



10-1

空間概念

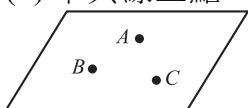


重點

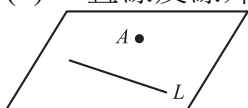
認識空間中的直線與平面

1. 決定一個平面有 4 種條件：

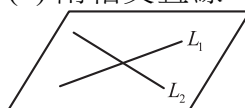
(1) 不共線三點



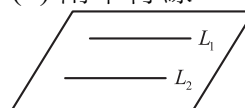
(2) 一直線及線外一點



(3) 兩相交直線



(4) 兩平行線

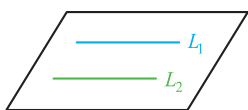


2. 直線與直線的關係：

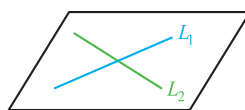
(1) 重合



(2) 平行

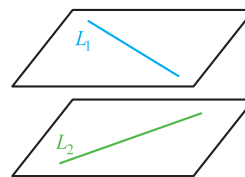


(3) 交於一點



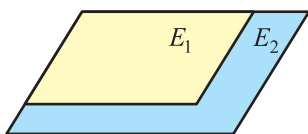
(4) 歪斜

(不相交也不平行)

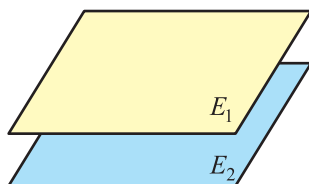


3. 平面與平面的關係：

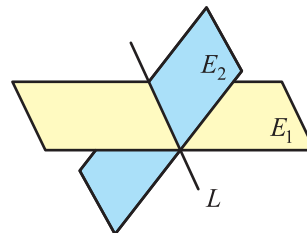
(1) 重合



(2) 平行

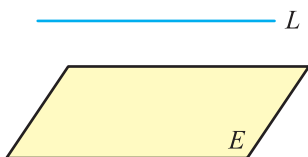


(3) 交於一直線

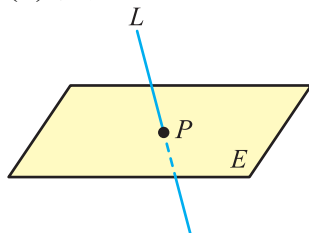


4. 直線與平面的關係：

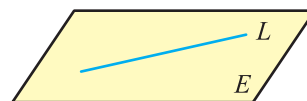
(1) 不相交（平行）



(2) 恰交於一點



(3) 直線落在平面上





01

老師講解

空間中的點、直線與平面

學生演練

下列敘述何者正確？

- (A) 空間中不相交的兩直線必平行
- (B) 垂直於同一平面的兩相異直線必互相平行
- (C) 過已知直線外一點，恰有一平面與此直線平行
- (D) 過已知平面外一點，恰有一平面與此平面垂直
- (E) 過已知平面外一點，恰有一直線與此平面平行。

下列敘述何者錯誤？

- (A) 過已知平面外一點，恰有一平面與此平面平行
- (B) 過已知直線外一點，恰有一平面與此直線垂直
- (C) 若兩相異直線決定唯一的平面，則此兩直線交於一點
- (D) 垂直同一直線之兩相異平面必平行
- (E) 空間中，兩相異直線若不平行，必有交點。

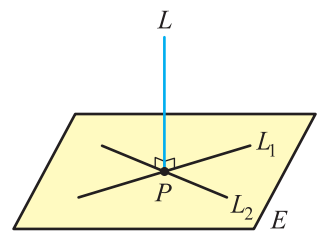


重點

空間中直線與平面的垂直

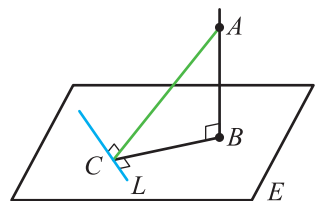
1. 直線與平面垂直的定義：

若直線 L 與平面 E 交於一點 P ，且平面 E 上通過 P 點的每一條直線（至少兩條）都和直線 L 垂直，則稱直線 L 和平面 E 垂直，以 $L \perp E$ 表示。



2. 三垂線定理：

若直線 AB 垂直平面 E 於 B 點（第一個垂直），直線 BC 垂直平面 E 上的直線 L 於 C 點（第二個垂直），則直線 AC 垂直於直線 L （第三個垂直）。



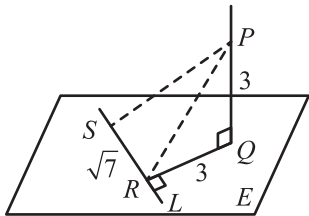
難易度

02 老師講解

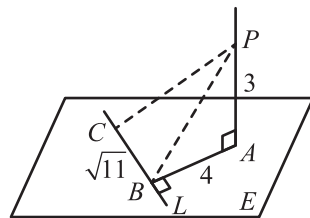
三垂線定理

學生演練

空間中，直線 PQ 垂直平面 E 於 Q 點， $\overline{PQ}=3$ ，
直線 QR 垂直平面 E 上直線 L 交於 R 點，
 $\overline{QR}=3$ ， S 是 L 上一點，
且 $\overline{SR}=\sqrt{7}$ ，
試求 $\overline{PS}$ 之值為何？

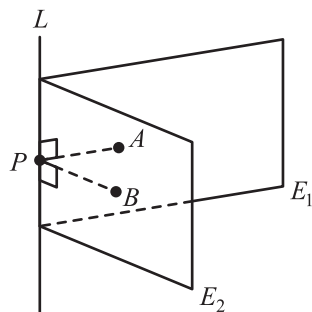


如圖，點 P 在平面 E 上的投影點為 A ， L 為 E 上的直線，且 C 為 L 上一點，若直線 AB 垂直 L 於 B 點，已知 $\overline{PA}=3$ ，
 $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=\sqrt{11}$ ，
則 $\overline{PC}$ 之值為何？



重點 二面角

如圖所示，當兩平面 E_1 、 E_2 交於直線 L ，在 L 上取一點 P ，分別在 E_1 與 E_2 上作射線 PA 與射線 PB ，且 $\overline{PA} \perp L$ ， $\overline{PB} \perp L$ ，則 $\angle APB$ 即為平面 E_1 、 E_2 的二面角。



