高一升高二
暑假作業

班級：

學號：

姓名：

學習導航

雲端
教室

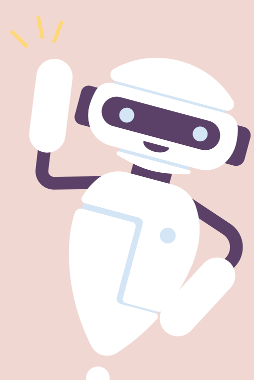
1 坐標系與函數圖形

坐標系與
函數圖形

實數與
絕對值

實數 —— 根式 —— 算幾不等式 P.7

絕對值 —— 絕對值不等式 P.8



1-1

實數與絕對值

趨勢分析

本單元是坐標幾何的基礎，歷年的命題率都偏低，但是之後的單元都需要這些基本公式，不可輕忽，像是「二次函數的極值」、「一元二次不等式」就會常常出現。

焦點主題 1 實數（有理數、無理數）、根式

數線上的點坐標就是實數，而實數（$\mathbb{R}$）可以分成有理數、無理數。

(1) 可以寫成整數比值的實數稱為「有理數」。像是整數（如：$4=\dfrac{4}{1}$），有限小數（如：$0.5=\dfrac{1}{2}$）、循環小數（如：$6.\overline{7}=6\dfrac{7}{9}$）可以寫成分數，都是有理數。

小提醒 有理數形如$\dfrac{a}{b}$，其中 a、b 為整數且 $b\neq 0$。

(2) 無法寫成整數比值的實數稱為「無理數」。像是不循環的無限小數（如：$\pi=3.1415\cdots$）、開不盡的根號（如：$\sqrt{2}=1.4142\cdots$）無法寫成分數，都是無理數。

(3) 若實數 b 滿足 $b^2=a$，則 b 稱為「a 的平方根（二次方根）」。每一正數 a 都有兩個平方根（一正一負），記作 $\pm\sqrt{a}$。**例** 9 的平方根是 ± 3，而$\sqrt{9}=3$。

(4) 若 a、$b\geq 0$，則$\sqrt{a^2}=a$，$\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$。**例** $\sqrt{10^2}=10$，$\sqrt{10^2\times 3}=10\sqrt{3}$。

觀念是非題 （　）1. $\sqrt{5^2}+\sqrt{(-6)^2}+\left(\sqrt{7}\right)^2=5+(-6)+7=6$。

範例 1 老師講解 學生練習

化簡根式：(1)$\sqrt{36}$　(2)$\sqrt{12}$。

化簡根式：(1)$\sqrt{49}$　(2)$\sqrt{45}$。

C

1

焦點主題 2 根式的運算（加、減）

同類根式可加減合併（如：$3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=(3+5)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$），不同類則否。

小提醒 $\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{2}$ 不同類，所以 $\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$ 無法合併。

範例 2　老師講解　學生練習

化簡 $5\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$。

化簡 $4\sqrt{6}+9\sqrt{7}+3\sqrt{6}-\sqrt{7}$。

焦點主題 3 根式的運算（乘、除）

若 a、$b>0$，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2=a$、$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。

範例 3　老師講解　學生練習

試求下列的值：
(1) $\sqrt{3}\times\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$　(2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$。

解題小技巧
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

試求下列的值：
(1) $\sqrt{5}\times(\sqrt{5}+4\sqrt{3})$　(2) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$。

解題小技巧
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

焦點主題 4 根式的運算（有理化）

當分數的分母有根式時，把分母化成有理數的過程稱為「有理化分母」。

例 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$。

小提醒 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

觀念是非題 （　）2. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$。

範例 4

老師講解

化簡下列分數（有理化分母）：

(1) $\dfrac{15}{\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (3) $\dfrac{4}{\sqrt{11}-3}$。

學生練習

化簡下列分數（有理化分母）：

(1) $\dfrac{14}{\sqrt{7}}$ (2) $\dfrac{30}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$ (3) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$。

焦點主題 5　算幾不等式

若 a、b 均為正實數，則 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$，即 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$，等號成立必須 $a=b$。

小提醒　$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \;\Rightarrow\; a+b \geq 2\sqrt{ab}$。

觀念是非題　(　) 3. 對於任意實數 a、b，$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 恆成立。

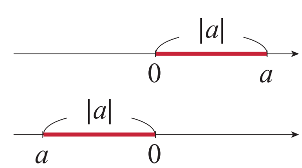
範例 5　老師講解　　學生練習

設兩正數 a、b 滿足 $2a+3b=12$，試求 ab 的最大值。

設 a、$b>0$，若 $a+2b=8$，試求 ab 的最大值。

焦點主題 6　絕對值

(1) 數線上，點 a 到原點（0）的距離稱為「a 的絕對值」，記作 $|a|$。



(2) 實數 a 的絕對值 $|a| = \begin{cases} a，當\ a \geq 0 \\ -a，當\ a<0 \end{cases}$。**例** $|2|=2$，$|-3|=3$。

(3) 數線上，兩點 a、b 的距離為 $|a-b|=|b-a|$。

(4) 絕對值方程式：設 k 為正數，若 $|x|=k$，則 $x=\pm k$。

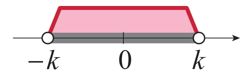
範例 6　老師講解　　學生練習

已知絕對值 $|4x-1|=7$，試求 x 之值。

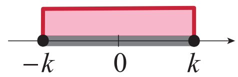
已知絕對值 $|2x+3|=5$，試求 x 之值。

焦點主題 7 絕對值不等式（I）

設 k 為正數，若 $|x| < k$，則 $-k < x < k$。



小提醒 $|x| \le k \Leftrightarrow -k \le x \le k$。



觀念是非題 （ ）4. 若 $|x| < -2$，則 $-2 < x < 2$。

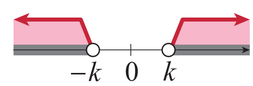
範例 7 | 老師講解 | 學生練習

解不等式 $|x-7| < 3$。

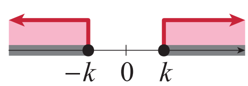
解不等式 $|x+5| < 4$。

焦點主題 8 絕對值不等式（II）

設 k 為正數，若 $|x| > k$，則 $x > k$ 或 $x < -k$。



小提醒 $|x| \ge k \Leftrightarrow x \ge k$ 或 $x \le -k$。



觀念是非題 （ ）5. 不等式 $|x-1| > 3$ 與 $|1-x| > 3$ 的解是相同的。

範例 8 | 老師講解 | 學生練習

解不等式 $|5x+4| > 11$。

解不等式 $|2x-5| > 13$。

1-2 直角坐標系

焦點主題 9 直角坐標距離公式

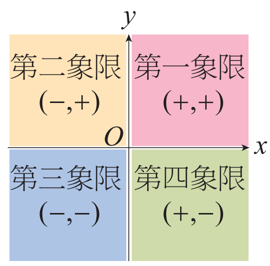
(1) 直角坐標平面上的 x、y 軸把平面分成四個區域，每一個區域稱為「象限」。

