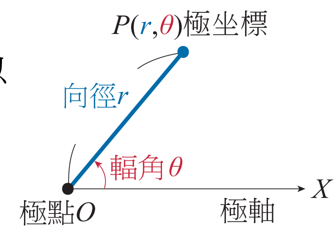
1-2 複數平面

課本學習影片

重點整理

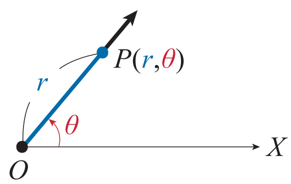
極坐標

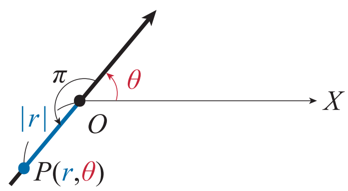
1. 極坐標的定義



平面上過定點O作水平射線$\overrightarrow{OX}$，平面上任一點P，作$\overline{OP}=r$，以$\overrightarrow{OX}$為始邊，$\overrightarrow{OP}$為終邊的有向角為θ。利用長度r和角度θ所形成的數對(r,θ)來描述點的位置，稱為**極坐標**，其中O稱為**極點**，$\overrightarrow{OX}$稱為**極軸**，r稱為**向徑**，θ稱為**輻角**。

(1) $r>0$ (2) $r<0$ (3) $r=0$





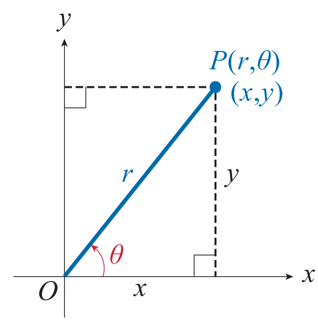
2. 極坐標(r,θ)與直角坐標(x,y)的關係

(1) 極坐標$(r,\theta)\to$直角坐標(x,y)

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

(2) 直角坐標$(x,y)\to$極坐標(r,θ)

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta=\dfrac{x}{r}，\sin\theta=\dfrac{y}{r} \end{cases}$$



數學超連結

因為$P(r,\theta)=P(r,2n\pi+\theta)$，故$P$點的極坐標表示法非唯一。

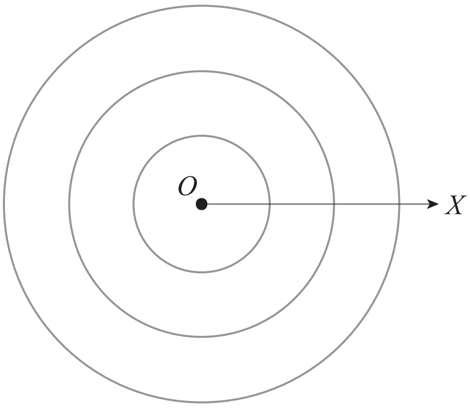
若取$r>0$，$0\le\theta<2\pi$，則(r,θ)即唯一確定，此時θ稱為**主輻角**。

1 老師講解 **極坐標** 學生練習

配合課本例 1

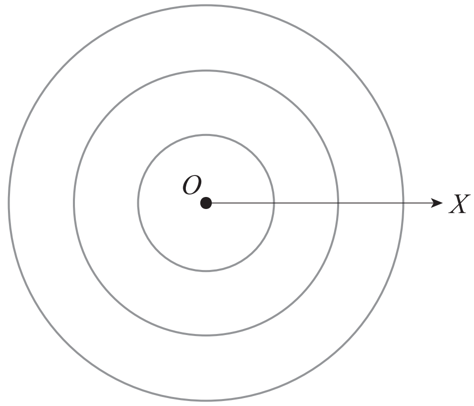
在極坐標上指出下列各點的位置

(1) $P(2, 45°)$ (2) $Q(3, -120°)$ (3) $R(1, 90°)$



在極坐標上指出下列各點的位置

(1) $A(2, 30°)$ (2) $B(2, -60°)$ (3) $C(3, -\pi)$



2 老師講解 **極坐標化為直角坐標** 學生練習

配合課本例 2

將下列各極坐標化為直角坐標

(1) $(\sqrt{6}, 45°)$ (2) $\left(4, \frac{2}{3}\pi\right)$ (3) $(3, 270°)$

將下列各極坐標化為直角坐標

(1) $\left(2, \frac{3}{4}\pi\right)$ (2) $(4, -60°)$ (3) $(6, \pi)$

3 老師講解　直角坐標化為極坐標　學生練習

配合課本例 3

將下列各直角坐標化為極坐標
$(r>0$ ， $0°\le\theta<360°)$
(1) $\left(2,2\sqrt{3}\right)$　(2) $\left(3\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$　(3) $(5,0)$