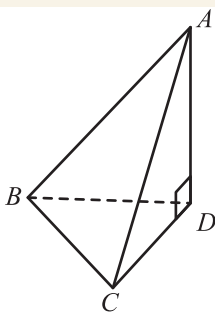
難易度

03 老師講解

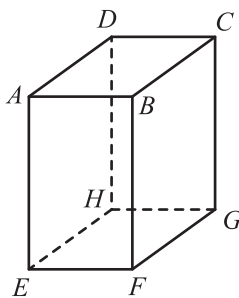
空間中的二面角

學生演練

如圖， $ABCD$ 為四面體，已知 $\overline{AD}$ 垂直平面 BCD ， $\overline{AD}=5$ 、
 $\overline{DB}=\overline{DC}=3$ ， $\overline{BC}=4$ ，若平面 ABD 與平面 ACD 的二面角為 θ ，則 $\cos \theta$ 之值為何？



如圖是一個長方體，已知 $\overline{EF}=3$ ， $\overline{EH}=4$ ， $\overline{EA}=5$ ，
若平面 $ABFE$ 與平面 $ACGE$ 的二面角為 θ ，則 $\cos \theta$ 之值為何？





自我挑戰



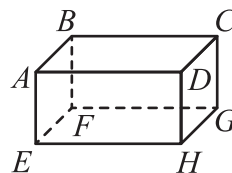
1. 依下列敘述填入○或×：

- (1) 空間中，不共線的三點決定一平面：_____
- (2) 空間中，不相交的二直線必平行：_____
- (3) 空間中，過直線外一點恰有一直線與已知直線垂直：_____
- (4) 空間中，平行於同一平面的兩相異直線必平行：_____
- (5) 空間中，若一平面與兩平行平面相交，則其交線必互相平行：_____
- (6) 空間中，過平面外一點，恰有一直線平行於此平面：_____。

2. 右圖是一個長方體，將空間中兩相異直線的三種關係

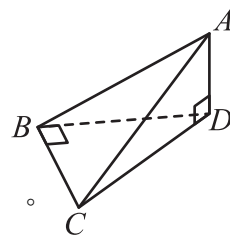
(A)交於一點 (B)平行 (C)歪斜，填入下列各小題：

- (1) 直線 AE 與直線 AD ：_____
- (2) 直線 AE 與直線 CG ：_____
- (3) 直線 AE 與直線 FG ：_____
- (4) 直線 AE 與直線 GH ：_____。



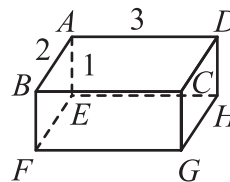
3. 如圖， $ABCD$ 為四面體，已知 $\overline{AD}$ 垂直平面 BCD ， $\overline{BC} \perp \overline{BD}$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{AD} = \sqrt{19}$ ，試求：

- (1) $\overline{AC} =$ _____
- (2) 若平面 ADB 與平面 ADC 所形成的二面角大小為 θ ，則 $\sin \theta =$ _____。

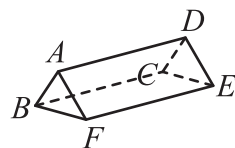


4. 右圖為長方體 $ABCD-EFGH$ ，其中 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{AE} = 1$ 。

設平面 $AEHD$ 與平面 $AEGC$ 所成二面角的度量為 θ ，則 $\tan \theta =$ _____。



5. 如右圖是一個三角柱形的禮盒，三個側面都是長方形，其中 $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{FE} = 10$ 公分， $\overline{AB} = \overline{AF} = 4$ 公分， $\overline{BF} = 6$ 公分，若平面 $ABCD$ 與平面 $BCEF$ 所形成的二面角大小為 θ ，則 $\cos \theta =$ _____。



10-2

空間坐標系



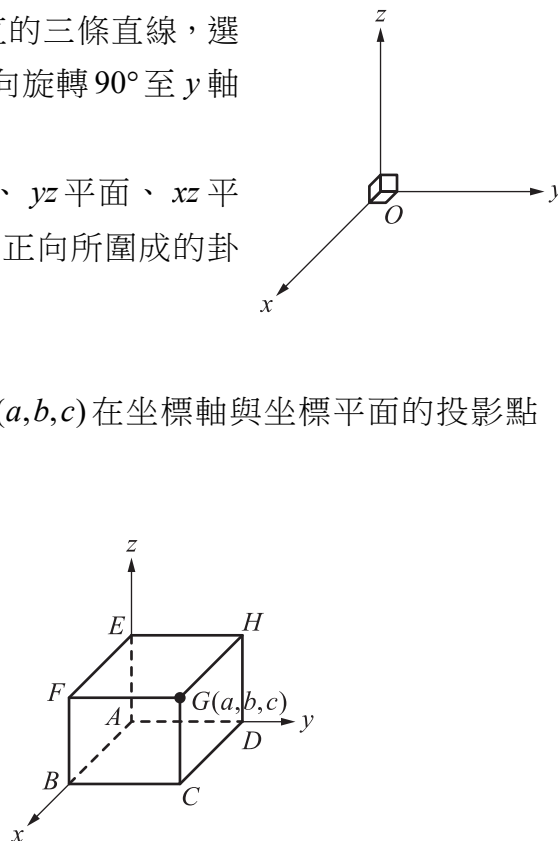
重點

空間坐標系

1. 在空間中選取一點 O 當作原點，過原點作兩兩垂直的三條直線，選取其中兩條當作 x 軸與 y 軸，將右手四指沿 x 軸正向旋轉 90° 至 y 軸正向，此時大拇指所指的方向即為 z 軸的正向。
2. 由 x 軸與 y 軸張成的平面稱為 xy 平面，則 xy 平面、 yz 平面、 xz 平面把空間分為 8 個卦限，而其中由 x 、 y 、 z 三軸正向所圍成的卦限稱作「第一卦限」。
3. 投影點坐標：