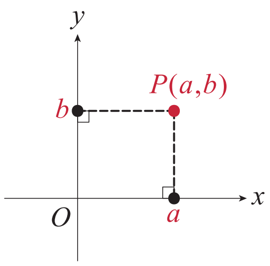
(2) 當坐標平面上有一點 P，自 P 點分別對 x、y 軸作垂線，且交 x、y 軸的點所對應的數分別為 a、b，則以 (a, b) 表示 P 點的坐標，記為 $P(a, b)$，其中 a 為 P 點的 x 坐標，b 為 P 點的 y 坐標。

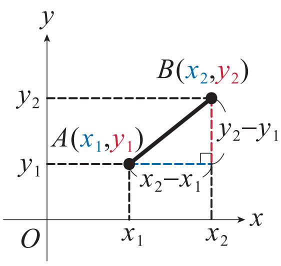
(3) 兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_1, y_2)$ 在同一鉛垂線上，$\overline{AB} = |y_2 - y_1|$。

(4) 兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_1)$ 在同一水平線上，$\overline{AB} = |x_2 - x_1|$。

(5) 兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 之間的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$。







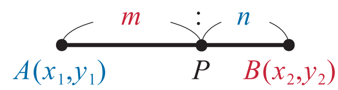
觀念是非題　(　　) 1. 兩點 $P(4, 2)$、$Q(3, 3)$ 到原點的距離相等。

範例 9	老師講解	學生練習
	坐標平面上有一圓的圓心為 $Q(5, 1)$，而圓通過點 $P(17, 6)$，試求此圓的直徑長。	坐標平面上有兩點 $A(3, 2)$、$B(11, 8)$，試求 A、B 之間的距離。

焦點主題 10　直角坐標（分點公式）

坐標平面上有兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，若點 P 在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，

則 $P\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$，即 $P=\dfrac{nA+mB}{m+n}$。



小提醒　分子為交叉相乘的和。

範例 10　老師講解

坐標平面上有兩點 $A(1, 17)$、$B(9, 1)$，且 P 點在 $\overline{AB}$ 上，若 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:5$，試求 P 點坐標。

學生練習

坐標平面上有兩點 $A(3, 20)$、$B(15, 2)$，且 P 點在 $\overline{AB}$ 上，若 $\overline{AP}:\overline{PB}=5:1$，試求 P 點坐標。

焦點主題 11　直角坐標（中點公式）

坐標平面上有兩點 A、B，則線段 $\overline{AB}$ 的中點 $M=\dfrac{A+B}{2}$。

範例 11　老師講解

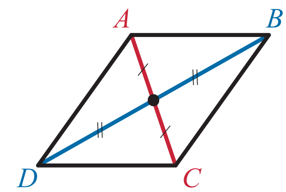
坐標平面上有一圓的直徑兩端點為 $A(7, 3)$、$B(5, 13)$，試求此圓的圓心坐標。

學生練習

坐標平面上有兩點 $A(1, 17)$、$B(9, 1)$，試求線段 $\overline{AB}$ 的中點坐標。

焦點主題 12　直角坐標（平行四邊形的頂點）

坐標平面上有平行四邊形 $ABCD$，頂點關係為 $A+C=B+D$。



小提醒　對角線互相平分，中點重合：$\dfrac{A+C}{2}=\dfrac{B+D}{2}$。

範例 12

老師講解

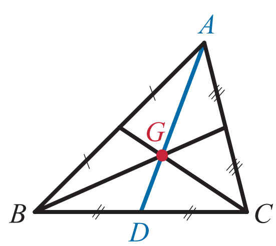
平行四邊形 $ABCD$ 中，若 A、B、C 三點的坐標分別為 $(1,13)$、$(6,4)$、$(10,1)$，試求 D 點坐標。

學生練習

平行四邊形 $ABCD$ 中，若 A、B、C 三點的坐標分別為 $(2,1)$、$(8,5)$、$(6,15)$，試求 D 點坐標。

焦點主題 13　直角坐標（三角形的重心）

三角形的三條中線交點為重心，在坐標平面上的△ ABC 之重心為 $G=\dfrac{A+B+C}{3}$。



小提醒　$\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$。

範例 13

老師講解

三角形三頂點的坐標分別為 $A(2,4)$、$B(0,2)$、$C(7,0)$，試求三角形的重心坐標。

學生練習

坐標平面上有三點 $A(1,13)$、$B(6,4)$、$C(5,1)$，試求△ ABC 的重心坐標。

1-3

函數及其圖形

焦點主題 14 函數的意義

(1) 設 x、y 是兩個變數，當 x 的值給定時，y 的值依照某種規則而唯一確定，則此種對應關係稱為「y 是 x 的函數」。如果將這個函數命名為 f，則可以記作 $y=f(x)$，而 $f(x)$ 在 $x=a$ 的函數值為 $f(a)$。

小提醒 如果把對應的函數命名為 g，則記作 $y=g(x)$。

(2) 設函數 $y=f(x)$，則 x 的有效範圍稱為「定義域」，函數值 y 的範圍稱為「值域」。

觀念是非題 （　）1. 設 $f(x)=2x^2+ax+5$，若 $f(1)=9$，則 $a=2$。

範例 14

老師講解

若 $f(x)=\begin{cases}4x+1, & x\geq 0\\ |x-1|, & x<0\end{cases}$，試求 $f(3)$、$f(-3)$ 的值。

