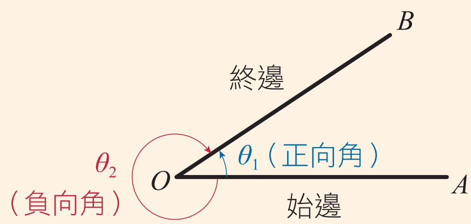
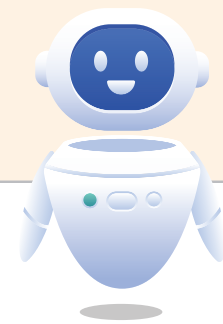
雲端教室

1-2 複數平面

- **複數**：形如 $a+bi$（a、b 為實數）的數稱為複數，其中 a 為實部，b 為虛部，i 為虛數單位。
- **有向角**：如圖所示，$\angle AOB$ 為有向角，$\overline{OA}$ 為始邊，$\overline{OB}$ 為終邊。逆時針方向旋轉所成的有向角 θ_1 為正向角，順時針方向旋轉所成的有向角 θ_2 為負向角。



觀念銜接



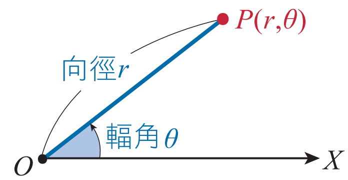
回顧第二冊我們介紹了虛數 i（$i=\sqrt{-1}$），i 不僅打破「負數不能開平方根」的框限，同時改變了數學的發展，它使得一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解允許以實根或虛根的形式呈現，然而我們無法在數線上找到對應 i 的點，那該如何賦予虛數一個幾何意義呢？

甲、極坐標

一、極坐標的定義

過去我們會利用直角坐標系來表示某一點的位置，例如：「距離原點右方 3 單位、上方 5 單位」可用數對 $(3,5)$ 表示，但其實還有另一種描述位置的方法更貼近我們的生活習慣，例如：「震央位置在花蓮縣政府西北方 10.6 公里」、「在 3 點鐘方向約 100 公尺處發現大翅鯨」…等，這種利用「方位」與「距離」的定位方式正是極坐標的概念。

如圖 1 所示，我們在平面上任取一點 O，過 O 向右作一射線 $\overrightarrow{OX}$，若 P 點為平面上異於 O 的任一點，且 $\overline{OP}=r$，$\overrightarrow{OX}$ 與 $\overrightarrow{OP}$ 所形成的有向角為 θ，則定義 P 點之**極坐標**為 (r,θ)，其中點 O 稱為**極點**，$\overrightarrow{OX}$ 為**極軸**，r 為**向徑**，θ 為**輻角**。



▲ 圖1

補充說明：極點的極坐標為 $(0,\theta)$，其中 θ 為任意角。

動動腦：你能簡單闡述直角坐標與極坐標的差異嗎？

例 1

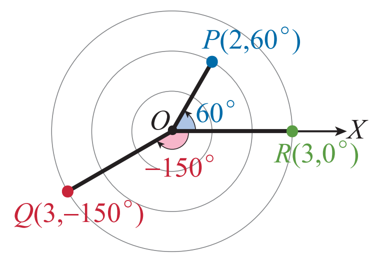
試在極坐標上描繪出 $P(2,60^\circ)$、$Q(3,-150^\circ)$、$R(3,0^\circ)$ 的位置。

解 利用同心圓及有向角概念來找點的位置

$P(2,60^\circ)$ 表長度 2，角度 60° 的點

$Q(3,-150^\circ)$ 表長度 3，角度 -150° 的點

$R(3,0^\circ)$ 表長度 3，角度 0° 的點

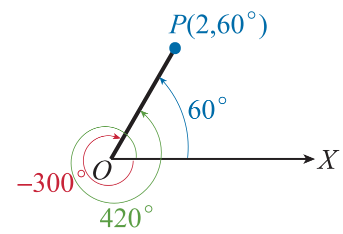


類題

1. 試在極坐標上描繪出 $A(4,120^\circ)$、$B(3,-50^\circ)$、$C(2,\pi)$ 的位置。

① 第一個用極坐標來表示平面上任一點的人是牛頓。
② 飛機導航系統常使用極坐標來定位。

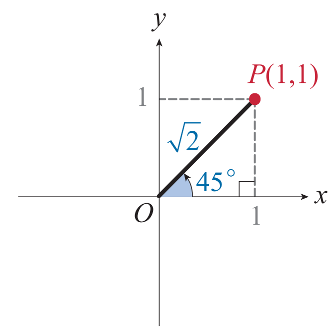
受到同界角的牽動，導致極坐標的表示法並不唯一，如圖 2 中，$\overline{OP}=2$，則 $(2,60^\circ)$、$(2,420^\circ)$、$(2,-300^\circ)$ 均代表同一點。為避免困擾，在這裡我們規定 $r\geq 0$ 且 $0^\circ\leq\theta<360^\circ$。