如圖，長方體 $ABCD-EFGH$ ， A 為原點，則點 $G(a, b, c)$ 在坐標軸與坐標平面的投影點如下：

投影位置	投影點坐標
x 軸	$B(a, 0, 0)$
y 軸	$D(0, b, 0)$
z 軸	$E(0, 0, c)$
xy 平面	$C(a, b, 0)$
yz 平面	$H(0, b, c)$
xz 平面	$F(a, 0, c)$



4. 空間中，已知 $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$ ，則：

(1) 兩點距離公式： $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ 。

(2) 中點坐標 $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$ 。

難易度 🐾



01

老師講解

投影點與距離

學生演練

空間中一點 $P(-2, 1, 3)$ ，試求：

- (1) P 在 xy 平面的投影點坐標
- (2) P 到 xy 平面的距離
- (3) P 在 x 軸的投影點坐標
- (4) P 到 x 軸的距離。

空間中一點 $A(3, -2, 4)$ ，試求：

- (1) A 在 xz 平面的投影點坐標
- (2) A 到 xz 平面的距離
- (3) A 在 y 軸的投影點坐標
- (4) A 到 y 軸的距離。

難易度 🐾



02

老師講解

任意點到坐標軸的距離

學生演練

設 $P(a, b, c)$ 在第一卦限，若 P 到 x 軸、 y 軸、 z 軸的距離分別為 $\sqrt{34}$ 、 $\sqrt{41}$ 、 5 ，試求 P 坐標？

設 $P(x, y, z)$ 在第一卦限，若 P 到 x 軸、 y 軸和 z 軸的距離分別為 $\sqrt{13}$ 、 $\sqrt{53}$ 和 $\sqrt{58}$ ，試求 P 坐標？

難易度

03 老師講解

兩點距離公式

學生演練



已知 $P(2,1,3)$ 、 $Q(1,2,-1)$ 兩點，且 R 點在 z 軸上，若 $\overline{PR} = \overline{QR}$ ，試求 R 點坐標。

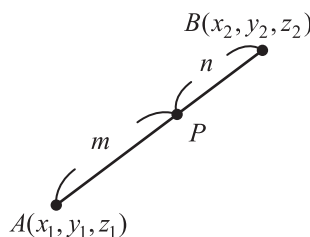
已知 $A(1,-1,2)$ 、 $B(2,0,4)$ 兩點，且 P 點在 x 軸上，若 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，試求 P 點坐標。



重點 內分點公式

空間中相異兩點 $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$ ，若 P 點為 $\overline{AB}$ 之內分點，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ ，則 P 坐標為 $(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n})$ 。

記法： $P = \frac{nA + mB}{m+n}$ （分母為比例相加，分子為交叉乘再相加）



難易度

04 老師講解

分點公式

學生演練



空間中有兩點 $A(2,1,-9)$ 、 $B(5,-2,0)$ ，若：

(1) 點 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2:1$ ，試求 P 點坐標。

(2) 點 Q 在 $\overline{AB}$ 之延長線上，且 $4\overline{BQ} = 3\overline{AQ}$ ，試求 Q 點坐標。

空間中有兩點 $A(2,0,-3)$ 、 $B(-2,4,1)$ ，若：

(1) 點 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1:3$ ，試求 P 點坐標。

(2) 點 Q 在 $\overline{AB}$ 之延長線上，且 $\overline{AQ} = 2\overline{BQ}$ ，試求 Q 點坐標。



重點

空間向量的坐標表示法

1. 如圖（一），設空間中兩點 $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$ ，則：

(1) $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 。

(2) $\overrightarrow{AB}$ 的大小為 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ 。

2. 如圖（二），將向量 $\vec{u}$ 平移，使始點落在原點 O 上，終點落在 $P(a, b, c)$ 上，則 $\vec{u} = \overrightarrow{OP} = (a, b, c)$ ：

(1) $\vec{u}$ 的 x 分量為 a ， y 分量為 b ， z 分量為 c 。

(2) $\vec{u}$ 的大小 $|\vec{u}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 。

3. 零向量 $\vec{0} = (0, 0, 0)$ ：

(1) 方向是任意的，故方向不定。

(2) $\vec{0}$ 的大小 $|\vec{0}| = 0$ 。

4. 相等向量：

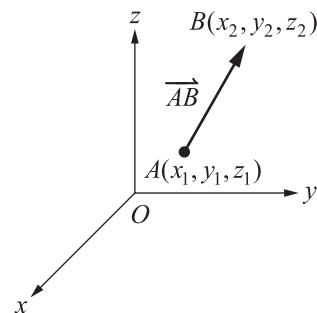
$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ，

若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，則 $x_1 = x_2$ 、 $y_1 = y_2$ 、 $z_1 = z_2$ 。

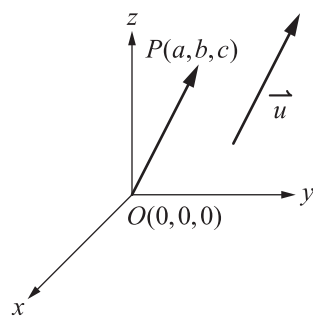
5. 相反向量：

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ，

若 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，則 $x_1 = -x_2$ 、 $y_1 = -y_2$ 、 $z_1 = -z_2$ 。



圖（一）



圖（二）

難易度

05 老師講解

空間向量

學生演練



空間中，已知 $A(-2, 1, 5)$ 、 $B(1, 4, 2)$ ，試求 $\overrightarrow{AB}$ 及 $|\overrightarrow{AB}|$ 。

已知點 $P(1, -2, 0)$ ，且 $\overrightarrow{PQ} = (3, 4, 1)$ ，試求 Q 點坐標及 $|\overrightarrow{PQ}|$ 。