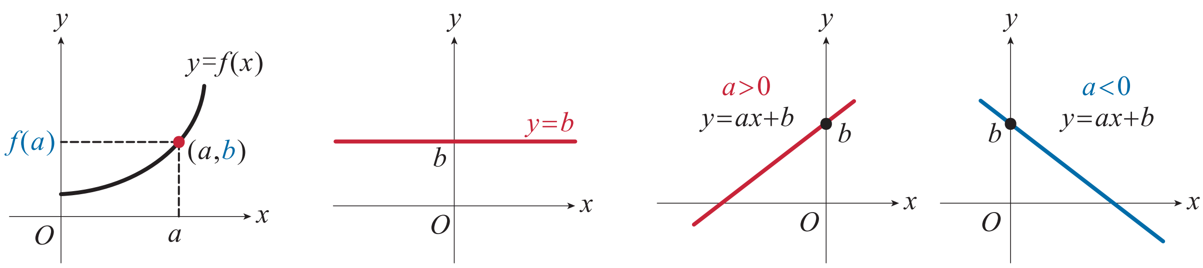
學生練習

若 $f(x)=\begin{cases}x^2+3, & x\geq 2\\ 7, & x<2\end{cases}$，試求 $f(4)$、$f(0)$ 的值。

焦點主題 15　線型函數（常數與一次函數）

(1) 坐標平面滿足函數 $y=f(x)$ 的所有點坐標 (x,y) 所形成的圖形，就是函數 f 的圖形。
(2) 若函數 f 的圖形通過點 (a,b)，則 $f(a)=b$。
(3) 形如 $y=b$ 或 $f(x)=b$（常數）的函數稱為「常數函數」，圖形是水平直線。
(4) 設 $a\neq 0$，形如 $y=ax+b$ 或 $f(x)=ax+b$ 的函數稱為「一次函數」，圖形是斜直線。當 $a>0$ 時，圖形由左往右上升；當 $a<0$ 時，圖形由左往右下降。

小提醒
函數 $y=ax+b$ 就是直線的斜截式，其中 a 為斜率，b 為 y 截距。
① 當 $a>0$，圖形由左往右上升；當 $a<0$，圖形由左往右下降。
② 當 $b>0$，圖形通過 y 軸的正向；當 $b<0$，圖形通過 y 軸的負向。



觀念是非題　(　　) 2. 若函數圖形為一直線，則此函數為一次函數。

範例 15　老師講解　　　　學生練習

若 $y=f(x)$ 的函數圖形是一通過 $(1,1)$、$(2,3)$ 兩點的直線，試求 $f(-1)$。

若 $f(x)=ax+b$ 且 $f(0)=-2$，$f(2)=4$，試求 $f(3)$。

焦點主題 16 二次函數

(1) 設 $a \neq 0$，形如 $y = ax^2 + bx + c$ 或 $y = a(x-h)^2 + k$ 的函數稱為「二次函數」，圖形為拋物線。當 $a > 0$ 時，圖形開口向上，有最低點；當 $a < 0$ 時，圖形開口向下，有最高點。

小提醒　二次函數圖形的最低點、最高點就是拋物線的頂點。且 $|a|$ 的值愈大，開口愈小。

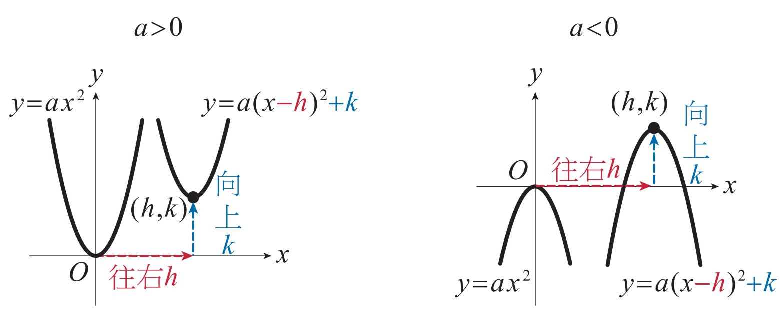
(2) 二次函數 $y = ax^2$ 的圖形頂點在原點 $(0, 0)$，其對稱軸為 y 軸。

(3) 二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ 的頂點坐標為 (h, k)，其對稱軸為 $x = h$。

(4) 若 h、$k > 0$，二次函數 $y = ax^2$ 與 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形關係如下：

小提醒　兩個二次函數的 x^2 項係數相等，則其圖形形狀相同，只是位置不同。

$y = ax^2$ 的圖形 → 往右平移 $\boxed{h}$ 單位 → $y = a(x - \boxed{h})^2$ 的圖形 → 向上平移 $\boxed{k}$ 單位 → $y = a(x-h)^2 + \boxed{k}$ 的圖形



觀念是非題　(　　) 3. 將 $y = 3x^2$ 的圖形向右平移 1 單位，再向上平移 2 單位後，恰與 $y = 3(x+1)^2 + 2$ 的圖形重合。

範例 16　老師講解　　　　學生練習

試填寫下列表格：

	二次函數	頂點坐標
(1)	$y = 4x^2$	
(2)	$y = -6(x-1)^2 + 5$	

試填寫下列表格：

	二次函數	頂點坐標
(1)	$y = -3x^2$	
(2)	$y = 2(x-3)^2 + 4$	

焦點主題 17　二次函數的頂點與配方

二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

小提醒

配方 $ax^2+bx+c=a\left[x^2+2\times\dfrac{b}{2a}\times x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right]+c-\dfrac{b^2}{4a}=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

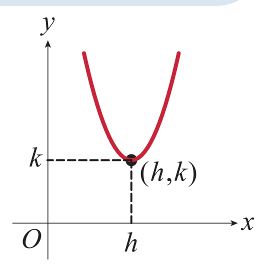
範例 17　老師講解　　　　學生練習

老師講解：利用配方法，把 $y=3x^2+24x+50$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並求其頂點坐標。

學生練習：利用配方法，把 $y=2x^2-4x+5$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並求其頂點坐標。

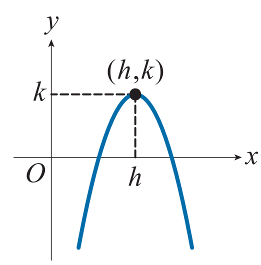
焦點主題 18　二次函數的極值

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的極值（最大值或最小值）會發生在頂點處。



(1) 當 $a>0$ 時，函數 f 有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，此時 $x=-\dfrac{b}{2a}$。

(2) 當 $a<0$ 時，函數 f 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，此時 $x=-\dfrac{b}{2a}$。