▲ 圖2

二、極坐標與直角坐標的關係

平面上任一點的直角坐標與極坐標是可以互相轉換的。舉例來說，若 P 點的直角坐標為 $(1,1)$，如圖 3 所示，$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，且透過特別角的三角函數，可得出 $\theta=45^\circ$，因此，直角坐標 $(1,1)$ 可化成極坐標 $(\sqrt{2},45^\circ)$。

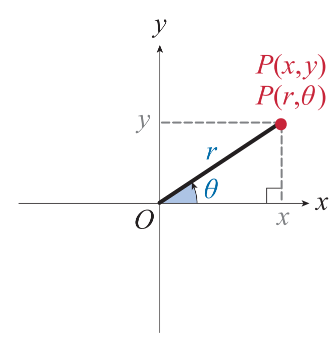


▲ 圖3

如果我們把直角坐標系的原點取作極點、x 軸正向視為極軸，則平面上任一點 P 的直角坐標 (x,y) 和極坐標 (r,θ) 之間的轉換，由任意角三角函數的定義得知其關係如下：

1. 極坐標 (r,θ) 化為直角坐標 (x,y)：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$。

2. 直角坐標 (x,y) 化為極坐標 (r,θ)：$\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \cos\theta=\dfrac{x}{r}\\ \sin\theta=\dfrac{y}{r}\end{cases}$。



▲ 圖4

例 2 **試將下列各極坐標化為直角坐標：**

(1) $(4,60^\circ)$　(2) $\left(6,\dfrac{5\pi}{4}\right)$　(3) $(5,180^\circ)$

解 (1) $r=4$，$\theta=60^\circ$

則 $x=r\cos\theta=4\times\cos60^\circ=4\times\dfrac{1}{2}=2$

$y=r\sin\theta=4\times\sin60^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

故 $(4,60^\circ)$ 的直角坐標為 $(2,2\sqrt{3})$

(2) $r=6$，$\theta=\dfrac{5\pi}{4}$

則 $x=r\cos\theta=6\times\cos\dfrac{5\pi}{4}=6\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-3\sqrt{2}$

$y=r\sin\theta=6\times\sin\dfrac{5\pi}{4}=6\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-3\sqrt{2}$

故 $\left(6,\dfrac{5\pi}{4}\right)$ 的直角坐標為 $(-3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$

(3) $r=5$，$\theta=180^\circ$

則 $x=r\cos\theta=5\times\cos180^\circ=5\times(-1)=-5$

$y=r\sin\theta=5\times\sin180^\circ=5\times0=0$

故 $(5,180^\circ)$ 的直角坐標為 $(-5,0)$

類題

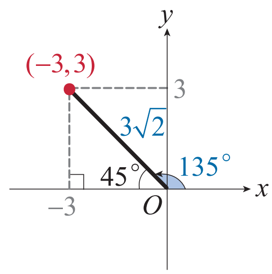
2. 試將下列各極坐標化為直角坐標：

(1) $(2,240^\circ)$　(2) $\left(10,\dfrac{2\pi}{3}\right)$　(3) $(4,270^\circ)$

例 3 試將下列各直角坐標化為極坐標：（取 $r\geq 0$ ，$0^\circ\leq\theta<360^\circ$）

(1) $(-3,3)$　　(2) $(-\sqrt{2},-\sqrt{6})$　　(3) $(\sqrt{3},-1)$

解 (1) 如圖所示，$(-3,3)$ 在第二象限



$r=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$　　$r=\sqrt{x^2+y^2}$

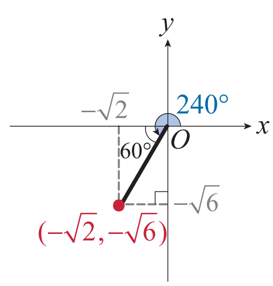
對應得 $\sin\theta=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$