將下列各直角坐標化為極坐標
$(r>0$ ， $0°\le\theta<360°)$
(1) $\left(-3\sqrt{3},3\right)$　(2) $(-1,-1)$　(3) $\left(\sqrt{2},-\sqrt{6}\right)$

重點整理

複數平面

1. 複數平面

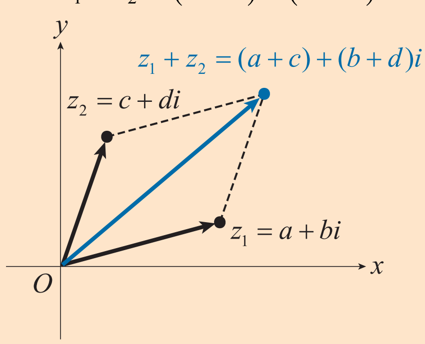
設 x 、 y 為實數，則每個複數 $z=x+yi$ 可對應到坐標平面上的點 (x, y) ，而坐標平面上的每個點 (x, y) 也可以和複數 $z=x+yi$ 對應。故每個複數 $z=x+yi$ 和點 (x, y) 具有一對一的對應關係，用來表示所有複數的坐標平面，稱為**複數平面**或**高斯平面**。複數平面上， x 軸上之點代表虛部為 0 的複數，即為實數；而 y 軸上之點代表實部為 0 的純虛數(原點除外)。因此， x 軸又稱為**實軸**， y 軸又稱為**虛軸**。

數學超連結

複數加減法和係數積的幾何意義

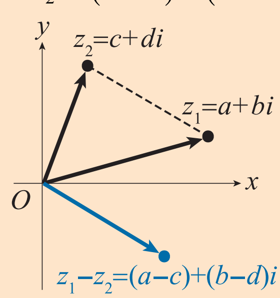
(1) 加法： $z_1=a+bi$ ， $z_2=c+di$

$\Rightarrow\ z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$

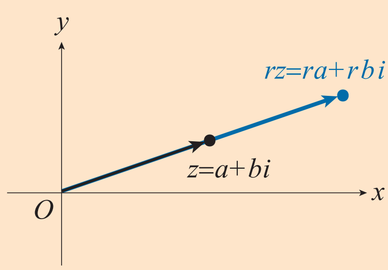


(2) 減法： $z_1=a+bi$ ， $z_2=c+di$

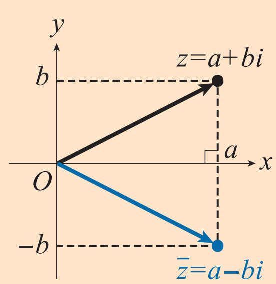
$\Rightarrow\ z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$



(3) 係數積： $z=a+bi\ \Rightarrow\ rz=ra+rbi$



(4) 共軛複數： $z=a+bi\ \Rightarrow\ \bar{z}=a-bi$



2. 複數的絕對值

(1) 定義： 複數 $z=x+yi$ （ x 、 y 為實數）的絕對值 $|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$ ，即為複數平面上 z 到原點的距離。

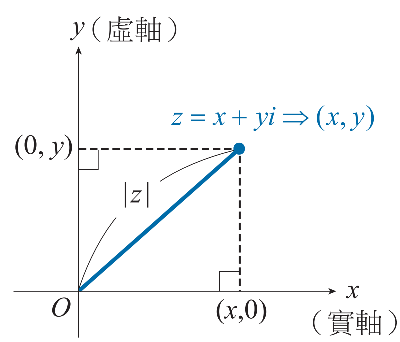
(2) 性質：①$|z|=|\bar{z}|$

②$|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$

③$|z^n|=|z|^n$ ，其中 n 為自然數

④$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ （ $z_2\neq 0$ ）

⑤$z\times\bar{z}=|z|^2$



數學超連結

設 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$

則 $|z_1-z_2|=|(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 即為 z_1 與 z_2 的距離。