小提醒

極值就是頂點的 y 坐標，如果頂點是 (h,k)，則極值就是 k。

範例 18　老師講解　　　　學生練習

老師講解：試求函數 $y=-2x^2+3x+4$ 的最大值。

學生練習：試求函數 $y=5x^2+4x+1$ 的最小值。

1-3　邁向統測之路

二次函數的圖形判斷係數之正負

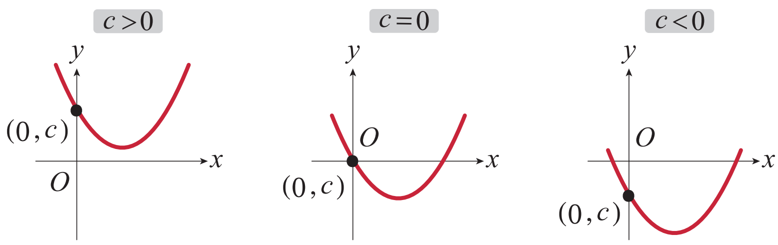
已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為拋物線，

(1) 若圖形開口向上，則 $a>0$；若開口向下，則 $a<0$。

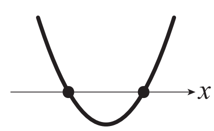
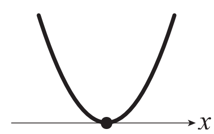
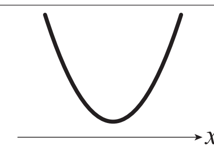
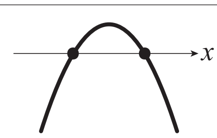
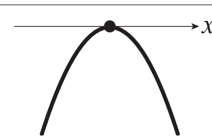
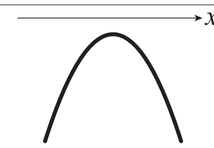
(2) 圖形頂點 x 坐標的位置，可知 $-\dfrac{b}{2a}$ 的正負，進而判斷 b 的正負。

(3) 圖形與 y 軸的交點坐標為 $(0,c)$，則交點在

① y 軸正向 $\Leftrightarrow$ $c>0$　② 原點 $\Leftrightarrow$ $c=0$　③ y 軸負向 $\Leftrightarrow$ $c<0$。



(4) 令 $D=b^2-4ac$，則 D 的正負、圖形與 x 軸的交點數之關係如下：

	$D=b^2-4ac>0$	$D=b^2-4ac=0$	$D=b^2-4ac<0$
與 x 軸的交點個數	2 個	1 個	0 個
$a>0$			
$a<0$			

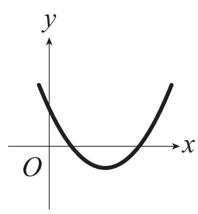
老師講解	學生練習

老師講解

若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下，判斷下列各數的正負：

(1) a　(2) b

(3) c　(4) b^2-4ac。

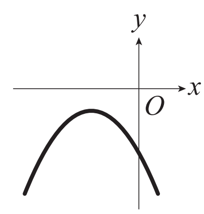


學生練習

若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下，判斷下列各數的正負：

(1) a　(2) b

(3) c　(4) b^2-4ac。



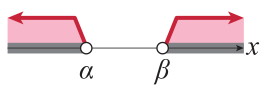
1-4

一元二次不等式

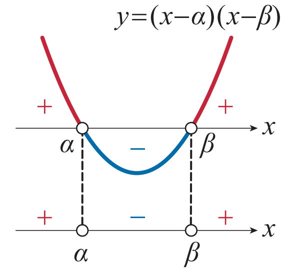
焦點主題 19　一元二次不等式（I）

設 α、β 為相異實數，則方程式 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 有兩相異實根 α、β（$\alpha<\beta$）。

(1) 不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 的解：$x<\alpha$ 或 $x>\beta$。



(2) 不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 的解：$\alpha<x<\beta$。



小提醒　當不等式的不等號為 ≥ 或 ≤ 時，圖解的空心圓圈○改成實心圓圈●。

觀念是非題　（　）1. 不等式 $(x-3)(x-8)<0$ 的解為 $3<x<8$。

範例 19　老師講解　　學生練習

試解下列的不等式：

(1) $(x-1)(x+5)>0$　(2) $(x-1)(x+5)<0$。

試解下列的不等式：

(1) $(x+2)(x-7)>0$　(2) $(x+2)(x-7)<0$。

焦點主題 20　一元二次不等式（II）

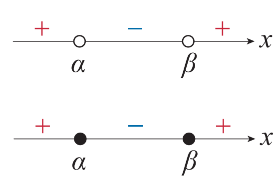
當 $A>0$ 時，若 Ax^2+Bx+C 可因式分解成 $A(x-\alpha)(x-\beta)$ 且 $\alpha<\beta$，則

(1) $Ax^2+Bx+C>0$　⇔　$A(x-\alpha)(x-\beta)>0$　⇔　$x<\alpha$ 或 $x>\beta$。

(2) $Ax^2+Bx+C<0$　⇔　$A(x-\alpha)(x-\beta)<0$　⇔　$\alpha<x<\beta$。

(3) $Ax^2+Bx+C\geq 0$　⇔　$A(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$　⇔　$x\leq\alpha$ 或 $x\geq\beta$。

(4) $Ax^2+Bx+C\leq 0$　⇔　$A(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$　⇔　$\alpha\leq x\leq\beta$。



範例 20　老師講解　　學生練習

老師講解：

試解下列的不等式：

(1) $x^2+4x+3\geq 0$　(2) $x^2+4x+3\leq 0$。

學生練習：

試解下列的不等式：

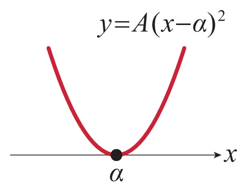
(1) $x^2+7x+10\geq 0$　(2) $x^2+7x+10\leq 0$。

