① $A+B=B+A$（矩陣加法具有交換律）

② $(A+B)+C=A+(B+C)$（矩陣加法具有結合律）

③ $A+O=O+A=A$（矩陣加法具有單位元素 O）

2. **矩陣的減法：**設 A、B 都是 $m\times n$ 階的矩陣，將矩陣減法 $A-B$ 定義為 $A-B=A+(-B)$，即將相同位置的元相減，且亦為 $m\times n$ 階的矩陣。

3. **矩陣加減法的移項規則：**若 $A+X=B$，則 $X=B-A$。

說明　$A+X=B \Rightarrow (-A)+A+X=(-A)+B \Rightarrow O+X=-A+B \Rightarrow X=B-A$

4. **矩陣的係數乘法**

(1) 設 A 是 $m\times n$ 階的矩陣，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$r$ 為實數，

則定義 $rA=\begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}$。

NOTE 記得計算 rA 時，每一個元都要乘上 r 喔！

(2) 設 A、B 為同階數的矩陣，r、s 為實數，則矩陣的係數乘法具有以下性質：

① $r(A+B)=rA+rB$。　② $(r+s)A=rA+sA$。　③ $(rs)A=r(sA)$。

5. **矩陣的乘法**

(1) 設 A 是 $m\times n$ 階的矩陣，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$B$ 是 $n\times p$ 階的矩陣，

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix},$$

則定義

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+\ldots+a_{in}\times b_{nj}$，而 C 為一個 $m\times p$ 階的矩陣。

(2) 矩陣乘法的性質：設 A、B、C 皆為矩陣，r 為實數，且下列各運算都具有意義，則

① $(AB)C=A(BC)$（矩陣的乘法具有結合律）

② $A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$（矩陣的乘法具有分配律）

③ $r(AB)=(rA)B=A(rB)$（矩陣的乘法對係數乘法具有結合律）

(3) 任何矩陣與單位方陣相乘後恆為原矩陣，即 $AI=IA=A$。

(4) 不一定成立的三個性質：

① AB 不一定等於 BA。

②若 $A^2=O$（零矩陣），A 不一定等於 O，例：$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

③若 $AB=AC$，B 不一定等於 C，例：$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$，

$AB=AC=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，但 $B\neq C$。

難易度 🐾

03 老師講解 **矩陣的加、減法與實數積** 學生演練

設 $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$，試求：

(1) $A+B$　(2) $2A-B$ 。

設 $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}$，試求：

(1) $A+2B$　(2) $B-3A$ 。

難易度 🐾

04 老師講解 **矩陣的移項法則** 學生演練

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$，

且 $2A+3X=B$，試求矩陣 X 。

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & -2\\ -4 & 0\end{bmatrix}$，

若 $2X-B=3A$，試求矩陣 X 。

難易度 🐾

05 老師講解　**矩陣的乘法**　學生演練

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 4 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ -1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，

試求矩陣 AB 。

承老師講解 5，試求：

(1) 矩陣 BA

(2) AB 是否一定等於 BA ？

難易度 🐾🐾

06 老師講解　**矩陣的乘法**　學生演練

令 $A=\begin{bmatrix}10 & -30\\ -10 & 20\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}$，

$C=\begin{bmatrix}\frac{2}{25} & \frac{-1}{25}\\ \frac{1}{25} & \frac{3}{25}\end{bmatrix}$，試求 ABC 。

令 $A=\begin{bmatrix}6 & -12\\ -12 & 24\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-11 & 33\\ -11 & 11\end{bmatrix}$，試求 AB 。

單元 11

難易度

07 老師講解　**矩陣的綜合運算**　學生演練

已知 $A+B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$A-B=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，試求：

(1) $(A+B)(A-B)$

(2) A^2-B^2

(3) $(A+B)(A-B)$ 是否一定等於 A^2-B^2？

已知 $2A+B=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$，$A-2B=\begin{bmatrix}1 & -6\\ 2 & 10\end{bmatrix}$，

試求 AB。

自我挑戰

1. 設$\begin{bmatrix} 2a-1 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b & c \\ a+4 & 0 \end{bmatrix}$，則 $a+b+c=$______。

2. $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ 滿足 $a_{ij}=\begin{cases} i+j，當 i>j \\ i-j，當 i<j \\ 0\quad，當 i=j \end{cases}$，則 A 的所有元素和為______。

3. 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，已知 $X+3B=2A$，矩陣 $X=$______。

4. 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，若 $AB=C=[c_{ij}]_{3\times 3}$，則 $c_{23}=$______。

5. 試求 $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -24 & 18 \\ 18 & -6 \end{bmatrix}=$______。

單元 11

11-3 矩陣的應用

1. **乘法反方陣**

(1) 乘法反元素：若 $x \neq 0$，則必存在一實數 y（$y=\frac{1}{x}$），使得 $xy=yx=1$，則稱 y 為 x 的乘法反元素，以 $y=x^{-1}$ 來表示。