4 老師講解 複數平面 學生練習

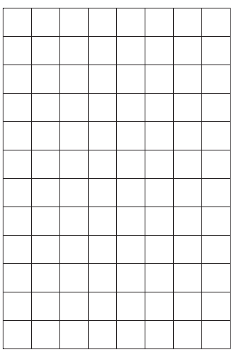
配合課本例 4

在複數平面上標出下列各複數所代表之點

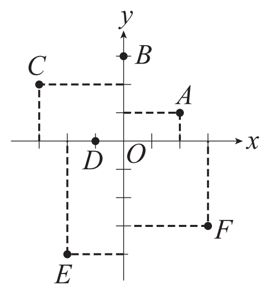
(1) $z_1=2+3i$　(2) $z_2=-2+3i$

(3) $z_3=-2-3i$　(4) $z_4=2-3i$

(5) $z_5=4$　(6) $z_6=-4i$



右圖的複數平面，每單位長為 1，試寫出各點代表的複數。



5 老師講解 複數的絕對值 學生練習

配合課本例 5、6

設 $z_1=2+i$，$z_2=-3+4i$，求

(1) $|z_1|$　(2) $|\overline{z_2}|$　(3) $|z_1\times z_2|$　(4) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

設 $z_1=7-i$，$z_2=3-4i$，求

(1) $|\overline{z_1}|$　(2) $|z_2|$　(3) $|z_1\times z_2|$　(4) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

6　老師講解　**複數絕對值的運算性質**　學生練習

配合課本例 6

(1) 設 $a=\dfrac{2+i}{4}$，$b=\dfrac{3}{4-2i}$，求 $|ab|$

(2) 設 $z=\dfrac{(3-i)^3(-3-4i)^4}{(7+i)^2(-4+2i)}$，求 $|z|$

求下列各複數的絕對值

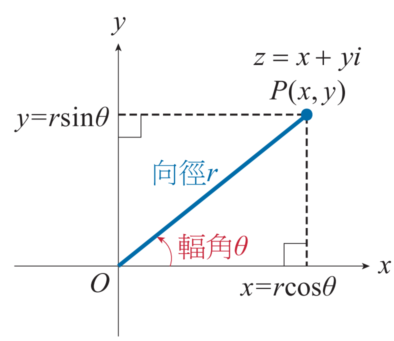
(1) $z_1=(1+i)(1+\sqrt{3}i)(5-12i)$

(2) $z_2=\dfrac{(3-4i)^4(1+7i)^2}{(8+6i)^3(-1+i)^4}$

1

重點整理

複數的極式



設 x、$y\in\mathbb{R}$，非零複數 $z=x+yi$　**（標準式）**

$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　**（極式）**

1. 其中 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 稱為 z 的**向徑**，
   θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，稱為 z 的**輻角**。
2. 若 $P(x,y)$ 為複數平面上代表複數 $z=x+yi$ 之點，則
   $z=\sqrt{x^2+y^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}i\right)$，令 $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta$ 為「以 x 軸正向為始邊，$\overline{OP}$ 為終邊」的有向角，得 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。
3. 若 $0\le\theta<2\pi$，則輻角 θ 稱為 z 的**主輻角**，以 $\mathrm{Arg}(z)$ 表示。
4. $z=0$ 的極式為 $0(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 θ 可為任意角。
5. 若兩複數的極式相等，則其向徑相等，輻角為同界角。

數學超連結

$\underset{\text{（標準式）}}{z=x+yi}\overset{\text{換}}{\Rightarrow}$ 直角坐標 $(x,y)\overset{\text{換}}{\Rightarrow}$ 極坐標 $(r,\theta)\Rightarrow\underset{\text{（極式）}}{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

