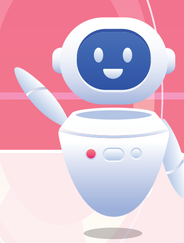
CH 1

三角函數的應用

WHAT'S UP!?

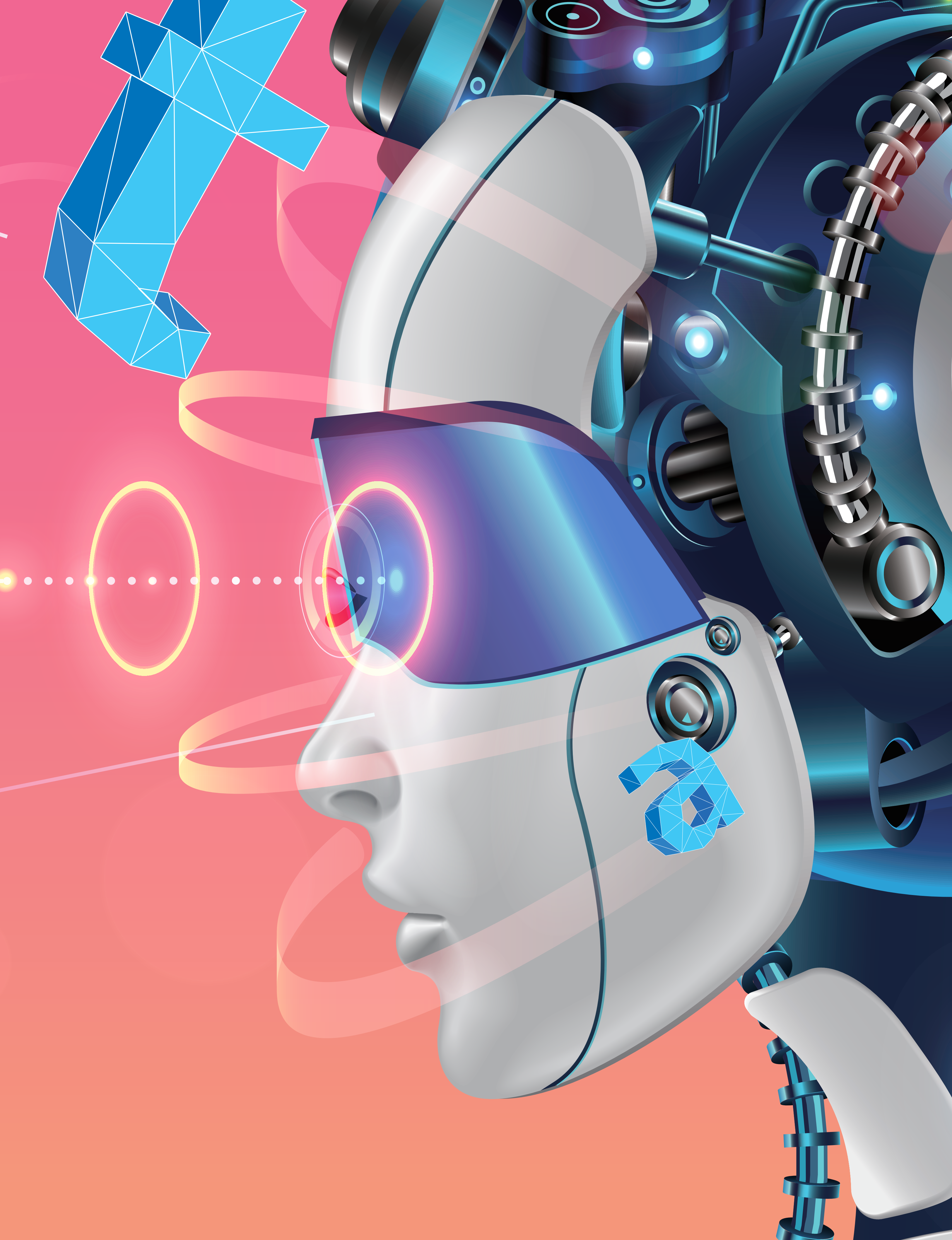


視力 1.0 是什麼意思？

你一定做過視力檢測。檢查表上好幾排的 C，像在跟你惡作劇一樣，轉來轉去，開口有的朝上，有的朝下，不只左右，還有 45 度的斜角。能看見愈小的 C，表示你的視力愈好。不過，你有想過視力 1.0 究竟是什麼概念，能看見多遠、多大的物體嗎？