(2) 矩陣的乘法反方陣：設 A 是一個 n 階方陣，若存在一個 n 階方陣 B，使得 $AB=BA=I_n$，則稱 B 為 A 的乘法反方陣，以 $B=A^{-1}$ 來表示。

NOTE **對二階方陣 A、B，若 B 滿足 $AB=I_2$，則 B 即為 A 的乘法反方陣，不需再檢查 $BA=I_2$。**

2. **二階反方陣的公式**

若二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且其行列式 $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，則

(1) 當 $\det(A)=0$，A 的反方陣不存在。

(2) 當 $\det(A)\neq 0$，A 有唯一的反方陣 A^{-1}，$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$，此時稱 A 為可逆矩陣。

口訣：$\dfrac{\text{主對角線做交換，次對角線給負號}}{\det(A)}$

難易度

01　老師講解　求反方陣　學生演練

判斷下列二階矩陣是否有反方陣，若有，則求出其反方陣：

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$　(2) $B=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$。

判斷下列二階矩陣是否有反方陣，若有，則求出其反方陣：

(1) $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$　(2) $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$。

難易度 🐾

02 老師講解 **反方陣存在的條件** 學生演練

設 $A=\begin{bmatrix}-4 & x\\ x & -9\end{bmatrix}$，若 A^{-1} 不存在，試求 x 之值。

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}k-2 & -2\\ -2 & k+1\end{bmatrix}$ 沒有反方陣，試求 k 之值。

單元 11

重點 用反方陣解線性方程組

二元一次方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 中，令 $A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$，則方程組可用矩陣表示成 $AX=C\cdots$①，當 A^{-1} 存在時，將①等號左右同時左乘 A^{-1}，
可得 $A^{-1}AX=A^{-1}C\Rightarrow IX=A^{-1}C\Rightarrow X=A^{-1}C$；
求出矩陣 X 後即可求出未知數 x、y。

難易度 🐾🐾

03 老師講解 **利用反方陣解方程組** 學生演練

已知矩陣 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}9 & -13\\ -5 & 7\end{bmatrix}$，試解方程組 $\begin{cases}ax+by=2\\ cx+dy=1\end{cases}$。

已知矩陣 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 5\end{bmatrix}$，試解方程組 $\begin{cases}ax+by-2=0\\ cx+dy+3=0\end{cases}$。

自我挑戰

1. 判斷下列二階矩陣是否有反矩陣，若有，則求出其反矩陣：

(1) $A=\begin{bmatrix}\sin 200^\circ & \cos 200^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ\end{bmatrix}$，$A^{-1}=$ ______。　(2) $B=\begin{bmatrix}\sqrt{6} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{6}\end{bmatrix}$，$B^{-1}=$ ______。

2. 設 $A=\begin{bmatrix}\log_2 x & 2 \\ -6 & 3\end{bmatrix}$，若 A 的反方陣不存在，則實數 $x=$ ______。

3. 若 $A=\begin{bmatrix}7 & -4 \\ 5 & -3\end{bmatrix}$，則 A^{-1} 中各元的總和為 ______。

4. 若 $A=\begin{bmatrix}11 & -10 \\ 13 & -12\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 \\ 6\end{bmatrix}$，滿足 $AX=B$，則 $X=$ ______。

5. 已知矩陣 $\begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ 的乘法反方陣為 $\begin{bmatrix}5 & 4 \\ 6 & 7\end{bmatrix}$，試求 $\begin{cases}ax+by=1 \\ cx+dy=-1\end{cases}$ 的解 $(x,y)=$ ______。

6. 設二階矩陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}2 \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 \\ -1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}3 \\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 \\ 5\end{bmatrix}$，試求矩陣 $A=$ ______。

素 7. 小宇有一副四位數號碼的密碼鎖，已知號碼鎖的密碼 $abcd$ 符合以下二階矩陣的等式：

$\begin{bmatrix}-2 & 6 \\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$ ______。

歷屆試題

(　　) 1. 已知二元一次方程組的增廣矩陣為$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$，則下列何者為此矩陣經過列運算操作後的增廣矩陣？

(A)$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$　(B)$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$　(C)$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right]$　(D)$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{array}\right]$。

【113(C)，答對率 45%】

(　　) 2. 在工程領域中，矩陣運算可用來描述系統的輸入與輸出之關聯性。已知$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$分別表示系統輸入與輸出的變量，且彼此滿足下列關係：$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 5x_2 \\ y_2 = 3x_1 + 8x_2 \end{cases}$。若此關係可用矩陣運算$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$表示，其中 A 為二階方陣。設 A 的反方陣為$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$？

