1 三角函數的應用

課本學習影片

「※」表補充，供斟酌使用

1-1 和差角公式

重點整理

正弦、餘弦和正切的和差角公式

設α、β為任意角

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$〔$\tan\alpha$、$\tan\beta$、$\tan(\alpha+\beta)$皆有意義〕

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$〔$\tan\alpha$、$\tan\beta$、$\tan(\alpha-\beta)$皆有意義〕

1 老師講解　正餘弦和正切的和差角公式　學生練習

配合課本例 1、2

利用和差角公式求下列各三角函數值

(1) $\sin 75°$　(2) $\cos 15°$　(3) $\tan 75°$

利用和差角公式求下列各三角函數值

(1) $\cos 75°$　(2) $\sin 15°$　(3) $\tan 15°$

2　老師講解　**正餘弦的和差角公式**　學生練習

配合課本例 3

求下列各式之值

(1) $\sin 25^\circ\cos 35^\circ+\cos 25^\circ\sin 35^\circ$

(2) $\cos 110^\circ\cos 25^\circ-\sin 70^\circ\cos 65^\circ$

互餘

◎*Hint*： $\cos 110^\circ\cos 25^\circ-\sin 70^\circ\cos 65^\circ$

互補

角度不同，但有互餘或互補的關係，可用 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ 、

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ 化簡。

求下列各式之值

(1) $\sin 310^\circ\cos 160^\circ-\cos 310^\circ\sin 160^\circ$

(2) $\cos(240^\circ+\theta)\cos(30^\circ+\theta)$

$+\sin(240^\circ+\theta)\sin(30^\circ+\theta)$

3　老師講解　**正切的和差角公式**　學生練習

求 $\dfrac{\tan 250^\circ-\tan 25^\circ}{1+\tan 250^\circ\tan 25^\circ}$ 之值。

求 $\dfrac{\tan 114^\circ+\tan 36^\circ}{1-\tan 114^\circ\tan 36^\circ}$ 之值。

4 老師講解 正餘弦的和差角公式 學生練習

配合課本例 4、5

(1) 設 α 、 β 皆為銳角，且 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ，$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ ，求 $\alpha+\beta$ 的度數。

(2) 設 $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ ，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ ，且 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ ，$\tan\beta=\frac{1}{3}$ ，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 。

已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ ，若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ，$\sin\beta=-\frac{5}{13}$ ，求

(1) $\sin(\alpha-\beta)$　(2) $\cos(\alpha-\beta)$

5　老師講解　**正切的和角公式**　學生練習

已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 、 $\tan\beta=\frac{1}{3}$ ，若 α 、 β 皆為銳角，求

(1) $\tan(\alpha+\beta)$　(2) $\alpha+\beta$ 的度數

已知 $0°<\alpha<90°$ ， $90°<\beta<180°$ ，

若 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$ ， $\tan\beta=-2$ ，求

(1) $\tan(\alpha+\beta)$　(2) $\alpha+\beta$ 的度數

1

重點整理

二倍角公式

設 θ 為任意角，將和角公式中的 α 和 β 都用 θ 代入可得：

$\mathbf{\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta}$

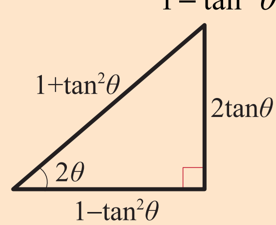
$\mathbf{\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\underset{(\sin^2\theta=1-\cos^2\theta)}{2\cos^2\theta-1}=\underset{(\cos^2\theta=1-\sin^2\theta)}{1-2\sin^2\theta}}$

$\mathbf{\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$

（其中 $\tan\theta$ 、 $\tan 2\theta$ 皆有意義）

數學超連結

由 $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$



$\Rightarrow$　$\mathbf{\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}}$ ，

$\mathbf{\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}$

6 老師講解　二倍角公式　學生練習

配合課本例 6

設 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ 且 $\frac{1}{2}\pi<\alpha<\pi$，求下列各函數值

(1) $\sin 2\alpha$　(2) $\cos 2\alpha$　(3) $\tan 2\alpha$

設 $\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\sin\beta<0$，求下列各函數值

(1) $\sin 2\beta$　(2) $\cos 2\beta$

7 老師講解 **正弦的二倍角公式** 學生練習

配合課本例 7

設 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，(1)試求 $\sin 2\theta$
(2)若 $0<\theta<\pi$，試求 θ 之值

設 $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{8}{3}$，試求 $\sin 2\theta$。