焦點主題 21　一元二次不等式（III）

當 $A>0$ 時，若 Ax^2+Bx+C 可因式分解成 $A(x-\alpha)^2$，而 $A(x-\alpha)^2$ 恆正或零，則

(1) $Ax^2+Bx+C\geq 0 \Leftrightarrow A(x-\alpha)^2\geq 0$：解為任意實數。

(2) $Ax^2+Bx+C>0 \Leftrightarrow A(x-\alpha)^2>0$：解為 $x\neq\alpha$ 的任意實數。



觀念是非題　(　　) 2. 不等式 $5x^2\geq 0$ 與 $5(x-1)^2\geq 0$ 的解並不相同。

範例 21　老師講解　　學生練習

老師講解：

試解下列的不等式：

(1) $x^2-14x+49\geq 0$

(2) $x^2-14x+49>0$。

學生練習：

試解下列的不等式：

(1) $x^2-10x+25\geq 0$

(2) $x^2-10x+25>0$。

C

1

焦點主題 22　一元二次不等式（IV）

當 $A>0$ 時，若 Ax^2+Bx+C 可因式分解成 $A(x-\alpha)^2$，而 $A(x-\alpha)^2$ 恆正或零，則

(1) $Ax^2+Bx+C\le 0 \iff A(x-\alpha)^2\le 0 \iff (x-\alpha)^2=0$：解為 $x=\alpha$。

(2) $Ax^2+Bx+C<0 \iff A(x-\alpha)^2<0$：無實數解。

範例 22　老師講解　學生練習

老師講解

試解下列的不等式：

(1)$x^2+12x+36\le 0$

(2)$x^2+12x+36<0$。

學生練習

試解下列的不等式：

(1)$x^2+16x+64\le 0$

(2)$x^2+16x+64<0$。

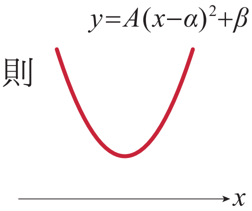
焦點主題 23　一元二次不等式（V）

當 $A>0$ 時，若 Ax^2+Bx+C 無法因式分解（此時 $B^2-4AC<0$），

則可將 Ax^2+Bx+C 配方成 $A(x-\alpha)^2+\beta$（β 為正數），而 $A(x-\alpha)^2+\beta$ 恆正，則

(1) $Ax^2+Bx+C>0$ 或 $Ax^2+Bx+C\ge 0$ 的解：任意實數。

(2) $Ax^2+Bx+C<0$ 或 $Ax^2+Bx+C\le 0$ 的解：無實數解。



範例 23　老師講解　學生練習

老師講解

試解下列的不等式：

(1)$x^2-4x+7>0$　(2)$x^2-4x+7<0$。

學生練習

試解下列的不等式：

(1)$x^2-6x+11>0$　(2)$x^2-6x+11<0$。

統測常考題

範例 1 反求一元二次不等式

設 a、b 均為實數，若不等式 $ax^2+3x+b\geq 0$ 的解為 $-\frac{1}{2}\leq x\leq 5$，則 $3a+6b=$
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。 [統測]

解題小技巧

(1) 設 $\alpha<\beta$，則
① $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$。
② $(x-\alpha)(x-\beta)>0 \Rightarrow x<\alpha$ 或 $x>\beta$。
(2) 設 $A>0$、$B<0$，則
① $f(x)>0 \Rightarrow Af(x)>0$，$Bf(x)<0$。
② $f(x)<0 \Rightarrow Af(x)<0$，$Bf(x)>0$。

解：$-\frac{1}{2}\leq x\leq 5 \Rightarrow \left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right](x-5)\leq 0 \overset{\times 2}{\Rightarrow} (2x+1)(x-5)\leq 0$

$\Rightarrow 2x^2-9x-5\leq 0 \overset{\div(-3)}{\Rightarrow} -\frac{2}{3}x^2+3x+\frac{5}{3}\geq 0$

與 $ax^2+3x+b\geq 0$ 比較係數，得 $a=-\frac{2}{3}$，$b=\frac{5}{3}$

因此 $3a+6b=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)+6\times\frac{5}{3}=8$

類題 1 設 a 和 b 均為實數，若不等式 $ax^2+bx-5<0$ 的解為 $-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$，則 $a+b=$ ？__________

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{7}{3}$ (C) 5 (D) 7。 [統測]

類題 2 若一元二次不等式 $ax^2+bx-6\geq 0$ 的解為 $2\leq x\leq 3$，則數對 (a,b) 為下列何者？__________

(A) $(-1,-5)$ (B) $(-1,5)$ (C) $(1,-5)$ (D) $(1,5)$。 [107 (B)]

最素傳說

素養題 生活素養之算幾不等式

若想要利用一條繩子圍出一個面積至少為 25 平方公尺的矩形花園，則所需要的繩子總長度至少須為多少公尺？　(A) 12　(B) 16　(C) 20　(D) 24。　[統測]

解題小技巧

算幾不等式：

若 a、b 均為正數，則 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$。

解：設矩形花園長 x 公尺，寬 y 公尺（$x>0$，$y>0$）

繩子總長 ＝ 矩形周長 $=2x+2y$

$\because$ 面積至少為 25 平方公尺　$\therefore$ 面積 $xy \geq 25$

由算幾不等式：$\dfrac{2x+2y}{2} \geq \sqrt{(2x)\times(2y)}$

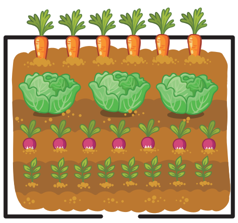
$\Rightarrow$ $x+y \geq \sqrt{4xy} \geq \sqrt{4\times 25}=10$

$\Rightarrow$ $2x+2y \geq 2\times 10=20$

因此繩子總長度至少須為 20 公尺

類題 1　一農夫想用 66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如圖所示。試求此農夫所能圍成的最大面積。＿＿＿＿

(A) 280　(B) 285　(C) 288　(D) 289　平方公尺。


2公尺

歷屆試題

基礎題

實數與絕對值

_______ 1. 公益文教基金會調查技術型高中三年級學生每天手機使用時間介於 3.1 小時至 4.9 小時之間（含）。若 x（單位：小時）為其中一位參與調查的技術型高中學生每天手機使用時間，且將上述使用時間範圍用 $|x-a|\leq b$ 來表示，則 $ab=$ ？ (A)3.2 (B)3.6 (C)3.8 (D)4.2。 [111 (C)]

_______ 2. 已知 A、B 為實數，若不等式 $|Ax+6|\geq B$ 的解為 $x\leq -2$ 或 $x\geq 6$，則 $2A+B=$ ？ (A) -12 (B) -6 (C)6 (D)12。 [112 (C)]

_______ 3. 若點 (a,b) 落在第一象限且滿足 $b=-a^2+10$，則 a^2b 的最大值為何？ (A)10 (B)21 (C)23 (D)25。 [113 (C)]

直角坐標系

_______ 4. 已知點 A 為 $x+2=0$ 與 $x+y=0$ 兩直線的交點，點 B 為 $(1,6)$，則 $\overline{AB}$ 線段長為 (A)3 (B)5 (C)7 (D) $\sqrt{65}$。 [105 (S)]