(A) 2　(B) 1　(C) -1　(D) -2。　**【113(C)，答對率 36%】**

(　　) 3. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，矩陣 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。若矩陣 $C = AB$，且 $C^2 = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$，則 $d_{12}=$？

(A) -2　(B) -3　(C) -4　(D) -5。　**【112(C)，對率 49%】**

(　　) 4. 已知 a、b、c 為實數。若方程組$\begin{cases} ax+by+cz=-2 \\ bx+cy+az=-4 \\ cx+ay+bz=6 \end{cases}$的解為 $x=1$、$y=1$、$z=-1$，則下列何者為正確？

(A) $ab=6$　(B) $bc=3$　(C) $ac=2$　(D) $abc=6$。　**【112(C)，答對率 59%】**

(　　) 5. 在一個園遊會的攤位遊戲中，遊戲規則如下：在一個桶子裡有三種球，抽中紅球可得 x 點，抽中黃球可得 y 點，但抽中黑球則必須扣掉 z 點。每個人抽 10 次，每次抽一個球，最後依照得到的點數來兌換獎品。已知小華抽中 3 個紅球、3 個黃球、4 個黑球，共得 10 點；小明抽中 4 個紅球、3 個黃球、3 個黑球，共得 21 點；小玲抽中 2 個紅球、6 個黃球、2 個黑球，共得 26 點。若小蘭抽中 3 個紅球、5 個黃球、2 個黑球，則小蘭得到的點數為何？

(A) 28　(B) 30　(C) 32　(D) 39。　**【111(C)，答對率 45%】**

(　　) 6. 若矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}$，且 $AB=A+B$，則 $c=$？

(A) -1　(B) $\frac{-1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1。　【111(C)，答對率 44%】

(　　) 7. 若 a、b 為常數且兩方程組 $\begin{cases} x+2y=3 \\ ax+6y=9 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+by=10 \end{cases}$ 皆為相依方程組，則 $2a-b=$？

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8。　【110(B)，答對率 64%】

(　　) 8. 若 k 為實數，且二元一次聯立方程組 $\begin{cases} kx+3y+k+1=0 \\ x+4(k+1)y+8k^2+1=0 \end{cases}$ 有無限多組解，則 k 可為下列何值？

(A) $-\frac{3}{2}$　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{3}{2}$。　【110(C)，答對率 48%】

(　　) 9. 已知下列兩個聯立方程式有相同的解 (x,y,z)，試問 a 的值為何？

$\begin{cases} 3x-4y+z=4 \\ 5x+2y-2z=3 \end{cases}$、$\begin{cases} 2x+3y-2z=a \\ 4x+5y-3z=1 \end{cases}$

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2。　【108(C)，答對率 45%】

(　　) 10. 設 t 為實數，且三元一次聯立方程式 $\begin{cases} (t+1)x+(t-1)z=1 \\ (t+1)y+z=3 \\ (t+1)y+tz=5 \end{cases}$ 無解，則 t 可為下列何者？

(A) -2　(B) 0　(C) 1　(D) 2。　【106(C)，答對率 50%】

(　　) 11. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$。若 $A^4=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d$ 之值為下列哪一個選項？

(A) 158　(B) 162　(C) 166　(D) 170　(E) 174。　【110 學測】

(　　) 12. 令 $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=I+A+A^{-1}$，試選出代表 BA 的選項。

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$。　【109 學測】

(　　) 13. 矩陣 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^5$ 與下列哪一個矩陣相等？

(A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$。【109 數乙】

(　　　) 14. 若向量 $\overrightarrow{A}=(a_1,a_2)$，向量 $\overrightarrow{B}=(b_1,b_2)$，且內積 $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=1$，則矩陣乘積 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 等於下列哪一個選項？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。　【108 數乙】

15. 設 x、y 為實數，且滿足 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$，則 $x+3y=$ ______。　【108 學測】

16. 設 a,b,c,d,e,x,y,z 皆為實數，考慮矩陣相乘：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -4 & 6 & e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & x & 7 \\ 0 & y & 7 \\ -11 & z & 23 \end{bmatrix}$，則 $y=$ ______。　【107 學測】

17. 設 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 為等差數列且 k 為實數。若方程組 $\begin{cases} a_1x-a_2y+2a_3z=k+1 \\ a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5 \\ a_7x-a_8y+2a_9z=k+9 \end{cases}$ 有解，則 $k=$ ______。　【106 學測】

18. 線性方程組 $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=6 \\ x-y=6 \\ x-2y-z=8 \end{cases}$ 經高斯消去法計算後，其增廣矩陣可化簡為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，則 $a=$ ______，$b=$ ______，$c=$ ______，$d=$ ______。　【105 學測】

19. 設 x、c 為實數，方陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$。已知 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍（其中 $c\neq 0$），則數對 $(x,c)=$ ______。　【105 數乙】