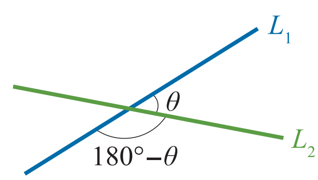
1

重點整理

兩直線夾角

1. 以斜率或斜角求兩直線夾角

平面上，兩直線 L_1、L_2 交於一點，形成兩組夾角，若一夾角為 θ，則另一夾角為 $180°-\theta$（$0°<\theta<180°$）。



(1) 若 L_1、L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，則

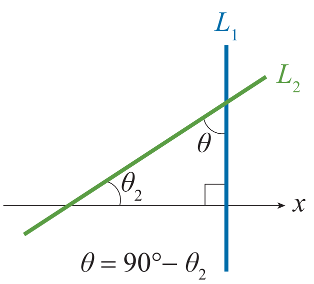
$$\tan\theta=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$（θ 和 $180°-\theta$ 的正切值互為相反數）。

數學超連結

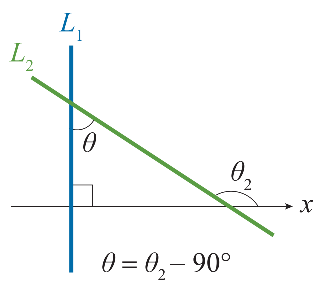
若 $\boldsymbol{m_1m_2=-1}$，即 $\mathbf{tan}\boldsymbol{\theta}$ 的分母為 0 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{L_1\perp L_2}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\theta=90°}$

(2) 若 L_1 的斜率不存在（即 L_1 垂直 x 軸），設 L_2 的斜角為 θ_2 $\Rightarrow$ $\theta=|90°-\theta_2|$。

① $0<\theta_2<90°$



② $90°<\theta_2<180°$



※2. 以法向量求兩直線夾角

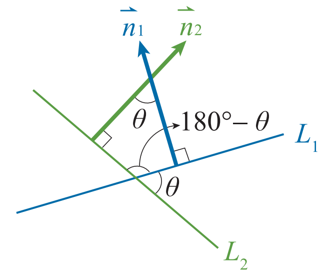
(1) 直線的法向量

① 給定一直線 L，若非零向量 $\overrightarrow{n}$ 和 L 垂直，則 $\overrightarrow{n}$ 稱為 L 的**法向量**（非唯一）。

② $L: ax+by+c=0$ 的法向量可取為 $\overrightarrow{n}=(a,b)$。

(2) 兩直線夾角

兩直線 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 的法向量分別為 $\overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1)$ 和 $\overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2)$，若 $\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$ 的夾角為 θ，則 L_1、L_2 的夾角為 θ 和 $180°-\theta$，且



$$\boldsymbol{\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\pm\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\times\sqrt{a_2^2+b_2^2}}}$$

數學超連結

利用法向量求兩直線夾角，無論直線斜率是否存在都可以！

8 老師講解 **求兩直線夾角（兩直線斜率均存在）** 學生練習

配合課本例 8

設兩直線 $L_1: x-2y+1=0$、$L_2: x+3y+5=0$，求 L_1、L_2 的夾角。

設兩直線 $L_1: 2x-y+3=0$、$L_2: x+y+1=0$ 的夾角為 θ，求(1) $\tan\theta$ (2) $\sin\theta$

9 老師講解　**求兩直線夾角（其中一直線無斜率）**　學生練習

配合課本例 9

設兩直線 $L_1: x+1=0$、$L_2: \sqrt{3}x+y-3=0$，求 L_1、L_2 的夾角。

設兩直線 $L_1: x-2=0$、$L_2: x-y-5=0$，求 L_1、L_2 的銳夾角。

1

重點整理

正餘弦函數的疊合

設 a、b 為非零實數，則 $f(x)=a\sin x+b\cos x=\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)}$，其中 θ 滿足

$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，故 $a\sin x+b\cos x$ 的最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$，最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}$，即 $\boldsymbol{-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}}$。

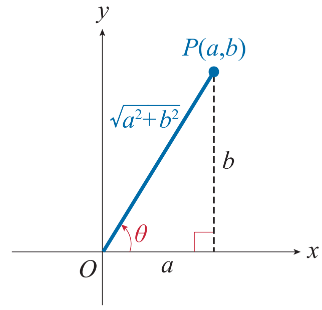
說明：設 $f(x)=a\sin x+b\cos x=A\sin(x+\theta)$　〔即欲將正弦和餘弦函數疊合成一個振幅 $A(A>0)$、相位角 θ 的正弦函數〕

$$=A(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$$
$$=A\cos\theta\sin x+A\sin\theta\cos x$$

$\Rightarrow\ a=A\cos\theta$，$b=A\sin\theta$　$\Rightarrow\ \cos\theta=\dfrac{a}{A}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{A}$

$\because\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$　$\therefore\ \dfrac{a^2}{A^2}+\dfrac{b^2}{A^2}=1$