7 老師講解　複數標準式化為極式　學生練習

配合課本例 7

將下列各複數標準式化為極式，輻角取主輻角

(1) $z_1=\sqrt{3}+i$　(2) $z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

(3) $z_3=-3-3\sqrt{3}i$　(4) $z_4=2\sqrt{3}-2i$

將下列各複數標準式化為極式，輻角取主輻角

(1) $z_1=1+i$　(2) $z_2=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

(3) $z_3=-2-2i$　(4) $z_4=\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

8 老師講解 複數標準式化為極式 學生練習

配合課本例 7

將下列各複數標準式化為極式，輻角取主輻角

(1) $z_1=3$ (2) $z_2=-i$

將下列各複數標準式化為極式，輻角取主輻角

(1) $z_1=5i$ (2) $z_2=-\sqrt{2}$

1

9 老師講解 求主輻角 學生練習

配合課本例 8

求下列各複數的主輻角：

(1) $z_1=\sin 25^\circ-i\cos 25^\circ$

(2) $z_2=-\cos 25^\circ-i\sin 25^\circ$

求下列各複數的主輻角：

(1) $z_1=-2(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ)$

(2) $z_2=-\sin 50^\circ+i\cos 50^\circ$

重點整理

極式的乘除運算

1. 極式乘除運算公式

若複數 z_1 、 z_2 的極式分別為 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ ， $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ ，則

(1) $\boldsymbol{z_1\times z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))}$……即長度相乘，角度相加

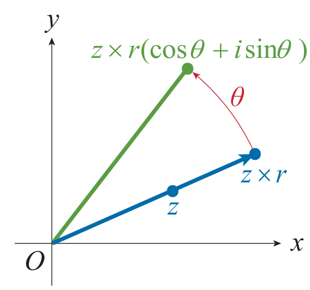
(2) $\boldsymbol{\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))}$ ，其中 $z_2\neq0$……即長度相除，角度相減

2. 複數乘除法的幾何意義

設複數 z 為複數平面上一點， r 為正實數， θ 為有向角，則

(1) $z\times r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 在複數平面上所對應之點，就是以原點 O 為中心，將 z 的向徑伸縮 r 倍，再逆時針旋轉 θ 角。

(2) $\dfrac{z}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$ （ $r\neq0$ ， $\theta\neq0$ ）在複數平面上所對應之點，就是以原點 O 為中心，將 z 的向徑伸縮 $\dfrac{1}{r}$ 倍，再順時針旋轉 θ 角。



10 老師講解 **極式的乘除法** 學生練習

配合課本例 9

設 $z_1=4\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ，

$z_2=3\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ，求

(1) $z_1\times z_2$ (2) $\dfrac{z_1}{z_2}$ （以標準式表之）

求下列各式的值（以標準式表之）

(1) $3(\cos110^\circ+i\sin110^\circ)\times2(\cos(-20^\circ)+i\sin(-20^\circ))$

(2) $\dfrac{8(\cos170^\circ+i\sin170^\circ)}{4(\cos50^\circ+i\sin50^\circ)}$

11 老師講解 極式的乘除法 學生練習

配合課本例 10

求$\dfrac{4(\cos 119^\circ + i\sin 119^\circ)}{2(\cos 62^\circ + i\sin 62^\circ)(\cos 3^\circ - i\sin 3^\circ)}$之值。

◎*Hint*：極式乘除法時，要注意實部是 $\cos\theta$，虛部是 $+\sin\theta$，角要相同。

求 $z = \dfrac{(\cos 170^\circ + i\sin 170^\circ)(\cos 68^\circ + i\sin 68^\circ)}{\sin 62^\circ + i\cos 62^\circ}$

之值。

1

進階題

12 老師講解 由向徑和輻角寫複數極式 學生練習

設 z 為複數，若 $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = \sqrt{2}$，

$\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$，則 z 的標準式為何？

◎*Hint*：已知 z 的向徑 r，$\operatorname{Arg}(z) = \theta$

$\Rightarrow \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

設 z 為複數，若 $\left|\dfrac{z-1}{z}\right| = \sqrt{2}$，

$\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z-1}{z}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$，則 z 的標準式為何？

★表難題

1-2 實力評量

對應範例

② **1.** 將下列極坐標化為直角坐標

(1) $\left(0,\dfrac{\pi}{5}\right)=$ ＿＿＿＿＿　(2) $\left(2\sqrt{2},\dfrac{7}{4}\pi\right)=$ ＿＿＿＿＿。

③ **2.** 設 $A(-5,1)$，$B\left(5-6\sqrt{3},-7\right)$，若 C 點為 $\overline{AB}$ 的中點，則 C 點的極坐標為＿＿＿＿＿。

★ **3.** 設 $A(3,21^\circ)$，$B\left(7\sqrt{2},66^\circ\right)$，則 $\overline{AB}$ 之長為＿＿＿＿＿。