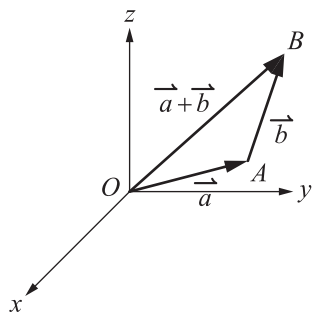


重點

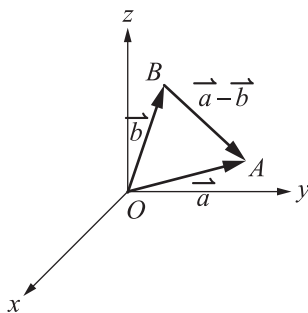
空間向量的加法、減法與實數積

設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 為空間中的兩向量， r 為實數，則：

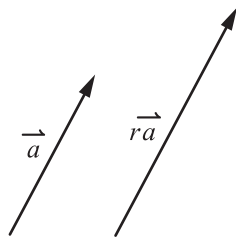
1. 加法： $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ ，如圖（一）。
2. 減法： $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ ，如圖（二）。
3. 實數積： $r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3) = (ra_1, ra_2, ra_3)$
 - (1) $r > 0$ ： $r\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 同方向，且長度為 $\vec{a}$ 的 r 倍，如圖（三）。
 - (2) $r = 0$ ： $r\vec{a} = \vec{0}$ 。
 - (3) $r < 0$ ： $r\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 反方向，且長度為 $\vec{a}$ 的 $|r|$ 倍，如圖（四）。



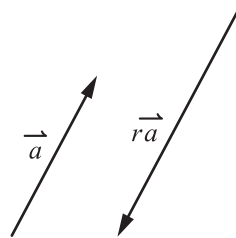
圖（一）



圖（二）



圖（三）



圖（四）

難易度

06

老師講解

加、減法與實數積

學生演練



設 $\vec{a} = (1, 2, -3)$ 、 $\vec{b} = (-3, 0, 4)$ ，試求：

- (1) $2\vec{a} + \vec{b}$ (2) $|2\vec{a} + \vec{b}|$ 。

設 $\vec{a} = (9, 4, -5)$ 、 $\vec{b} = (6, 2, -2)$ ，試求：

- (1) $2\vec{a} - 3\vec{b}$ (2) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$ 。



07 老師講解

向量的實數積

學生演練

若 $\vec{a} = (4, 2, -4)$ ，已知 $\vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 同方向，
且 $|\vec{b}| = 12$ ，試求 $\vec{b}$ 。

若 $\vec{a} = (-1, 2, 2)$ ，已知 $\vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 反方向，
且 $|\vec{b}| = 9$ ，試求 $\vec{b}$ 。



重點 空間向量的內積

- 若空間中兩向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ 的夾角為 θ ，則 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的內積為 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ 。
- 空間向量內積的運算性質：
若空間中有任意三個向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ， r 為任意實數，則：
 - $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ 。
 - $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ 。
 - $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ 。
 - $r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b})$ 。
- 常用內積運算公式：
 - $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ 。
 - $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ 。
 - $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ 。

難易度 🐾🐾

08 老師講解

內積求夾角

學生演練



已知空間中有 $A(1, -1, 0)$ 、 $B(3, 0, 2)$ 、 $C(0, 3, -1)$ ，試求：

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 之值 (2) $\angle BAC$ 的大小。

已知 $\vec{a} = (0, -1, -1)$ 、 $\vec{b} = (1, -1, 0)$ ，試求：

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 之值 (2) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角。

難易度 🐾

09 老師講解

內積的運算性質

學生演練



空間中兩向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，若 $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ ，且 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角為 150° ，試求 $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ 的長度。

空間中 $\vec{a}$ 為單位向量， $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ，且 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角為 45° ，試求 $|2\vec{a} - \vec{b}|$ 。

**重點****向量的平行與垂直**

空間中的兩非零向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，則：

1. 當 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 時，必存在一實數 r ，使得 $\vec{a} = r\vec{b}$ ，即 $(a_1, a_2, a_3) = r(b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = r$ （成比例）此時 b_1 、 b_2 、 b_3 均不為 0。
2. 當 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 時， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ （ $\because \cos 90^\circ = 0$ ）。

難易度

10**老師講解****向量的平行與垂直****學生演練**

已知 $\vec{a} = (-4, 2, 5)$ 、 $\vec{b} = (2, -1, t)$ ，試求：

- (1) 當 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 時，則 t 之值為何？
- (2) 當 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 時，則 t 之值為何？

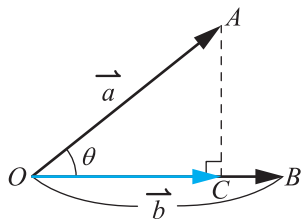
空間中三點 $A(1, 0, 1)$ 、 $B(2, 3, -4)$ 、 $C(-1, t, 3)$ ，若 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ，則 t 之值為何？



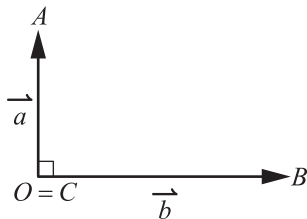
重點

向量的正射影與正射影長

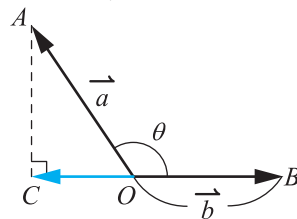
設 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)，如圖，則 $\overrightarrow{OC}$ 稱為 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影。



θ 為銳角， $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 同向



θ 為直角， $\overrightarrow{OC} = \vec{0}$



θ 為鈍角， $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 反向

- $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$ 。
- $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長為 $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ 。

難易度



11

老師講解

求正射影與正射影長

學生演練



已知 $A(1, 2, 0)$ 、 $B(-2, 3, 1)$ 、 $C(2, 3, -1)$ ，試求 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影與正射影長。

空間中有兩向量 $\vec{a} = (1, -2, 2)$ 、 $\vec{b} = (2, -1, 1)$ ，試求：

- $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影
- $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長。