視力 1.0 的意思是「看見 1 分角的解析度」，視力 0.5 的解析度是 2 分角，視力 0.2 的解析度是 5 分角，倘若是 2.0，就是小到 0.5 分角的解析度。視力愈好，解析度愈好，這可以理解，只是，為什麼是「角度」呢？

《取自數感實驗室／賴以威》



雲端教室

1-1 和差角公式

- **銳角三角函數的定義：**直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，且 $\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，則 $\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$，$\tan A=\dfrac{a}{b}$。
- **三角恆等式：**

(1) 平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。

(2) 商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$。

(3) 餘角關係：$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$，$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$。

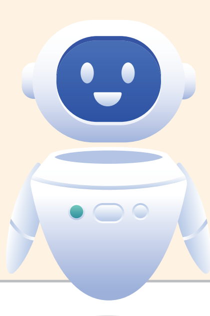
- **任意角三角函數的定義：**在標準位置角 θ 的終邊上任取異於原點的點 $P(x,y)$，$\overline{OP}=r$，則 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$。
- **任意角三角函數值轉換：**

(1) 原函數$\left(\dfrac{\pi}{2}\times\text{偶數}\pm\theta\right)=\pm$ 原函數(θ)。

(2) 原函數$\left(\dfrac{\pi}{2}\times\text{奇數}\pm\theta\right)=\pm$ 餘函數(θ)。

- **負角轉換式：**$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$。
- **正餘弦函數的值域範圍：**$-1\le\sin x\le1$，$-1\le\cos x\le1$。
- **向量內積：**已知 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，且 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$。
- **斜率：**過 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 兩點之直線斜率為 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。（$x_1\ne x_2$）
- **點斜式：**過點 (x_0,y_0) 且斜率 m 的直線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$。
- 若直線的斜角（直線與 x 軸正向所夾的最小正角）為 θ，則其斜率 $m=\tan\theta$。

觀念銜接

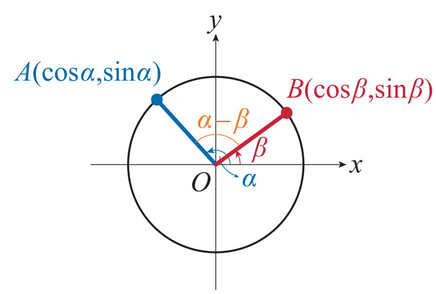


在第一冊我們介紹過三角函數的一些基本概念，本章節將延續其基礎而進一步推導出三角的核心公式——和差角公式。和差角公式可說是三角學的基石，藉由它的輔助讓我們得以從更寬廣的視野來探索三角形，其一系列相關公式的連結也正是本章節所期待的論題。

先想想： 直覺告訴我們等式「$\cos(90^\circ-60^\circ)=\cos 90^\circ-\cos 60^\circ$」不成立（因為答案不同），但數學不能單憑直覺，我們該如何修正此式呢？

甲、和差角公式

我們在以原點 O 為圓心的單位圓上布建兩個標準位置角 α 與 β（設 $\alpha>\beta$），若它們的終邊與單位圓分別交於點 A、B，則依任意角三角函數定義，可以定位 A、B 兩點坐標為 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 與 $B(\cos\beta,\sin\beta)$，如圖 1 所示，



▲ 圖1

此時 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$，而 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的夾角為 $\alpha-\beta$，依向量內積定義，得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

另一方面，利用向量內積的坐標表示，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=(\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta,\sin\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

因此得到 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$（餘弦函數的差角公式）

例如：$\cos(90^\circ-60^\circ)=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，同步驗證 $\cos 90^\circ\cos 60^\circ+\sin 90^\circ\sin 60^\circ$

$=0\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

上述結果是假設 $\alpha>\beta$ 的情況下推演而得的，事實上，當我們作全面性的觀照，由於 $\cos[2n\pi\pm(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha-\beta)$（$n$ 為整數），因此不論 α、β 的大小為何，上述公式依然成立。