$\cos\theta=\dfrac{-3}{3\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$

故 θ 取第二象限角為 135°　　$180^\circ-45^\circ=135^\circ$

因此 $(-3,3)$ 的極坐標為 $(3\sqrt{2},135^\circ)$

(2) 如圖所示，$(-\sqrt{2},-\sqrt{6})$ 在第三象限



$r=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$

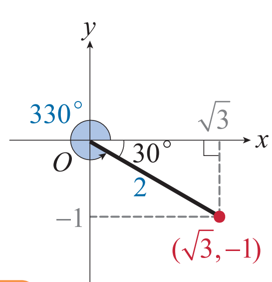
對應得 $\sin\theta=\dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

故 θ 取第三象限角為 240°　　$180^\circ+60^\circ=240^\circ$

因此 $(-\sqrt{2},-\sqrt{6})$ 的極坐標為 $(2\sqrt{2},240^\circ)$

(3) 如圖所示，$(\sqrt{3},-1)$ 在第四象限



$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

對應得 $\sin\theta=\dfrac{-1}{2}$ ，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

故 θ 取第四象限角為 330°　　$360^\circ-30^\circ=330^\circ$

因此 $(\sqrt{3},-1)$ 的極坐標為 $(2,330^\circ)$

類題

3. 試將下列各直角坐標化為極坐標：（取 $r \geq 0$ ，$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ）

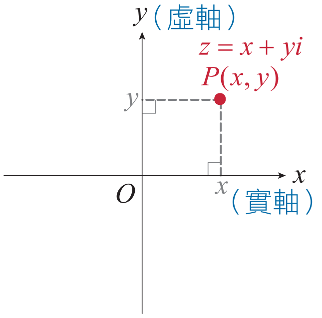
(1) $(0,1)$　　(2) $\left(-2,-2\sqrt{3}\right)$　　(3) $\left(-\sqrt{15},\sqrt{5}\right)$

乙、複數平面

一、複數的幾何意涵

所有的複數皆可表示成 $z=x+yi$（x、y 為實數）的形式，如果把 $x+yi$ 對應到數對 (x,y)，我們會發現複數與坐標平面上的點有一對一的對應關係，例如：點 $(5,-2)$ 代表複數 $5-2i$。

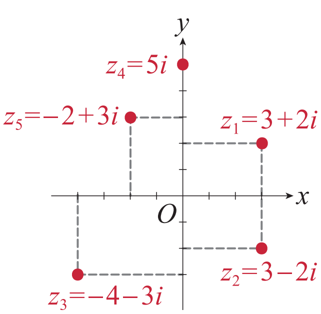
如圖 5 所示，對於複數 $z=x+yi$ 所相應的點 $P(x,y)$，若將其 x 坐標視為 z 的實部，y 坐標視為 z 的虛部，每個複數 z 的實部與虛部分別採用沿著 x 軸與 y 軸的位移表示，並稱 x 軸為實軸，y 軸為虛軸，則用以表示複數 $z=x+yi$ 的平面稱為**複數平面**（或高斯平面），如此一來，複數便有了伸展的舞臺。



▲ 圖5

例 4 **試在複數平面上標示出下列各複數所代表的點：**
$z_1=3+2i$ 、 $z_2=3-2i$ 、 $z_3=-4-3i$ 、 $z_4=5i$ 、 $z_5=-2+3i$

解　複數 $x+yi$ 與複數平面點 (x,y) 一一對應：

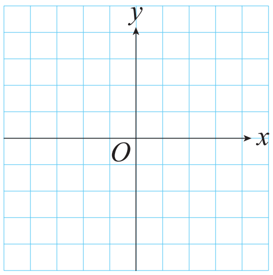


類題

4. 試在複數平面上標示出下列各複數所代表的點：

$z_1=-3$ 、 $z_2=4+i$ 、 $z_3=-4-i$ 、

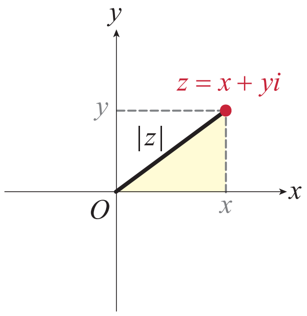
$z_4=5-2i$ 、 $z_5=-1+4i$



二、複數的絕對值

實數絕對值的幾何意義是距離的概念，在數線上，符號 $|x|$ 代表坐標 x 的點到原點的距離，而複數絕對值的概念也是相同的。

設 $z=x+yi$（x、y 為實數），我們定義複數平面上 z 點到原點的距離為 z 的絕對值，以 $|z|$ 表之，如圖 6 所示，亦即 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 。