自我挑戰



- 空間中，已知點 $P(1, -2, 3)$ ，試求：
 - 點 P 在 y 軸上的投影點坐標為 _____。
 - 點 P 到 y 軸的距離 = _____。
 - 點 P 在 xz 平面上的投影點坐標為 _____。
 - 點 P 到 xz 平面的距離 = _____。
- 空間中，已知 $A(14, -11, 27)$ 、 $B(2, 1, -9)$ ，試回答下列問題：
 - 點 A 和點 B 的距離 = _____。
 - 若 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP} = 3\overline{BP}$ ，則 P 點坐標 = _____。
 - $\overline{AB}$ 的中點坐標為 _____。
- 設兩向量 $\vec{a} = (1, 2, -1)$ 、 $\vec{b} = (-3, t, 3)$ ，則
 - 當 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 時， $t =$ _____。
 - 當 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 時， $t =$ _____。
- 設 $A(0, 3, 2)$ 、 $B(1, 1, 3)$ 、 $C(-6, 6, 5)$ ，則
 - $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 _____。
 - $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影長為 _____。
 - 點 B 在直線 AC 上的投影點坐標為 _____。
 - $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角為 _____。
- 空間中有兩向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，已知 $\vec{a}$ 為單位向量， $\vec{b} = (2, 0, -2)$ ，試問
 - 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 135° ，試求 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____。
 - 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 方向相反，試求 $\vec{a} =$ _____。

10-3

空間向量的外積



重點 外積的定義

設空間中 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 兩向量，則：

1. $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ 為「純量」。

↓

[dot]

2. $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積 $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$

↓

[cross] $= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ 為「向量」。

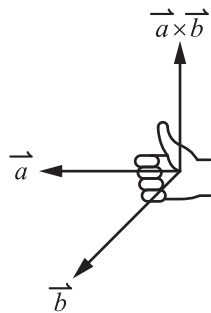
記法：可將 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 重複寫兩次，再將最左邊的 a_1 及最右邊的 b_3 刪除，

如圖所示。

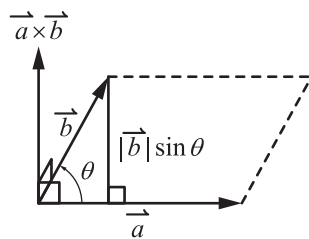
$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

3. 外積的方向，符合「右手法則」，如圖（一）所示，豎起的大姆指即為 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向。
4. 外積的大小： $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ ， θ 為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角，其幾何意義為由 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 所張之平行四邊形面積。如圖（二）。



圖（一）



圖（二）

5. 外積的性質：

- (1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ （外積無交換律）。
- (2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ ， $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ ， $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ 。
- (3) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，則 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ 。
- (4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ 。
- (5) $(r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b}) = r(\vec{a} \times \vec{b})$ 。

難易度 🐾🐾



01

老師講解

向量外積的求法及求面積

學生演練

已知 $A(7, -8, 9)$ 、 $B(9, -5, 6)$ 、 $C(4, -9, 7)$ 為空間中三點，試求：

(1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 所張出平行四邊形面積

(3) $\triangle ABC$ 面積。

空間中有兩點 $A(1, 3, -1)$ 、 $B(2, 1, 2)$ ，而 O 為原點，試求 $\triangle OAB$ 的面積。

難易度 🐾🐾🐾



02

老師講解

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$$

學生演練

已知空間中有三點 $A(1, 0, 1)$ 、 $B(0, 1, 2)$ 、 $C(2, -1, 3)$ ，試求一長度為 $\sqrt{2}$ 且同時垂直 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的向量。

已知 $\vec{a} = (1, 0, -2)$ 、 $\vec{b} = (1, 1, 0)$ ，試求一單位向量，使其同時垂直 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 。



重點

三階行列式

1. 三階行列式的定義：

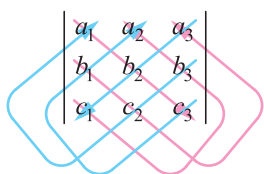
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{第一列} \\ \rightarrow \text{第二列} \\ \rightarrow \text{第三列} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{第} & \text{第} & \text{第} \\ \text{一} & \text{二} & \text{三} \\ \text{行} & \text{行} & \text{行} \end{matrix}$$

2. 三階行列式的值：

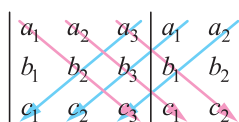
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

記法(1)



紅色三個數乘積取「+」號，
藍色三個數乘積取「-」號，
其和即三階行列式之值。

記法(2)



難易度

03

老師講解

三階行列式的展開

學生演練



設 $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ，試求 x 之值。

設 $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2x & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ，試求 x 之值。



重點

三階行列式的性質

1. 行列互換，其值不變：
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}。$$

2. 任兩列（行）互換，其值變號：
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}。$$

3. 任一行（列）提出公因式，其值不變：
$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}。$$

4. 任兩列（行）成比例，其值為 0：
$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0。$$

5. 將任一行（列）乘以 k 倍加到另一行（列），其值不變：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \times k \end{matrix}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + ka_1 & b_2 + ka_2 & b_3 + ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + ka_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 + kb_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 + kc_1 \end{vmatrix}$$

$\begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \times k \end{matrix}$

6. 將某一行（列）的各個元素分成兩個元素的和，則此行列式可分解成兩個行列式的和。

$$\begin{vmatrix} a_1 + p & a_2 & a_3 \\ b_1 + q & b_2 & b_3 \\ c_1 + r & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & a_2 & a_3 \\ q & b_2 & b_3 \\ r & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

7. 三階行列式可依任一行（或列）降階成二階行列式展開。展開後，每一個元素的正、負號可依下述規定決定。

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = +a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (\text{第一列展開})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{第二行展開})$$

難易度 🐾



04 老師講解

行列式的性質

學生演練

試求下列各行列式之值：

$$(1) \begin{vmatrix} 5 & -10 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 11 & 15 \\ 3 & 14 & 20 \\ 5 & 23 & 31 \end{vmatrix}。$$

試求下列各行列式之值：

$$(1) \begin{vmatrix} 7 & -7 & 14 \\ -15 & 0 & 20 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 98 & 99 & 100 \\ 47 & 48 & 49 \\ 25 & 23 & 21 \end{vmatrix}。$$



05 老師講解

行列式的性質

學生演練

設 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 4$ ，試求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ a+3 & b & 4 \end{vmatrix}$ 之值為何？