_______ 5. 將火車站與甲、乙、丙三家標示於坐標平面上，設火車站與甲、乙兩家的坐標分別為 $(0,0)$、$(-2,-5)$、$(4,7)$，且甲、乙、丙三家共線。若丙家介於甲、乙兩家之間，且丙家到甲家距離為丙家到乙家距離的兩倍，則丙家到火車站的距離為 (A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt{11}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) $\sqrt{15}$。 [109 (A)]

函數及其圖形

_______ 6. 若函數 $f(x)=x^2+3x-1$ 的圖形和 x 軸交於 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$ 兩點，則 $|x_1-x_2|$ 之值為 (A)3 (B) $\sqrt{11}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) $\sqrt{14}$。 [統測]

_______ 7. 設二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 圖形的頂點為 $(1,3)$ 且交 y 軸於點 $(0,1)$，則 a、b 之值，何者正確？ (A) $a=-2$，$b=4$ (B) $a=-1$，$b=2$ (C) $a=1$，$b=-2$ (D) $a=2$，$b=4$。 [統測]

_______ 8. 若拋物線 $y=ax^2+b$ 之開口向上且與 x 軸沒有交點，則下列敘述何者正確？ (A) $a>0$，$b>0$ (B) $a>0$，$b<0$ (C) $a<0$，$b>0$ (D) $a<0$，$b<0$。 [108 (B)]

______ 9. 在生成式人工智慧技術中，利用函數變換的概念可將資料的分布狀態作轉換。若有十筆原始資料 x（以 • 表示）分布在區間 $[2,5]$，如圖 (a)，現將此十筆資料經線型函數 $f(x)$ 變換後，其分布區間為 $[4,13]$，如圖 (b)，則下列何者可為達成任務的 $f(x)$ ？ (A) $f(x)=2x+4$ (B) $f(x)=4x-4$ (C) $f(x)=3x-2$ (D) $f(x)=2x-3$。 [113 (C)]

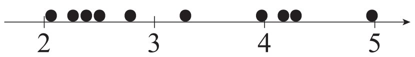
圖 (a) 

圖 (b) 

● 一元二次不等式

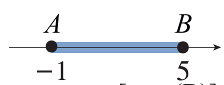
______ 10. 已知 a、b 為實數，若不等式 $x^2+ax\le b$ 之解為 $-5\le x\le 3$，則 $a+b=$ (A) -17 (B) -13 (C) 13 (D) 17。 [104 (C)]

______ 11. 已知 $ax^2+2x+c>0$ 的解為 $-1<x<3$，則 $a+c$ 之值為 (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。 [105 (B)]

______ 12. 滿足不等式 $\dfrac{2x+5}{4}\le\dfrac{x-7}{3}$ 的最大整數 $x=$ (A) -19 (B) -20 (C) -21 (D) -22。 [107 (A)]

______ 13. 若 b、c 為實數，且 $x^2+bx+c\ge 0$ 的解為 $x\le 1$ 或 $x\ge 3$，則 $2b+3c=$ (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1。 [107 (A)]

______ 14. 若點 A 與點 B 在數線上的坐標分別是 -1 與 5，則線段 $\overline{AB}$（包含兩端點，如圖所示）是下列哪一個不等式之解的圖形？ (A) $|x-1|\le 4$ (B) $|x+1|\le 5$ (C) $x^2-4x-5\le 0$ (D) $x^2+6x+5\le 0$。 [109 (B)]



______ 15. 不等式 $5x-4<x^2<x+2$ 的解為何？ (A) $-1<x<1$ (B) $-1<x<2$ (C) $-2<x<1$ (D) $0<x<4$。 [111 (C)]

進階題

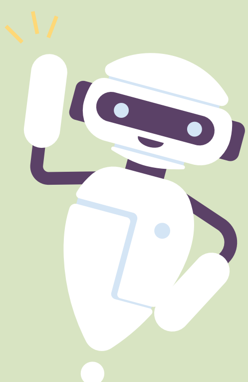
______ 16. 設 a、b 為實數，且不等式 $-x^2+6x+b>0$ 與不等式 $|x+a|<5$ 的解完全相同，則 $a+b=$ (A) -13 (B) -7 (C) 7 (D) 13。 [106 (C)]

______ 17. 若 x 為實數，則 $x^2-2+\dfrac{9}{x^2+2}$ 的最小值為何？ (A) 2 (B) $\dfrac{5}{2}$ (C) $\dfrac{13}{2}$ (D) 6。 [110 (C)]

學習導航

雲端
教室

2 三角函數



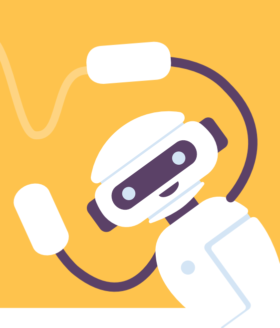
三角函數

有向角及其度量

- 標準位置角 — 同界角 P.27
- 角的度量 — 扇形 P.28

2-1

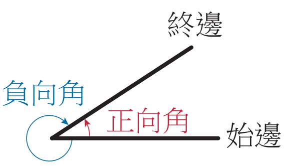
有向角及其度量



趨勢分析

本單元的公式眾多，宜反覆演練才容易熟記，而命題以「任意角三角函數」、「正、餘弦定理」為主。另外請務必牢記 $\sin x$、$\cos x$ 的圖形，才能處理週期、函數值的變化。

焦點主題 1 標準位置角



(1) 規定角的一邊為始邊，另一邊為終邊，由始邊轉到終邊的角稱為「有向角」，而逆時針旋轉的角為「正向角」，順時針旋轉的角為「負向角」。

(2) 坐標平面上，有向角頂點在原點且始邊在 x 軸正向，此角稱為「標準位置角」。

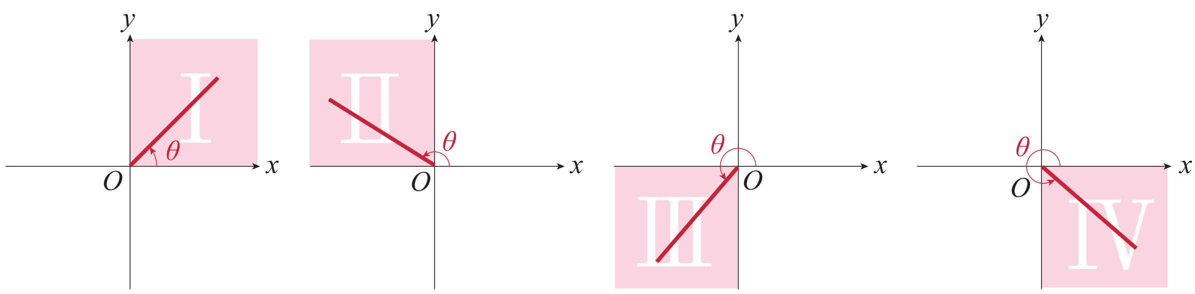
(3) 標準位置角的終邊在 x 軸或 y 軸稱為「象限角」。例 $0°$、$90°$。