▲ 圖6

動動腦： 我們已知 $|-3|=3$ ，那你認為「 $|-3i|=3i$ 」是正確的嗎？

例 5 試求下列各複數的絕對值：

(1) $z_1=3+4i$　(2) $z_2=4-3i$　(3) $z_3=-2i$

解

(1) $|z_1|=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ← $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) $|z_2|=|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

(3) $|z_3|=|-2i|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$

類題

5. 試求下列各複數的絕對值：

(1) $z_1=1+\sqrt{3}\,i$　(2) $z_2=-5+12i$　(3) $z_3=4i$

動動腦： 在複數平面上，複數 $z=x+yi$ 與其共軛複數 $\overline{z}=x-yi$ 的位置關係為何？$|z|$ 與 $|\overline{z}|$ 相等嗎？

由複數絕對值定義，我們可推得下列運算性質：

性質　複數絕對值運算

(1) $|z|=|\overline{z}|$

(2) $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$

(3) $|z^n|=|z|^n$，n 為自然數

(4) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$（$z_2\neq 0$）

【說明】設 $z=x+yi$，$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$

(1) $|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$，$|\overline{z}|=|x-yi|=\sqrt{x^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

故 $|z|=|\overline{z}|$

(2) $$\begin{aligned}|z_1\times z_2|&=|(a+bi)(c+di)|=|(ac-bd)+(ad+bc)i|\\&=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}\\&=\sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}\\&=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=|z_1|\times|z_2|\end{aligned}$$

(3) 利用性質 (2) 可得

$$|z^n| = |z \times z^{n-1}| = |z| \times |z^{n-1}| = |z| \times |z \times z^{n-2}| = \cdots$$

$$= \underbrace{|z| \times |z| \times \cdots \times |z|}_{n\text{ 個}} = |z|^n$$

(4) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \times \dfrac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \left|\dfrac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \dfrac{1}{|z_2|} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

補充說明：因為 $1 = \left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right|$，所以 $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

例 6

試求下列各值：

(1) $|(3-4i)(5+12i)|$　　(2) $|(1+i)^2|$　　(3) $\left|\dfrac{-3-4i}{1+2i}\right|$

解

(1) $|(3-4i)(5+12i)| = |3-4i| \times |5+12i|$ 　$\boxed{|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|}$

$$= \sqrt{3^2+(-4)^2} \times \sqrt{5^2+12^2}$$

$$= 5 \times 13 = 65$$

(2) $|(1+i)^2| = |1+i|^2$ 　$\boxed{|z^2| = |z|^2}$

$$= \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

(3) $\left|\dfrac{-3-4i}{1+2i}\right| = \dfrac{|-3-4i|}{|1+2i|}$ 　$\boxed{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}}$

$$= \frac{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

類題

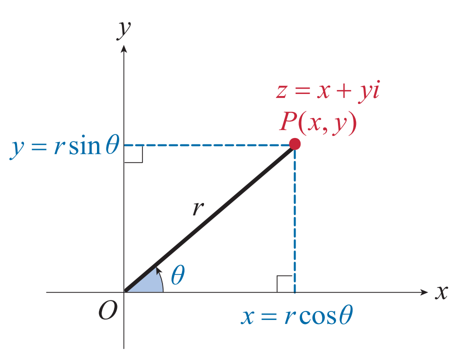
6. 試求下列各值：

(1) $\left|(1-2i)(2+i)\right|$　(2) $\left|(1-i)^4\right|$　(3) $\left|\dfrac{1+3i}{3-i}\right|$

在坐標平面上，一個點可有直角坐標 (x,y) 和極坐標 (r,θ) 兩種表達方式，同樣地，除了 $x+yi$ 之外，複數也有另一種呈現方式。

丙、複數的極式

我們嘗試用「方位（角度）」與「距離（長度）」來表示複數 $z=x+yi$ 在複數平面上所代表的點。



▲ 圖7

對於非零複數 $z=x+yi$（x、y 為實數）在複數平面上對應的點 $P(x,y)$，如圖 7 所示，令 $r=|z|=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta$ 為以 x 軸正向為始邊，$\overline{OP}$ 為終邊之有向角，則此時 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，因此可得 $z=x+yi=r\cos\theta+r\sin\theta i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。