利用餘弦函數的差角公式，我們得以將其他公式串連起來。

檢視 $\cos(\alpha+\beta)$，將其視為 $\cos[\alpha-(-\beta)]$，則

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$ （餘弦函數的和角公式）

$\cos(-\theta)=\cos\theta$；$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

例如：$\cos(90^\circ+60^\circ)=\cos 150^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，套用上式，得

$\cos 90^\circ\cos 60^\circ-\sin 90^\circ\sin 60^\circ=0\times\dfrac{1}{2}-1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

接著，藉由上述思維再擴展到正弦函數，以完備和差角公式。

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos[90^\circ-(\alpha+\beta)]$$

餘角關係：$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$

$$=\cos[(90^\circ-\alpha)-\beta]$$

$$=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta+\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta$$

利用餘弦函數的差角公式

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$ （正弦函數的和角公式）

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]$$

$$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

利用正弦函數的和角公式

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$ （正弦函數的差角公式）

公式 **正餘弦函數的和差角公式**（α、β 為任意角）

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

下面我們練習利用正餘弦函數的和差角公式求出 15° 與 75° 的三角函數值。

例 1

試利用和差角公式求出下列各值：

(1) $\cos 15^\circ$　　(2) $\sin 75^\circ$

解 (1) 將 15° 視為 $45^\circ - 30^\circ$，則

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2) 將 75° 視為 $45^\circ + 30^\circ$，則

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$

類題

1. 試利用和差角公式求出下列各值：

(1) $\cos 75^\circ$　　(2) $\sin 15^\circ$　　(3) $\cos 105^\circ$

有了正餘弦函數的和差角公式之後，透過商數關係 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，我們試著推導出正切函數的和差角公式。當 $\tan\alpha$ 、 $\tan\beta$ 及 $\tan(\alpha+\beta)$ 都有意義時，

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

商數關係： $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

分子與分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$ （正切函數的和角公式）

應用上面的結果，將 $\tan(\alpha-\beta)$ 視為 $\tan[\alpha+(-\beta)]$，則

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$ （正切函數的差角公式） $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

例 2 試利用 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 求出 $\tan 75^\circ$ 之值。

解 將 75° 視為 $45^\circ+30^\circ$，則

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$ 分子與分母同乘以 3

$$=\frac{(3+\sqrt{3})^2}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$$ 利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 將分母有理化

$$=\frac{3^2+6\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{9-3}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$$

類題

2. 試利用 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ 求出 $\tan 15^\circ$ 之值。

例 3

試求下列各式之值：

(1) $\sin 15^\circ \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 75^\circ$

(2) $\cos 80^\circ \cos 20^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ$

解 (1) 首先觀察題目中度數的特性

我們發現運用前面所求得的 15° 與 75° 的三角函數值逐一代入

顯然不是好主意，因此逆向思考，利用公式

$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$，得

$\sin 15^\circ \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 75^\circ = \sin(15^\circ + 75^\circ) = \sin 90^\circ = 1$

(2) 80° 與 20° 非特別角，但 $80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ 是特別角

因此我們利用公式

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$，得

$\cos 80^\circ \cos 20^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ = \cos(80^\circ - 20^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

類題

3. 試求下列各式之值：

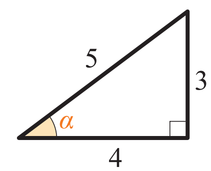
(1) $\sin 95^\circ \cos 40^\circ + \cos 95^\circ \sin 40^\circ$

(2) $\cos 100^\circ \cos 55^\circ + \sin 100^\circ \sin 55^\circ$

例 4 已知 α、β 為銳角，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，試求 $\sin(\alpha+\beta)$ 之值。

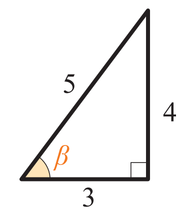
解 依據三角函數的關係

由於 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，如右上圖所示



得 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

而 $\sin\beta=\frac{4}{5}$，如右下圖所示



得 $\cos\beta=\frac{3}{5}$

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$$

$$=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$$

類題

4\. 已知 α、β 為銳角，且 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$，$\cos\beta=\frac{12}{13}$，試求 $\cos(\alpha-\beta)$ 之值。