(4) 標準位置角的終邊在第 n 象限內稱為「第 n 象限角」。如：$150°$ 為第二象限角。

(5) 當 θ 為第一象限角，記作 $\theta \in \mathrm{I}$，而 $\theta + 360° \times n$（n 為整數）也是第一象限角。

① 當 $0° < \theta < 90°$，$\theta \in \mathrm{I}$。 ② 當 $90° < \theta < 180°$，$\theta \in \mathrm{II}$。

③ 當 $180° < \theta < 270°$，$\theta \in \mathrm{III}$。 ④ 當 $270° < \theta < 360°$，$\theta \in \mathrm{IV}$。



θ 終邊在第一象限 稱 θ 為第一象限角	θ 終邊在第二象限 稱 θ 為第二象限角	θ 終邊在第三象限 稱 θ 為第三象限角	θ 終邊在第四象限 稱 θ 為第四象限角

範例 1 老師講解 學生練習

下列敘述，對的答〇，錯的答 ×。

(　　)(1) 標準位置角 $300°$ 是第一象限角。

(　　)(2) 標準位置角 $460°$ 是第二象限角。

下列敘述，對的答〇，錯的答 ×。

(　　)(1) 標準位置角 $225°$ 是第三象限角。

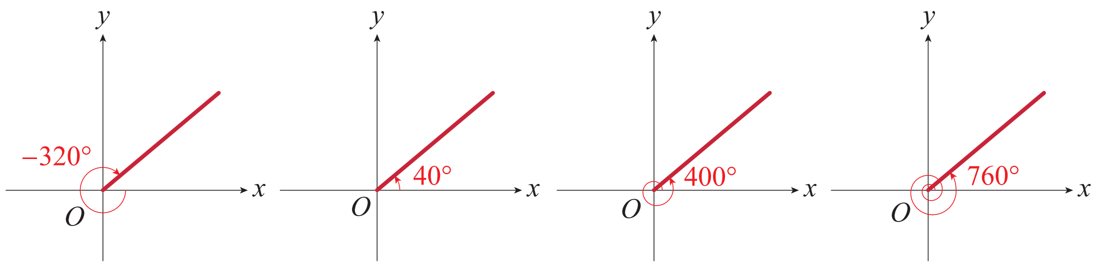
(　　)(2) 標準位置角 $700°$ 是第一象限角。

焦點主題 2　同界角

(1) 若兩個有向角具有相同的始邊、終邊，則此兩角互為「同界角」。而兩個同界角相差 360° 的整數倍，其差別在所繞的圈數可能不同。

(2) 若標準位置角 $\theta=\alpha+360°\times n$，其中 $0°<\alpha<360°$ 且 n 為整數，則 θ 的最小正同界角為 α，最大負同界角為 $(\alpha-360°)$。

例 標準位置角 400° 的同界角有 －680°、－320°、40°、400°、760°、⋯，而 400° 的最小正同界角為 40°，最大負同界角為 －320°，兩者相差 360°。



觀念是非題　(　　) 1. 任意角的最小正同界角與最大負同界角一定相差 360°。

範例 2　老師講解　　學生練習

下列敘述，對的答○，錯的答 ×。

(　　)(1) 460° 與 100° 是同界角。

(　　)(2) 200° 與 160° 是同界角。

(　　)(3) 520° 與 －200° 是同界角。

下列敘述，對的答○，錯的答 ×。

(　　)(1) 570° 與 310° 是同界角。

(　　)(2) 280° 與 －80° 是同界角。

(　　)(3) 1110° 與 20° 是同界角。

焦點主題 3　角的單位

(1) 度度量（六十分制）：圓分成 360 等分，每等分的圓心角為「1 度」，記作 1°，而一周角 ＝360°。

(2) 弳度量（弧度制）：圓上取一段圓弧，使弧長等於半徑，則此弧的圓心角為「1 弧度」或「1 弳」，其單位可省略不寫，可以記作 1，而一周角 ＝2π（弧度）。

(3) 度轉換弧度：$360°=2\pi$（弧度）　⇔　$180°=\pi$（弧度）　⇔　$1°=\dfrac{\pi}{180}$（弧度）。

(4) 弧度轉換度：π（弧度）＝180°　⇔　1（弧度）＝$\dfrac{180°}{\pi}\fallingdotseq 57.3°$。

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

範例 3 老師講解 學生練習

(1) $240°$ 等於多少弧度？

(2) $\frac{5\pi}{12}$（弧度）等於多少度？

(1) $300°$ 等於多少弧度？

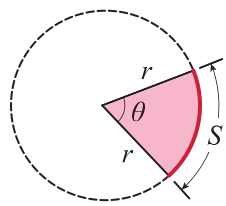
(2) $\frac{7\pi}{3}$（弧度）等於多少度？

焦點主題 4 扇形的弧長、面積

(1) 由圓的兩個半徑與一圓弧所圍成的圖形稱為「扇形」。

(2) 若扇形的半徑為 r，圓心角為 θ（弧度），

則其弧長 $S = r\theta$、面積為 $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rS$。



觀念是非題 （　）2. 半徑為 1，圓心角為 3（弧度）的扇形周長為 5。

範例 4 老師講解 學生練習

半徑為 3 的扇形，圓心角為 $150°$，試求此扇形所對應的弧長、扇形面積。

設圓之半徑為 6，試求以 $40°$ 為圓心角對應的弧長、扇形面積。 [103(A)]

2-2
三角函數的定義與性質

焦點主題 5 銳角三角函數的定義

(1) $\triangle ABC$ 的內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，其對邊常以 a、b、c 表示，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$。

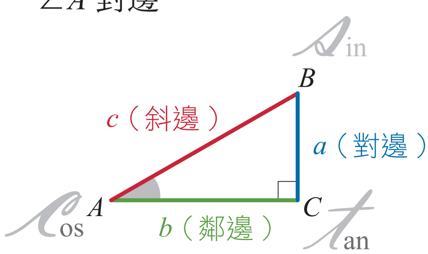
(2) 直角$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，則$\angle A$ 的三角函數定義如下：