我們將 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 稱為 z 的極式，其中 $r=|z|$ 稱為 z 的向徑，θ 稱為 z 的輻角。當 $0\le\theta<2\pi$ 時，此時的輻角 θ 稱為主輻角，以 $\mathrm{Arg}(z)$ 表示。

補充說明：$z=x+yi$ 的形式稱為 z 的標準式。

觀念引導

若 $z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則點 (x,y) 的極坐標就是 (r,θ)。

例 7

試將下列各複數標準式化為極式：（輻角取主輻角）

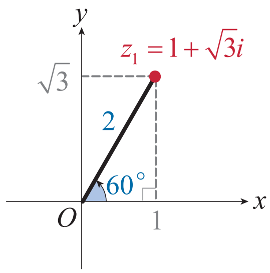
(1) $z_1=1+\sqrt{3}i$　(2) $z_2=-1+i$　(3) $z_3=-5i$

解

(1) $|z_1|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

得 $z_1=1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2(\cos\theta+i\sin\theta)$

如圖所示，z_1 在複數平面位處第一象限



又 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

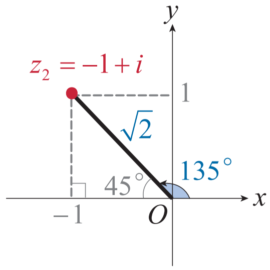
則 $\mathrm{Arg}(z_1)=60^\circ$

故 z_1 的極式為 $z_1=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$

(2) $|z_2|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

得 $z_2=-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$

如圖所示，z_2 在複數平面位處第二象限



又 $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

則 $\mathrm{Arg}(z_2)=135^\circ$

故 z_2 的極式為 $z_2=\sqrt{2}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$

(3) $|z_3|=\sqrt{0^2+(-5)^2}=5$

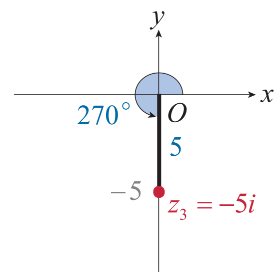
得 $z_3=-5i=5(0-i)=5(\cos\theta+i\sin\theta)$

如圖所示，z_3 在複數平面上落於虛軸

又 $\cos\theta=0$，$\sin\theta=-1$

則 $\operatorname{Arg}(z_3)=270^\circ$

故 z_3 的極式為 $z_3=5(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)$



類題

7. 試將下列各複數標準式化為極式：（輻角取主輻角）

(1) $z_1=-1-\sqrt{3}i$　　(2) $z_2=2\sqrt{3}-2i$　　(3) $z_3=3\sqrt{2}$

例 8

設 $z_1=\sin 50^\circ+i\cos 50^\circ$，$z_2=-\sin 50^\circ+i\cos 50^\circ$，試分別求 $\operatorname{Arg}(z_1)$ 與 $\operatorname{Arg}(z_2)$。

解 複數極式的形式是 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

因此，我們利用餘角關係，得

$z_1=\sin 50^\circ+i\cos 50^\circ$

$=\sin(90^\circ-40^\circ)+i\cos(90^\circ-40^\circ)$

$=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$ ← $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

故 $\operatorname{Arg}(z_1)=40^\circ$

$z_2 = -\sin 50^\circ + i\cos 50^\circ$

$= -\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ$ ← z_2 在第二象限

$= \cos(180^\circ - 40^\circ) + i\sin(180^\circ - 40^\circ)$

$= \cos 140^\circ + i\sin 140^\circ$

故 $\text{Arg}(z_2) = 140^\circ$

類題

8. 設 $z_1 = \sin 80^\circ - i\cos 80^\circ$，$z_2 = -\sin 80^\circ - i\cos 80^\circ$，試分別求 $\text{Arg}(z_1)$ 與 $\text{Arg}(z_2)$。

丁、極式的乘除運算

回憶第二冊學過複數的乘除法運算，例如：$(1-i)(1+i) = 1^2 - i^2 = 1+1 = 2$，$\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-2i+i^2}{2} = -i$，而當複數以極式表示時，我們試著從幾何的角度來探討複數乘除的意義。

設複數 z_1、z_2 的極式為 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，則

1. 極式乘法：

$$\begin{aligned}
z_1 \times z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]\\
&= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]
\end{aligned}$$