⑤⑥ **4.** 求下列各複數的絕對值

(1) $|(1+i)(1-2i)(1+3i)|=$ ＿＿＿＿＿

(2) $\left|\dfrac{(-3+4i)^7\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3}{(4-3i)^5\left(1-\sqrt{3}i\right)^5}\right|=$ ＿＿＿＿＿。

⑦⑧ **5.** 將下列各複數化為以主輻角表示之極式

(1) $z_1=-2=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) $z_2=-2\sqrt{3}+6i=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

(3) $z_3=5\sqrt{3}+5i=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

(4) $z_4=\dfrac{4}{1+i}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

★ (5) $z_5=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}\right)^2=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

⑨ **6.** 求下列各複數的主輻角

(1) $z_1=\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ$，$\operatorname{Arg}(z_1)=$ ＿＿＿＿＿

(2) $z_2=-\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ$，$\operatorname{Arg}(z_2)=$ ＿＿＿＿＿

(3) $z_3=\sin 20^\circ-i\cos 20^\circ$，$\operatorname{Arg}(z_3)=$ ＿＿＿＿＿。

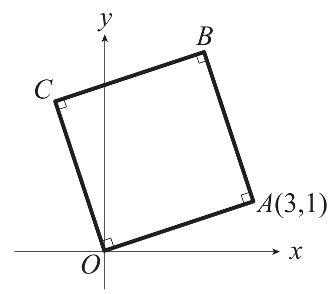
⑩ **7.** 設 $z_1=4(\cos105^\circ+i\sin105^\circ)$，$z_2=2(\cos15^\circ+i\sin15^\circ)$，求下列各式之值

(1) $z_1\times z_2=$____________________ (2) $\dfrac{z_1}{z_2}=$__________ 。

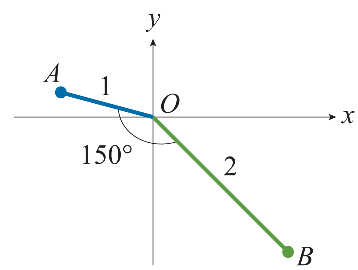
⑪ **8.** $\dfrac{2(\cos200^\circ+i\sin200^\circ)(\cos140^\circ+i\sin140^\circ)}{\sqrt{2}(\sin50^\circ+i\cos50^\circ)}$ 之值為____________________ 。

⑫ ★ **9.** 設兩複數 $z_1=2+ai$，$z_2=2b+(2-b)i$，a、$b\in\mathbb{R}$，若 $|z_1|=\sqrt{2}|z_2|$ 且 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的主輻角為 $\dfrac{\pi}{4}$，則數對 $(a,b)=$__________ 。

★ **10.** 如圖，坐標平面上正方形 $OABC$，其中 $O(0,0)$、$A(3,1)$，則 B 點坐標為__________ 。



★ **11.** 複數平面上，A、B 分別代表複數 z_1、z_2 之點，若 $\overline{OA}=1$，$\overline{OB}=2$，$\angle AOB=150^\circ$（如右圖），則 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的標準式為____________________ 。



◎*Hint*：寫出 z_1 和 z_2 的極式，利用極式除法求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 。

★ **12.** 設複數 z 滿足 $|z-1+i|=2$，則 z 的軌跡方程式為____________________ 。

◎*Hint*：$|z_1-z_2|$ 為 z_1 和 z_2 在複數平面上的距離。

★ **13.** 基本電學分析交流電路時，將電壓 V 和電流 I 以相量表示法表示，為了方便運算，將相量表示法利用複數形式做運算。複數的相量表示法可用直角坐標 $\overline{z}=a+jb$（為避免和電流 i 混淆，改以 j 表示 $\sqrt{-1}$）和極坐標 $\overline{z}=r\angle\theta$（即 $\overline{z}=r\cos\theta+jr\sin\theta$，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$）。交流電路中，電壓 V 和電流 I 的比值稱為阻抗 Z，其中 $Z=R+jX$，亦即阻抗的實部為交流電阻，虛部為電抗（由電感器或電容器構成）。若已知電壓 $\overline{V}=100\angle0^\circ$ (V)，電流 $\overline{I}=2\angle30^\circ$ (A)，則總阻抗 $\overline{Z}$ 的極坐標表示法為____________________ 歐姆，直角坐標表示法為____________________ 歐姆。

[素養導向]