$\Rightarrow\ a^2+b^2=A^2$　$\Rightarrow\ A=\sqrt{a^2+b^2}$



在坐標平面上取點 $P(a,b)$，則自 x 軸正向逆時針旋轉至 $\overline{OP}$ 的角為 θ，

$\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow \quad \cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore \quad f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)$

$\qquad\qquad =\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$

$\because \quad -1\le\sin(x+\theta)\le 1 \quad \therefore \quad -\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)\le\sqrt{a^2+b^2}$

即 $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$

10 老師講解 利用正餘弦疊合公式求極值 學生練習

配合課本例 10

試求 $f(x)=3\sin x+4\cos x-5$ 的最大值與最小值。

設 $f(x)=2\sin x-3\cos x+4$，試求 $f(x)$ 的最大值與最小值。

11 老師講解　**求正餘弦疊合後的極值**　學生練習

配合課本例 10

設 $0 \le x < 2\pi$，若 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，試求 $f(x)$ 的最大值與最小值，並求出極值所對應的 x 值。

設 $0 \le x < 2\pi$，若 $f(x)=\sin x-\cos x$，試求 $f(x)$ 的最大值與最小值，並求出極值所對應的 x 值。

1

12 老師講解　利用二倍角公式求極值　學生練習

設 $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ ，試求 $f(x)$ 的最大值和最小值。

◎*Hint*： 有 $\cos 2x$ 和 $\sin x$ （或 $\cos x$ ）求極值，利用二倍角公式把 $\cos 2x$ 換成 $\sin x$ （或 $\cos x$ ）。

設 $f(x)=\cos 2x-4\cos x+1$，試求 $f(x)$ 的最大值和最小值。

進階題

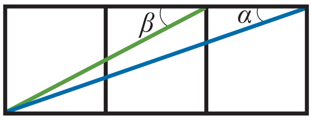
13 老師講解　正切的和差角公式　學生練習

設 $\alpha+\beta=\frac{1}{4}\pi$ ，試求 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ 之值。

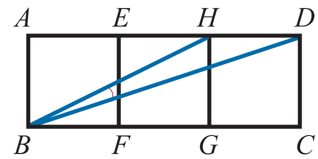
試求 $\tan 85^\circ-\tan 25^\circ-\sqrt{3}\tan 85^\circ\tan 25^\circ$ 之值。

14　老師講解　**正切之和差角公式的應用**　學生練習

如右圖，每個四邊形都是正方形，求 $\alpha+\beta$ 的度數。



如右圖，$ABFE$、$EFGH$、$HGCD$ 均為正方形，求 $\tan\angle HBD$。



15　老師講解　**二倍角公式的應用**　學生練習

設 $\pi<2\theta<\frac{3}{2}\pi$ 且 $\sin 2\theta=-\frac{5}{13}$，試求 $\cos^4\theta-\sin^4\theta$。

設 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$，試求 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$。

1

16 老師講解　求與已知直線夾某角度的直線　學生練習

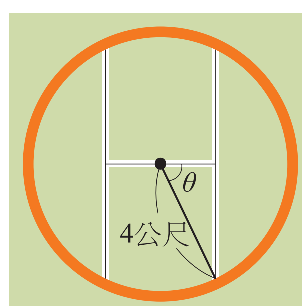
求過點 $(1,3)$ 且與直線 $2x-y+5=0$ 夾 $45°$ 角的直線方程式。

求過點 $(0,3)$ 且和直線 $y=-2x+7$ 夾 $45°$ 角的直線方程式。

1-1 段考素養題

1. 如圖，憲國想在摩天大樓頂，使用特製膠帶貼出一個直升機停機坪的標誌（對稱於圓心），已知外圓的半徑為 4 公尺，則圖中 H 形的部分最多需要＿＿＿＿＿公尺的膠帶。（膠帶寬度不計）

【西螺農工】



★表難題

1-1 實力評量

對應範例

① **1.** (1) $\cos 105° =$ __________ (2) $\tan 105° =$ __________。

② **2.** $\sin 77° \cos 32° - \cos 77° \sin 32° =$ __________。

③ **3.** $\dfrac{\tan 140° + \tan 70°}{1 - \tan 140° \tan 70°} =$ __________。

④ **4.** 設 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi < \beta < \pi$，若 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$，$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$，求

(1) $\sin(\alpha + \beta) =$ __________ (2) $\cos(\alpha - \beta) =$ __________。

⑤ ★ **5.** $\triangle ABC$ 中，若 $\tan A = \frac{1}{3}$，$\tan B = -2$，則

(1) $\tan C =$ __________ (2) $\angle C =$ __________度。

6. 設 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 為方程式 $x^2 + 4x - 2 = 0$ 的兩根，則 $\tan(\alpha + \beta) =$ __________。

◎*Hint*：利用根與係數關係求 $\tan\alpha + \tan\beta$ 和 $\tan\alpha\tan\beta$

⑥ **7.** 設 $\cos\theta = \frac{1}{3}$ 且 $\sin\theta < 0$，則 (1) $\sin 2\theta =$ __________ (2) $\cos 2\theta =$ __________。