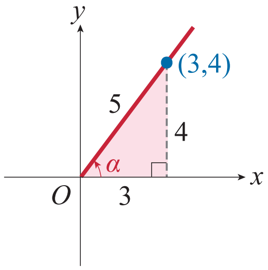
例 **5** 已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，若 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{5}{13}$，試求：

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\cos(\alpha-\beta)$

解 依據任意角三角函數關係

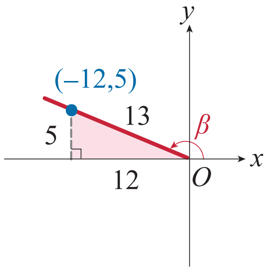
由於 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

如右上圖所示，得 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$



而 $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ 且 $\sin\beta=\dfrac{5}{13}$

如右下圖所示，得 $\cos\beta=-\dfrac{12}{13}$



利用正弦與餘弦函數的和差角公式，得

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=-\frac{33}{65}$$

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=-\frac{16}{65}$$

類題

5. 已知 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 且 $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$，若 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{8}{17}$，試求：

(1) $\sin(\alpha-\beta)$　　(2) $\cos(\alpha+\beta)$

先想想：在沒有計算機的時代，所有的三角函數值只能徒手計算。
同學能否想想，若 α 、 β 角度相等，則其和角公式為何？

乙、二倍角公式

我們稱 2θ 為 θ 的二倍角，在和角公式中，如果取 $\alpha=\beta=\theta$ ，則可導出二倍角公式。

1. $\sin 2\theta=\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$

2. $\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$$=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=2\cos^2\theta-1 \quad \boxed{\sin^2\theta=1-\cos^2\theta}$$

$$=2(1-\sin^2\theta)-1=1-2\sin^2\theta \quad \boxed{\cos^2\theta=1-\sin^2\theta}$$

3. $\tan 2\theta=\tan(\theta+\theta)=\dfrac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ （ $\tan^2\theta\neq 1$ ）

公式　二倍角公式

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

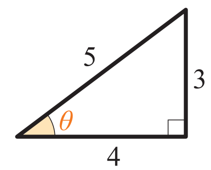
$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \quad （\tan^2\theta\neq 1）$$

例 6 已知 θ 為銳角且 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，試求 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 及 $\tan 2\theta$ 之值。

解 依據三角函數關係

因為 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，如圖所示



得 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{24}{7}$$

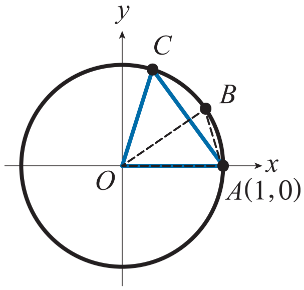
類題

6. 已知 θ 為銳角且 $\cos\theta=\dfrac{12}{13}$，試求 $\sin 2\theta$ 和 $\cos 2\theta$ 之值。

素養抱抱

圖表素養題——三角形面積

坐標平面上，以原點 O 為圓心的圓上有三個相異點 $A(1,0)$、B、C，且 $\overline{AB}=\overline{BC}$，如圖所示。已知銳角三角形 OAB 面積為 $\frac{3}{10}$，試求 $\triangle OAC$ 面積。



解　由 $\overline{AB}=\overline{BC}$，得 $\angle AOB=\angle BOC=\theta$

又 $\triangle OAB$ 的面積 $=\frac{3}{10}=\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\theta$

得 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

依據三角函數關係，得 $\cos\theta=\frac{4}{5}$

故 $\triangle OAC$ 面積 $=\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin 2\theta=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$

例 7　已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，試求 $\sin 2\theta$ 之值。

解

由 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

兩邊平方 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

展開得 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{5}{4}$

即 $1+\sin 2\theta=\dfrac{5}{4}$

所以 $\sin 2\theta=\dfrac{5}{4}-1=\dfrac{1}{4}$

類題

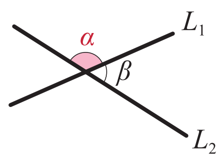
7. 已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，試求 $\sin 2\theta$ 之值。