試求 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ 之值為何？



重點

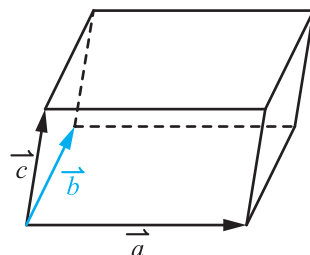
三階行列式的應用

1. 若 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 為平面上不共線三點，則：

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|。$$

2. 若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 為空間中三個不共平面的向量，則由 $\vec{a}$ 、

$$\vec{b}、\vec{c} \text{ 所張之平行六面體體積為 } V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|。$$



難易度 🐾🐾

06

老師講解

三角形面積

學生演練



已知 $A(2,3)$ 、 $B(-1,2)$ 、 $C(4,-1)$ 為平面上三點，試求 $\triangle ABC$ 面積。

設 $A(2,3)$ 、 $B(-2,k)$ 、 $C(3,0)$ 為平面上三點，且 $\triangle ABC$ 面積為 8，試求 k 之值？

難易度 🐾🐾

07

老師講解

平行六面體體積

學生演練



試求由 $\vec{a} = (4,2,0)$ 、 $\vec{b} = (1,3,-2)$ 、 $\vec{c} = (2,-5,4)$ 三個向量所張出之平行六面體體積。

由三向量 $\vec{a} = (k,1,2k)$ 、 $\vec{b} = (-1,-2,-3)$ 、 $\vec{c} = (0,1,2)$ 所張出的平行六面體體積為 7，且 $k > 0$ ，試求 k 之值。

08 老師講解

四點共平面

學生演練



空間中，當 $A(1,2,0)$ 、 $B(1,0,1)$ 、 $C(k,k,0)$ 、 $D(-2,0,-1)$ 四個點共平面時，試求 k 之值。

空間中，當 $A(3,0,0)$ 、 $B(1,-4,0)$ 、 $C(0,k,1)$ 、 $D(7,2,-2)$ 四個點共平面時，試求 k 之值。



自我挑戰



1. 設 $A(0,2,0)$ 、 $B(-4,5,0)$ 、 $C(4,-1,2)$ 為坐標空間中三點，

(1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} =$ _____

(2) $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 所張之平行四邊形面積 = _____

(3) $\triangle ABC$ 面積 = _____。

2. 試求下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -4 & 8 & -16 \\ 10 & 20 & -5 \end{vmatrix} =$ _____ (2) $\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 23 & 24 & 25 \\ 101 & 102 & 103 \end{vmatrix} =$ _____。

3. 已知 $\begin{vmatrix} a & 96 & 95 \\ 1 & 93 & 94 \\ 2 & 92 & 91 \end{vmatrix} = -3$ ，試求三階行列式 $\begin{vmatrix} a+1 & 96 & 95 \\ 2 & 93 & 94 \\ 3 & 92 & 91 \end{vmatrix} =$ _____。

4. 設 $A(2,0)$ 、 $B(-2,k)$ 、 $C(0,3)$ 為平面上三點，

(1) 若 $\triangle ABC$ 面積為 6，則 $k =$ _____

(2) 若 A 、 B 、 C 三點在同一直線上，則 $k =$ _____。

5. 設 $A(0,3,-1)$ 、 $B(2,1,-2)$ 、 $C(-3,k,1)$ 、 $D(-1,-1,0)$ 為坐標空間中四點，

(1) 若由 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 三向量所張出的平行六面體體積為 6，則 $k =$ _____

(2) 若 A 、 B 、 C 、 D 四點共平面，則 $k =$ _____。

10-4

空間中的平面

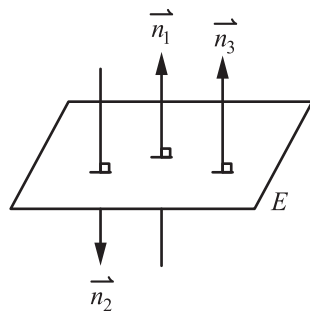


重點 平面方程式

1. 平面的法向量：

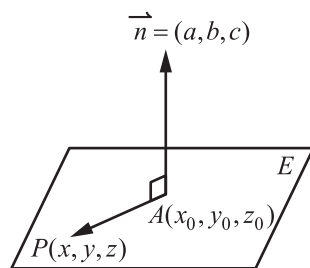
若空間中一非零向量 $\vec{n}$ 所在的直線與平面 E 垂直，則稱 $\vec{n}$ 為平面 E 的一個法向量，其性質為：

- (1) 一個平面的法向量並不唯一，同一平面的法向量均互相平行。
- (2) 一個平面的法向量與平面上的向量均垂直。



2. 平面的點法式：

若 $\vec{n} = (a, b, c)$ 為平面的法向量，且 $A(x_0, y_0, z_0)$ 為平面 E 上的一點，則平面方程式為 $E: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ 。



3. 平面的一般式：

將點法式展開整理成 $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$ ，令 $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ ，故已知法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$ 時，可設平面的一般式為 $ax + by + cz = d$ 。

難易度

01 老師講解

點法式和一般式

學生演練



試求過 $A(1, -2, 3)$ 且法向量 $\vec{n} = (1, -1, 1)$ 的平面方程式。

試求過 $A(1, -3, 5)$ 且法向量 $\vec{n} = (2, 0, 3)$ 的平面方程式。

**重點**

4. 已知平面 $E_1 \parallel E: ax+by+cz=d$ ，設平面 E_1 的一般式為 $ax+by+cz=d_1$ 。
 ($\because$ 平面 $E_1 \parallel E$ ，則法向量 $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}=(a,b,c)$ ，可令 $\vec{n}_1=(a,b,c)$ 。)

難易度

02

老師講解

平行平面的法向量相同

學生演練

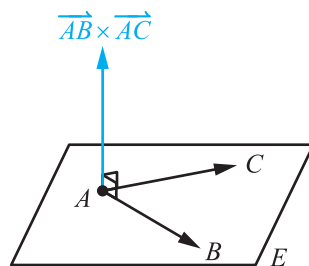


試求過點 $A(1,2,-4)$ 且和平面
 $E': x-3y-z-5=0$ 平行的平面 E 方程式。

試求過點 $A(2,1,1)$ 且和平面
 $E': 3x-y+7z-10=0$ 平行的平面 E 方程式。

**重點**

5. 不共線的相異三點求平面方程式：如圖，
 (1) $\because (\vec{AB} \times \vec{AC}) \perp \vec{AB}$ ， $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \perp \vec{AC}$ ，即 $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \perp E$
 $\therefore$ 外積 $(\vec{AB} \times \vec{AC})$ 可視為平面 E 的法向量。
 (2) 點法式或一般式可求平面方程式。