和角公式：
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

2. 極式除法：（ $z_2 \neq 0$ ）

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)}{r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)}$$

$$=\frac{r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2-i\sin\theta_2\right)}{r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)\left(\cos\theta_2-i\sin\theta_2\right)}$$

同乘分母的共軛複數

$$=\frac{r_1\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\right)+i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2\right)\right]}{r_2\left(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2\right)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]$$

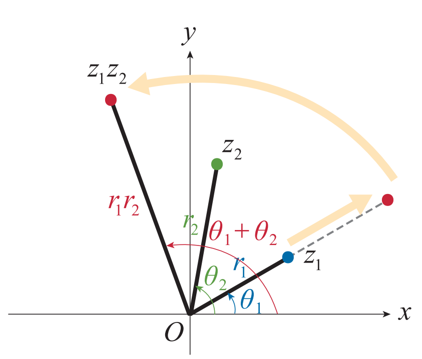
差角公式：
$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

觀察上面的運算結果，我們可以得知

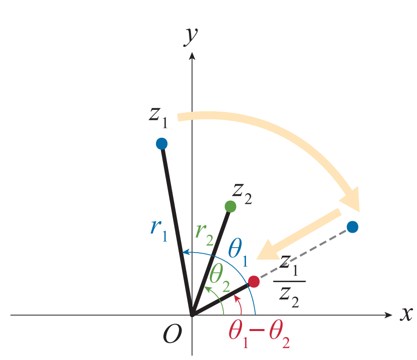
當兩個複數極式相乘時，其「向徑（長度）相乘，輻角（角度）相加」；

當兩個複數極式相除時，其「向徑（長度）相除，輻角（角度）相減」。

換個方式闡述，設 z_1 的輻角為 θ_1 ， z_2 的輻角為 θ_2 ，複數極式乘除其幾何上的意義是：當 z_1 乘以 z_2 ，則 z_1 在複數平面上所代表的點之向徑 r_1 會作伸縮變換變成 r_1r_2 ，而 z_1z_2 之輻角是由輻角 θ_1 再繞原點逆時針旋轉 θ_2 而得，即 $\theta_1+\theta_2$ ，如圖 8 所示；當 z_1 除以 z_2 ，則 z_1 在複數平面上所代表的點之向徑 r_1 會作伸縮變換變成 $\frac{r_1}{r_2}$ ，而 $\frac{z_1}{z_2}$ 之輻角是由輻角 θ_1 再繞原點順時針旋轉 θ_2 而得，即 $\theta_1-\theta_2$ ，如圖 9 所示。



▲ 圖8



▲ 圖9

例 9

設 $z_1=4(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)$，$z_2=2(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$，試求：

(1) $z_1\times z_2$　　(2) $\dfrac{z_1}{z_2}$

解 (1) $z_1\times z_2=4(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)\times 2(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$

$=4\times 2\times[\cos(75^\circ+15^\circ)+i\sin(75^\circ+15^\circ)]$ 向徑相乘，輻角相加

$=8(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=8(0+i)=8i$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{4(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)}{2(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)}$

$=\dfrac{4}{2}[\cos(75^\circ-15^\circ)+i\sin(75^\circ-15^\circ)]$ 向徑相除，輻角相減

$=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1+\sqrt{3}\,i$

類題

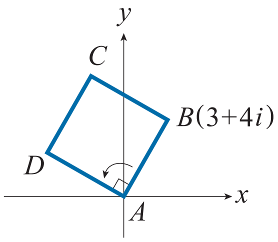
9. 設 $z_1=6(\cos 37.5^\circ+i\sin 37.5^\circ)$，$z_2=3(\cos 7.5^\circ+i\sin 7.5^\circ)$，試求：

(1) $z_1\times z_2$　　(2) $\dfrac{z_1}{z_2}$

素養抱抱

圖表素養題——複數平面

複數平面上有一正方形 $ABCD$，已知 A 在原點，B 為 $(3+4i)$，試求 D 點的複數坐標。



解　以 A 為中心，將 $B(3+4i)$ 依逆時針方向旋轉 90°，

得 D 點利用複數乘法的幾何意義

計算 $(3+4i)\times(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)=(3+4i)\times(i)=-4+3i$