數學是一場不斷求知的活動，我們藉由三角公式並結合直線方程式的基礎，鋪陳出下面的概念。

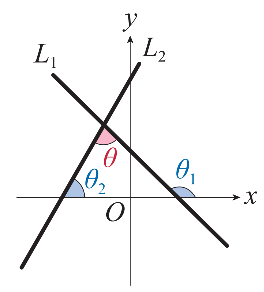
丙、兩直線夾角

當兩直線 L_1 與 L_2 相交時，其交角會形成兩雙對頂角，如圖 2 所示，因為 α 與 β 互補，所以只要求出其中一個夾角 α ，就可利用 $180^\circ-\alpha$ 得到另一個夾角 β 。

在圖 3 中，設 L_1 與 L_2 皆非鉛直線，且斜角分別為 θ_1 與 θ_2 ，則其斜率 $m_1=\tan\theta_1$ ， $m_2=\tan\theta_2$ 。利用三角形的外角性質得知 $\theta_1=\theta+\theta_2$ ，亦即 $\theta=\theta_1-\theta_2$ ，則 $\tan\theta=\tan\left(\theta_1-\theta_2\right)=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$



▲ 圖2



▲ 圖3

因此演繹出以下的性質：

性質　兩直線夾角

設兩非鉛直線 L_1 、 L_2 之斜率分別為 m_1 與 m_2 （ $m_1m_2\neq-1$ ），若 L_1 與 L_2 之夾角為 θ ，則 $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ ，此時另一夾角為 $180^\circ-\theta$

補充說明：若 $m_1m_2=-1$ ，表示 $L_1\perp L_2$ ，則其夾角 $\theta=90^\circ$ 。

例 8

光的反射遵守反射定律，其入射角等於反射角。假設光束入射時沿直線 L_1：$3x+y+15=0$ 方向前進，而反射方向為 L_2：$2x-y+7=0$，試求此兩直線之夾角。

解 設 L_1 與 L_2 之夾角為 θ

L_1：$3x+y+15=0$ 之斜率 $m_1=-3$

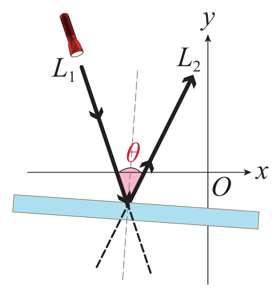
L_2：$2x-y+7=0$ 之斜率 $m_2=2$

直線 $ax+by+c=0$ 之斜率為 $-\frac{a}{b}$

則 $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\dfrac{-3-2}{1+(-3)\times 2}=\dfrac{-5}{-5}=1$

所以 $\theta=45^\circ$，即 L_1 與 L_2 之夾角為 45°

另一夾角為 $180^\circ-45^\circ=135^\circ$

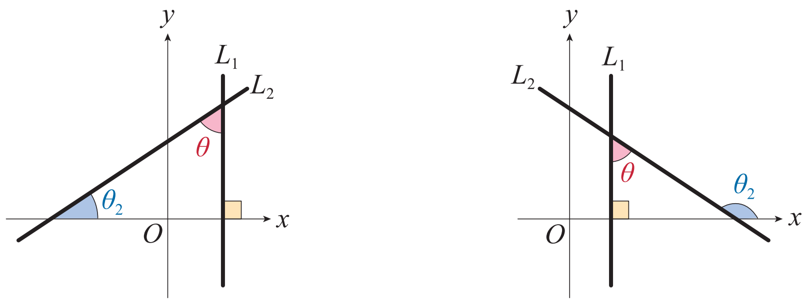


類題

8. 試求兩直線 L_1：$\sqrt{3}x-y+5=0$ 與 L_2：$\sqrt{3}x+y-11=0$ 之夾角。

在兩直線 L_1 與 L_2 中有任一條為鉛直線的狀況下，由於鉛直線之斜率不存在，無法使用上述性質，因此需藉由觀察圖形來求出兩直線夾角。

設 L_1 為鉛直線，且 L_2 之斜角為 θ_2，如圖 4 所示，不論 L_2 之斜率為正或負，皆可推得 L_1 與 L_2 之夾角 $\theta=\left|90^\circ-\theta_2\right|$，而另一夾角為 $180^\circ-\theta$。