⑥ **8.** 設 $\tan\theta = \frac{1}{2}$，則 (1) $\tan 2\theta =$ __________ (2) $\sin 2\theta =$ __________。

⑦ **9.** 已知 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$，則 $\sin 2\theta =$ __________。

1

⑧⑨ **10.** 求下列各組直線的夾角：

(1) $L_1: x+4y-10=0$、$L_2: 3x-5y+5=0$，$\theta=$＿＿＿＿＿＿

(2) $L_1: 6x-13y+5=0$、$L_2: 13x+6y-9=0$，$\theta=$＿＿＿＿＿＿

(3) $L_1: x=1$、$L_2: x+\sqrt{3}y-2=0$，$\theta=$＿＿＿＿＿＿

(4) $L_1: y=0$、$L_2: \sqrt{2}x-\sqrt{6}y+\sqrt{3}=0$，$\theta=$＿＿＿＿＿＿。

⑨ **11.** 設兩直線 $x+3=0$、$2x+3y=0$ 所夾的銳角為 θ，則 $\cos\theta=$＿＿＿＿＿＿。

⑩ **12.** 設 $f(x)=\sin x-\cos x+3$，若 $f(x)$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$＿＿＿＿＿。

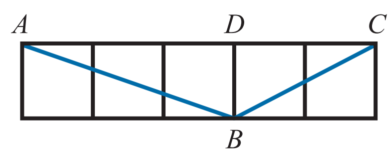
⑪ ★ **13.** 設 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$，$0\le x<2\pi$，則

(1) 當 $x=$＿＿＿＿＿＿時，$f(x)$ 有最大值＝＿＿＿＿＿＿

(2) 當 $x=$＿＿＿＿＿＿時，$f(x)$ 有最小值＝＿＿＿＿＿＿。

⑬ ★ **14.** 試求 $\tan 65°-\tan 20°-\tan 65°\tan 20°+2$ 之值為＿＿＿＿＿＿。

⑭ ★ **15.** 如右圖，每個小四邊形都是邊長為 1 的正方形，則 $\angle ABC=$＿＿＿＿＿＿度。



★ **16.** 已知 $\cos\theta=\frac{1}{3}$ 且 $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$，則 $3\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2}=$＿＿＿＿＿＿。

⑮ ★ **17.** 已知 $\sin 2\theta=\frac{1}{3}$ 且 $\frac{1}{2}\pi<2\theta<\pi$，則 $\sin^4\theta-\cos^4\theta=$＿＿＿＿＿＿。

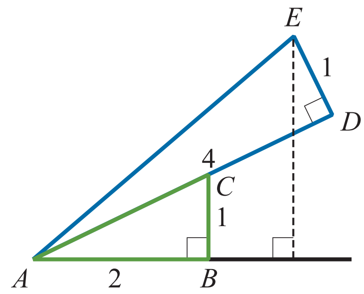
⑫ ★ **18.** 設 $f(x)=4\sin x-\cos 2x+4$，若 $f(x)$ 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$＿＿＿＿＿＿。

★ **19.** 設 $0\le x<2\pi$，則函數 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-4\sin x$ 的最大值為＿＿＿＿＿＿。

◎*Hint*：利用和角公式和疊合公式

⑯ **20.** 設兩直線 $L_1: 2x+y-1=0$ 與 $L_2: x+ky+5=0$ 的交角為 $\frac{1}{4}\pi$ ，則 $k=$__________。

21. 某大樓一樓大廳欲放置一個由兩塊側面為直角三角形的壓克力積木塊堆疊之裝置藝術品（如右圖），若 $\overline{AB}=2$ 公尺，$\overline{BC}=1$ 公尺，$\overline{AD}=4$ 公尺，$\overline{DE}=1$ 公尺，因為天花板高度為 3 公尺，欲知此裝置藝術品是否超高，需計算藝術品最高點 E 到地面的高度為__________公尺。（$\sqrt{5}\fallingdotseq 2.24$ ，四捨五入算至小數點以下第 2 位）



[素養導向]

22. 交流電路中，電壓是以正弦波方程式 $V(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)$ 表示，其中 V_m 為電壓最大值，ω 為角速度，θ 為初始相位。若兩電壓的波形分別為 $V_1(t)=30\sin\omega t$，$V_2(t)=40\cos\omega t$ ，則兩波形的合成波 $V(t)=V_1(t)+V_2(t)=$______________，且合成後的電壓最大值為__________。〔註：$\sin 53°=\frac{4}{5}=\cos 37°$ ，$\cos 53°=\frac{3}{5}=\sin 37°$，電壓單位：伏特（V）〕

[素養導向]

1