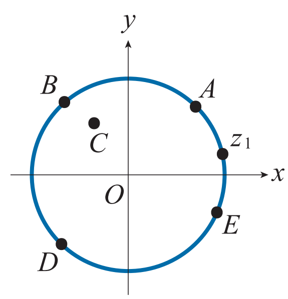
得 D 點的複數坐標為 $-4+3i$

素養抱抱

圖表素養題——複數平面

如圖所示，複數 z_1 為單位圓上的一點，$z_2 = \cos 40^\circ + i\sin 40^\circ$。則下列複數分別對應的是 A、B、C、D、E 哪一點？

(1) $z_1 \times z_2$　(2) $\dfrac{z_1}{z_2}$ 。



解　設 $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$（$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$），向徑為 1

(1) 因為 z_2 的輻角為 40°，所以 $z_1 \times z_2$ 所對應點的輻角為 $\theta + 40^\circ$

就是將 z_1 旋轉 40°，故選 A 點

(2) 因為 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的輻角為 $\theta - 40^\circ$，所以 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 所對應的點就是將 z_1 旋轉 -40°

故選 E 點

例 10 試求 $z=\dfrac{(\cos 105^\circ+i\sin 105^\circ)(\cos 37^\circ+i\sin 37^\circ)}{\cos 22^\circ+i\sin 22^\circ}$ 之值。

解

$$z=\frac{(\cos 105^\circ+i\sin 105^\circ)(\cos 37^\circ+i\sin 37^\circ)}{\cos 22^\circ+i\sin 22^\circ}$$

$$=\cos(105^\circ+37^\circ-22^\circ)+i\sin(105^\circ+37^\circ-22^\circ)$$

$$=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

類題

10. 試求 $z=\dfrac{\cos 86^\circ+i\sin 86^\circ}{(\cos 74^\circ+i\sin 74^\circ)(\cos 42^\circ+i\sin 42^\circ)}$ 之值。

複數標準式 $z=x+yi$ 利於加減法運算，
複數極式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 便於乘除法運算

觀念九宮格

試判斷下列各題之對錯，並在右圖九宮格中相應的題號位置，正確的畫「○」，錯誤的畫「×」，看能否連成一線。

1	○	2
○	3	×
4	×	5

□ (1) 以原點為極點，x 軸正向為極軸之極坐標中，定點 P 之極坐標表法恰有一個。

□ (2) 設 $z=\sin 38^\circ+i\cos 38^\circ$，則 $\operatorname{Arg}(z)=38^\circ$。

□ (3) 若點 P 之直角坐標為 $(3,-\sqrt{3})$，則點 P 之極坐標可為 $\left(2\sqrt{3},-\frac{1}{6}\pi\right)$。

□ (4) 設 $z=\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ$，則 $\overline{z}=\frac{1}{z}$。

□ (5) 設 $z_1=\cos 5\theta+i\sin 5\theta$，$z_2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$，則 $z_1\times z_2=(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\cos 10\theta+i\sin 10\theta$。

習題 1-2

基礎題

1 試將下列各極坐標化為直角坐標：

(1) $(2, 45^\circ)$　(2) $(1, -210^\circ)$

2 試將下列各直角坐標化為極坐標：（取 $r \geq 0$，$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$）

(1) $(-4\sqrt{3}, 4)$　(2) $(6, 6)$

3 試求下列各複數的絕對值：

(1) $z_1 = 3\sqrt{3} + 3i$　(2) $z_2 = \dfrac{1}{1-i}$　(3) $z_3 = -10i$

4 試求下列各值：

(1) $|(2-i)(1+2i)|$　(2) $\left|\dfrac{12-5i}{3+2i}\right|$　(3) $\left|[2(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)]^4\right|$

5 試將下列各複數標準式化為極式：（輻角取主輻角）

(1) $-5+5i$　(2) $3-\sqrt{3}\,i$

雲端教室

6 試求 $z=-\cos 38^\circ - i\sin 38^\circ$ 之主輻角。

7 若 $z_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$，$z_2=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$，試求 $\frac{z_1}{z_2}$。

8 試求 $z=\dfrac{(\cos 88^\circ+i\sin 88^\circ)(\cos 5^\circ+i\sin 5^\circ)}{\cos 33^\circ+i\sin 33^\circ}$ 之值。

進階題

9 已知 $|z+2|=2$ 且 $\operatorname{Arg}(z+2)=300^\circ$，試求 $\left(\frac{z}{1+i}\right)^2$。

10 在極坐標系上，已知 $A(4,50^\circ)$、$B(1,110^\circ)$，試求 $\overline{AB}$ 的長。