▲ 圖4

實際解題時，透過圖形輔助即可求得 L_1 與 L_2 之夾角，下面我們來看一個例題。

例 9 **試求 L_1：$x-3=0$ 與 L_2：$x-\sqrt{3}y+7=0$ 之夾角。**

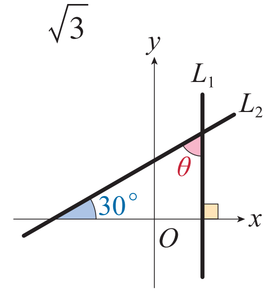
解 L_1：$x-3=0$ 垂直 x 軸，斜率不存在

L_2：$x-\sqrt{3}y+7=0$ 之斜率為 $-\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，又 $\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

所以 L_2 之斜角為 30°

直線斜率為 $\tan\alpha$，則其斜角為 α

如圖所示



L_1 與 L_2 之夾角為 $90^\circ-30^\circ=60^\circ$

另一夾角為 $180^\circ-60^\circ=120^\circ$

補充說明：若直線的斜角非特別角，則利用計算機上的 

鍵，即可由三角函數值反求出相應的角度

類題

9. 試求 L_1：$2x+5=0$ 與 L_2：$3x+3y-10=0$ 之夾角。

丁、正餘弦函數的疊合

生活中有許多波動現象，例如：湖水中擴散的漣漪、發聲體震動產生聲波、家用電器使用的交流電…等，而正弦波是一種最簡單的波形，生活周遭的許多訊號皆為不同頻率、不同強度的正弦波所疊合而成。

先想想： 假設某個聲音的波形函數為 $f(x)=\sin x+\cos x$，你能找出這個音色的高低值嗎？

我們先觀察一個利用和角公式展開的式子：

$$\sin(x+30^\circ)=\sin x\cos 30^\circ+\cos x\sin 30^\circ=\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\times\frac{1}{2}$$

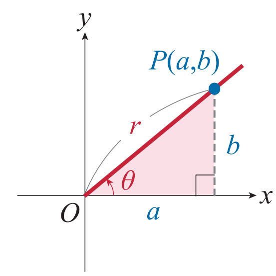
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

若將上式逆向，則可發現 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ 可表成 $\sin(x+30^\circ)$，因此，當我們遇到正弦與餘弦函數的疊合（形如 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ ）時，可利用和角公式將其改寫為正弦函數的形式（如 $f(x)=r\sin(x+\theta)$ ），藉此了解其圖形的樣貌與極值。

性質　正餘弦函數的疊合

函數 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 可以表為 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，其最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$，最小值為 $-\sqrt{a^2+b^2}$

【說明】如圖 5 所示，設標準位置角 θ 終邊上一點 $P(a,b)$



▲ 圖5

則 $\overline{OP}=r=\sqrt{a^2+b^2}$

由任意角三角函數定義知 $\sin\theta=\dfrac{b}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$

即 $b=r\sin\theta$，$a=r\cos\theta$

則 $f(x)=a\sin x+b\cos x=r\cos\theta\sin x+r\sin\theta\cos x$

$=r(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)$

$=r\sin(x+\theta)$ 利用正弦函數的和角公式

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$

又 $-1\le\sin(x+\theta)\le 1$ $y=\sin x$ 的值域為 $-1\le\sin x\le 1$

所以 $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$

例 10

試求 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 之最大值與最小值，並利用數學繪圖軟體驗證答案。

解 ① **方法一：**

我們先將 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 化成 $r\sin(x+\theta)$ 的形式

其中 $r>0$，且 $0\le\theta<2\pi$，因為 $\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$，則

$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$ 提出 2，製造出 $\dfrac{1}{2}=\cos 60^\circ$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ$ 的效果

$=2(\cos 60^\circ\sin x+\sin 60^\circ\cos x)$

$=2\sin(x+60^\circ)$

又 $-1\le\sin(x+60^\circ)\le 1$，則 $-2\le 2\sin(x+60^\circ)\le 2$

故 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 之最大值為 2，最小值為 -2

方法二：

因為 $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$

得 $-\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} \le \sin x + \sqrt{3}\cos x \le \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$