難易度

03

老師講解

不共線的相異三點

學生演練



設平面 E 通過 $A(1,2,1)$ 、 $B(3,5,6)$ 、 $C(2,6,4)$ ，
 試求平面 E 方程式。

設平面 E 通過 $A(1,3,-1)$ 、 $B(2,1,-1)$ 、
 $C(-3,0,1)$ ，試求平面 E 方程式。



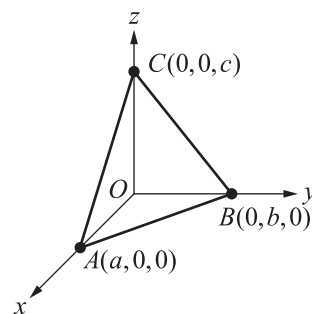
重點

6. 平面的截距式：

若一平面通過 $A(a, 0, 0)$ 、 $B(0, b, 0)$ 、 $C(0, 0, c)$ ，

則平面的截距式為 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ($abc \neq 0$)，

其中 a 、 b 、 c 分別為 x 軸、 y 軸、 z 軸的截距。



難易度

04

老師講解

截距式

學生演練



若平面 E 分別交 x 、 y 、 z 軸於 $A(3, 0, 0)$ 、 $B(0, -2, 0)$ 、 $C(0, 0, 6)$ ，試以下列方式表示平面 E 方程式：

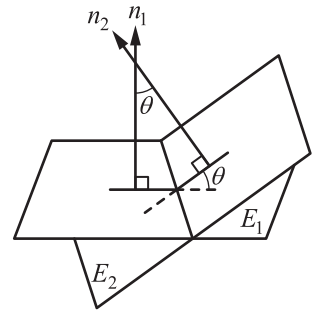
(1) 截距式 (2) 一般式。

設平面 E 通過 $A(5, 0, 0)$ 、 $B(0, -2, 0)$ 、 $C(0, 0, \frac{1}{2})$ 三點，試以一般式表示平面 E 的方程式。



重點 兩平面的夾角

1. 若 $\vec{n}_1$ 、 $\vec{n}_2$ 分別為平面 E_1 、 E_2 的法向量， $\vec{n}_1$ 、 $\vec{n}_2$ 的夾角為 θ ，
則平面 E_1 、 E_2 的夾角為 θ 與 $180^\circ - \theta$ ，其中 $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$ 。



難易度 🐾🐾

05

老師講解

空間中兩平面的夾角

學生演練



試求兩平面 $E_1: x - 2y + 3z - 10 = 0$ 和
 $E_2: 2x + 3y - z - 5 = 0$ 的夾角。

試求兩平面 $E_1: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$ 和
 $E_2: x + 2y + 4z - 7 = 0$ 的夾角。

**重點****2. 兩平面的平行與垂直：**

設兩平面 $E_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ 、 $E_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ，其法向量分別為 $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ 、 $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ，則：

(1) 互相平行： $E_1 \parallel E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ ($a_2b_2c_2 \neq 0$)。

(2) 互相垂直： $E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ 。

難易度

06

老師講解

平行與垂直

學生演練



設空間中三平面 $E_1: 2x + by + 3z + 1 = 0$ 、
 $E_2: x + 8y + 2z - 16 = 0$ 、 $E_3: ax - y + 6z = 0$ ：

(1) 若 $E_1 \perp E_2$ ，試求 b 之值

(2) 若 $E_1 \parallel E_3$ ，試求 a 和 b 之值。

設空間中三平面 $E_1: ax - y + 3z + 1 = 0$ 、
 $E_2: x + by + 2z - 7 = 0$ 、 $E_3: 2x + cy - 3z + 5 = 0$ ，
 若 $E_1 \perp E_2$ 且 $E_1 \parallel E_3$ ，求 $a + b + c$ 之值。

**重點** 點到平面的距離

1. 點到平面的距離公式：

空間中，點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $E: ax + by + cz = d$ 的距離為 $d(P, E) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。

2. 兩平行平面的距離公式：

兩平行平面 $E_1: ax + by + cz = d_1$ 、 $E_2: ax + by + cz = d_2$ 的距離為 $d(E_1, E_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。

難易度 🐾

07

老師講解

點到平面的距離

學生演練



試求點 $P(1, -3, 7)$ 到平面 $E: 2x - 2y + z - 3 = 0$ 的距離。

若點 $A(1, k, -3)$ 到平面 $E: 3x + y + 2z + 3 = 0$ 的距離為 $\frac{5}{\sqrt{14}}$ ，試求 k 之值。