即 $-2 \le \sin x + \sqrt{3}\cos x \le 2$

故 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 之最大值為 2

最小值為 -2

② 我們利用繪圖軟體 Desmos 來示範：

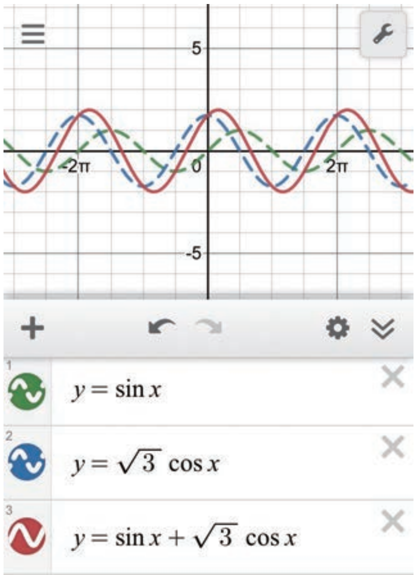
首先開啟 APP 後

在指令列 1 輸入「$y=\sin x$」

指令列 2 輸入「$y=\sqrt{3}\cos x$」

指令列 3 輸入「$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$」

即在繪圖區出現如附圖之三個圖示

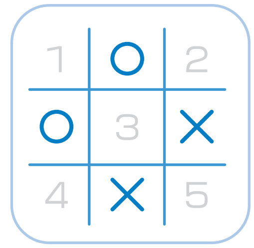


藉此看出 $y=\sin x$（綠色虛線），$y=\sqrt{3}\cos x$（藍色虛線）與兩者疊合後（紅色曲線）之直觀對照。

類題

10. 試求 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ 之最大值與最小值，並利用數學繪圖軟體驗證答案。

觀念九宮格



試判斷下列各題之對錯，並在右圖九宮格中相應的題號位置，正確的畫「○」，錯誤的畫「×」，看能否連成一線。

☐ (1) $\sin(10^\circ+20^\circ)=\sin 10^\circ+\sin 20^\circ=\sin 30^\circ$。

☐ (2) $\cos 30^\circ=\cos 40^\circ\cos 10^\circ+\sin 40^\circ\sin 10^\circ$。

☐ (3) $\sin 2\theta=2\sin\theta$。

☐ (4) $\sin 80^\circ\cos 80^\circ<\sin 70^\circ\cos 70^\circ$。

☐ (5) 因$-1\le\sin\theta\le 1$且$-1\le\cos\theta\le 1$，則$-2\le\sin\theta+\cos\theta\le 2$。

習題 1-1

雲端教室

基礎題

1 為紀念畢達哥拉斯，希臘在 1955 年發行了一張郵票，如圖所示，中間的三角形是邊長比為 3：4：5 的直角三角形，而旁邊的三個正方形則是依照直角三角形的三邊長所延伸而得，試求圖中 $\sin(\alpha+\beta)$ 之值。

2 試求 $\dfrac{\tan 50^\circ+\tan 10^\circ}{1-\tan 50^\circ\tan 10^\circ}$ 之值。

3 設 $\tan\alpha$ 、 $\tan\beta$ 是 $x^2-3x+2=0$ 之兩根，試求 $\tan(\alpha+\beta)$ 之值。

4 試求 $\cos 57^\circ\cos 12^\circ+\sin 57^\circ\sin 12^\circ$ 之值。

5 若 $0^\circ<\alpha<90^\circ<\beta<180^\circ$ ，且 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ ， $\sin\beta=\dfrac{12}{13}$ ，試求：

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\cos(\alpha-\beta)$

6 已知 θ 為銳角且 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，試求 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 及 $\tan 2\theta$ 之值。

7 已知 θ 為銳角且 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，試求 $\sin 2\theta$ 之值。

8 設兩直線 L_1：$x+y+5=0$ 與 L_2：$3x-y+19=0$ 之夾角為 θ，試求 $\sin\theta$ 之值。

進階題

9 試求 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-4\cos x$ 之最大值與最小值。

10 某休閒農莊的景觀造景中有一個供遊客觀察水中生態的圓形池塘，已知其半徑為 6 公尺，如圖所示，若今欲建造對稱於圓心的工形木橋，則此木橋總長度最長為多少公尺？