難易度 🐾

08

老師講解

兩平行平面的距離

學生演練



試求兩平行平面 $E_1: x + 2y - 2z + 6 = 0$ 、 $E_2: x + 2y - 2z - 3 = 0$ 的距離。

設平面 E 和平面 $E_1: x + 2y - 3z + 5 = 0$ 平行且距離為 $\sqrt{14}$ ，試求 E 之方程式。



自我挑戰



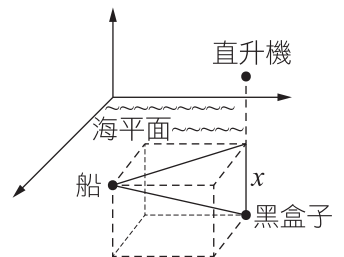
- 試求滿足下列各小題條件的平面方程式：（答案請以一般式表示）
 - 通過點 $A(1,0,-2)$ 且以 $\vec{n} = (2,-3,1)$ 為法向量的平面方程式為 _____
 - 設點 $A(1,0,2)$ 在平面 E 上之正射影為點 $B(3,-1,3)$ ，則平面 E 的方程式為 _____
 - 若 $A(-1,0,4)$ 、 $B(1,2,0)$ ，則 $\overline{AB}$ 的垂直平分面方程式為 _____
 - 通過 $A(3,0,0)$ 、 $B(0,-2,0)$ 、 $C(0,0,-1)$ 三點的平面方程式為 _____
 - 通過 $A(3,0,-1)$ 且與平面 $2x+3y-5z=3$ 平行的平面方程式為 _____。
- 兩平面 $E_1: x - \sqrt{6}y - z + 3 = 0$ 與 $E_2: x - 2y + z + \sqrt{2} = 0$ 的夾角為 _____ 度或 _____ 度。
- 空間中有四點 $P(3,1,-3)$ 、 $A(2,-1,2)$ 、 $B(-1,2,1)$ 、 $C(1,2,3)$ ，其中平面 E 通過 A 、 B 、 C 三點，則
 - 平面 E 的方程式為 _____
 - 點 P 到平面 E 的距離為 _____。
- 設兩平面 $E_1: x - 2y - 2z + 3 = 0$ 與 $E_2: 3x + ky - 6z = 1$ ，
 - 當 $E_1 \parallel E_2$ 時，則 $k =$ _____。
 - 當 $E_1 \perp E_2$ 時，則 $k =$ _____。
- 若兩平行平面 $E_1: 2x - y - z = 2$ 與 $E_2: 4x - 2y - 2z = k$ 的距離為 $\frac{\sqrt{6}}{12}$ ，則 $k =$ _____。



歷屆試題



- () 1. 空間中三點的坐標分別為 $A(0,6,-1)$ 、 $B(3,3,-1)$ 、 $C(4,1,1)$ ，則 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影為何？
 (A) $(4,-4,2)$ (B) $(4,-2,4)$ (C) $(2,-4,4)$ (D) $(2,4,4)$ 。 【113(C)，答對率 52%】
- () 2. 空間中兩點 $A(1,3,4)$ 與 $B(3,2,4)$ ，若 xy 平面上 P 點到 A 與 B 兩點的距離和為最小，則 P 點的坐標為何？
 (A) $(2, \frac{5}{2}, 0)$ (B) $(2, 2, 0)$ (C) $(2, \frac{3}{2}, 0)$ (D) $(3, 1, 0)$ 。 【113(C)，答對率 39%】
- () 3. 若通過 $A(1,2,3)$ 、 $B(2,4,6)$ 、 $C(3,5,4)$ 三點之平面 E_1 ，與另一平面 $E_2: x+ky-2z=1$ 互相垂直，則 $k=?$
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 【112(C)，答對率 27%】
- () 4. 正四面體（四個面皆為正三角形） $ABCD$ 的四個頂點坐標為 $A(0,0,0)$ 、 $B(2,0,0)$ 、 $C(1,\sqrt{3},0)$ 、 $D(x,y,z)$ ，其中 $z>0$ ，則 $z=?$
 (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 。 【111(C)，答對率 36%】
- () 5. 今有一飛機失事落海，救難直升機於失事地點附近偵測到黑盒子（飛行記錄器的俗稱），其所發出的訊號恰好位於直升機的正下方，但無法確定深度，直升機將位置訊息告知水上工作船，經船上人員推算，直升機位於工作船東方 140 公尺、北方 80 公尺的海平面上方 100 公尺處，並且偵測到該黑盒子與水上工作船的直線距離為 180 公尺，如圖所示。根據上述訊息，若黑盒子在海平面下深度為 x 公尺，則 $x=?$
 (A) 60 (B) 70 (C) 80 (D) 90。 【111(C)，答對率 50%】
- () 6. 若 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ，則 $a+b=?$
 (A) -9 (B) -1 (C) 3 (D) 5。 【110(B)，答對率 54%】
- () 7. 若 x 、 y 、 z 為相異實數，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix} = ?$
 (A) 0 (B) $(x-y)(y-z)(z-x)$ (C) $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$
 (D) $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$ 。 【110(C)，答對率 55%】



- () 8. 利用降階法將行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 依第二列展開，可得 $a \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ x & 1 \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & z \end{vmatrix}$ ，則 $a+b+c+x+y+z=?$
 (A) -4 (B) 0 (C) 5 (D) 6。 【109(B)，答對率 37%】
- () 9. 已知三階行列式 $\begin{vmatrix} a_1-2b_1-3c_1 & a_1-2c_1 & a_1 \\ a_2-2b_2-3c_2 & a_2-2c_2 & a_2 \\ a_3-2b_3-3c_3 & a_3-2c_3 & a_3 \end{vmatrix} = 8$ ，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ?$
 (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。 【109(C)，答對率 42%】
- () 10. 空間中有相異四點 A 、 B 、 C 、 D ，已知內積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 。試選出正確的選項。
 (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ (B) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (C) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 平行
 (D) A 、 B 、 C 、 D 四點在同一平面上。 【109 學測改】
- () 11. 若實數 x 滿足行列式 $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 4 & 6-2x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$ ，則 $\begin{vmatrix} 2 & 3-x & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1-x & -1 & -1 \end{vmatrix} = ?$
 (A) 4 (B) -4 (C) 8 (D) -8。 【108(B)，答對率 33%】
- () 12. 坐標空間中有一平面 P 過 $(0,0,0)$ 、 $(1,2,3)$ 及 $(-1,2,3)$ 三點。試選出正確的選項。
 (A) 向量 $(0,3,2)$ 與平面 P 垂直 (B) 平面 P 與 xy 平面垂直
 (C) 點 $(0,4,6)$ 在平面 P 上 (D) 點 $(1,1,1)$ 到平面 P 的距離是 1。 【108 學測改】
- () 13. 設 b_1 、 b_2 、 b_3 、 c_1 、 c_2 及 c_3 均為實數，若二階行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 13$ ， $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 7$ ，
 $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$ ，則三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ?$
 (A) 5 (B) 13 (C) 25 (D) 33。 【107(C)，答對率 37%】
- () 14. 若兩個三階行列式的和 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ 之值為 20，則 $a = ?$
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3。 【106(B)，答對率 58%】
- () 15. 求三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 10 & 121 \end{vmatrix} = 0$ 所有解的和為何？
 (A) 11 (B) $\frac{34}{3}$ (C) 12 (D) $\frac{40}{3}$ 。 【106(C)，答對率 46%】