正弦函數 $\sin A=\dfrac{a}{c}$ $\left(\dfrac{\angle A\text{ 對邊}}{\text{斜邊}}\right)$ $\xleftrightarrow{\text{倒數}}$ 餘割函數 $\csc A=\dfrac{c}{a}$ $\left(\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{ 對邊}}\right)$

餘弦函數 $\cos A=\dfrac{b}{c}$ $\left(\dfrac{\angle A\text{ 鄰邊}}{\text{斜邊}}\right)$ $\xleftrightarrow{\text{倒數}}$ 正割函數 $\sec A=\dfrac{c}{b}$ $\left(\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{ 鄰邊}}\right)$

正切函數 $\tan A=\dfrac{a}{b}$ $\left(\dfrac{\angle A\text{ 對邊}}{\angle A\text{ 鄰邊}}\right)$ $\xleftrightarrow{\text{倒數}}$ 餘切函數 $\cot A=\dfrac{b}{a}$ $\left(\dfrac{\angle A\text{ 鄰邊}}{\angle A\text{ 對邊}}\right)$

小提醒 常見直角三角形的邊長比有 $(3,4,5)$、$(5,12,13)$、$(7,24,25)$、$(8,15,17)$。

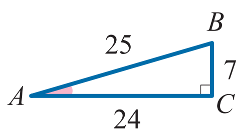


觀念是非題

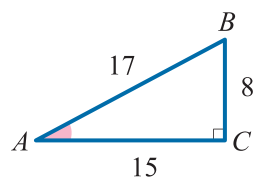
(　　) 1. 以銳角$\angle A$ 來作 2 個直角三角形，因為邊長可能不同，所以 $\sin A$ 的值也會不同。

範例 5　老師講解　　　學生練習

如圖，求$\angle A$ 的六個三角函數值。



如圖，求$\angle A$ 的六個三角函數值。

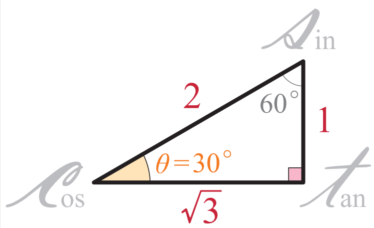
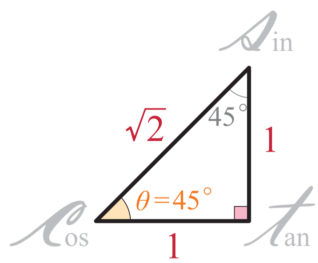
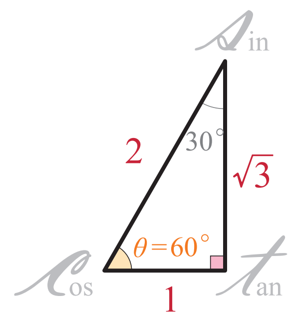


焦點主題 6 特別角（30°、45°、60°）的三角函數值

(1) 當 $\angle A=\theta$ 時，則 $\sin A$ 可以寫成 $\sin\theta$。如：$\angle A=30^\circ$，則 $\sin A=\sin 30^\circ$。

(2) 習慣把 $\sin\theta\times\sin\theta=(\sin\theta)^2$ 簡寫成 $\sin^2\theta$，而 $\sin(\theta)^2=\sin\theta^2$，故 $\sin^2\theta\neq\sin\theta^2$。

(3) 30°、45°、60° 的三角函數值如下表：

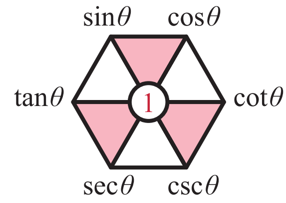
函數 / 角度 θ	$30^\circ=\frac{\pi}{6}$	$45^\circ=\frac{\pi}{4}$	$60^\circ=\frac{\pi}{3}$
圖示			
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sec\theta$	$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\csc\theta$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

範例 6 老師講解 ●●●●● 學生練習

試求 $\sin^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ+\tan^2 45^\circ$。

試求 $\sin 60^\circ\cos 30^\circ+\cos^2 60^\circ+\sin^2 45^\circ$。

焦點主題 7　三角恆等式（倒數、平方關係）



(1) 倒數關係（對角線兩端點互為倒數）

$\sin\theta\times\csc\theta=1$，$\cos\theta\times\sec\theta=1$，$\tan\theta\times\cot\theta=1$。

(2) 平方關係（鋪色三角形中，上方兩點的平方和等於下方點的平方）

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$，$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$。

小提醒　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$，$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$，$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$，$\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$。

範例 7　老師講解

下列敘述，對的答〇，錯的答 ×。

(　　)(1) $\sin 2^\circ\times\csc 2^\circ=1$。

(　　)(2) $\sin^2 3^\circ+\cos^2 3^\circ=3$。

(　　)(3) $\sin^2 4^\circ=1-\cos^2 4^\circ$。

學生練習

下列敘述，對的答〇，錯的答 ×。

(　　)(1) $\cos 5^\circ\times\tan 5^\circ=1$。

(　　)(2) $\cos^2 6^\circ+\sin^2 6^\circ=1$。

(　　)(3) $\cos^2 7^\circ=1-\sin^2 7^\circ$。

焦點主題 8　三角恆等式（商數、餘角關係）

(1) 商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$。

(2) 餘角關係：$\begin{cases}\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta\\ \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta\end{cases}$，$\begin{cases}\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta\\ \cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta\end{cases}$，$\begin{cases}\sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta\\ \csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta\end{cases}$。

例 $\sin 30^\circ=\cos 60^\circ$，$\tan 45^\circ=\cot 45^\circ$，$\sec 60^\circ=\csc 30^\circ$。

範例 8　老師講解

下列敘述，對的答〇，錯的答 ×。

(　　)(1) $\tan 10^\circ=\dfrac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$。

(　　)(2) $\cot 20^\circ=\dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$。

(　　)(3) $\sin 10^\circ=\cos 80^\circ$。

學生練習

下列敘述，對的答〇，錯的答 ×。

(　　)(1) $\tan 70^\circ=\dfrac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}$。

(　　)(2) $\cot 50^\circ=\dfrac{\cos 50^\circ}{\sin 50^\circ}$。

(　　)(3) $\sin 70^\circ=\cos 20^\circ$。

焦點主題 9　由某個銳角三角函數值來求其他三角函數值

由某個銳角三角函數值，可畫出對應的直角三角形，再求出其他三角函數值。

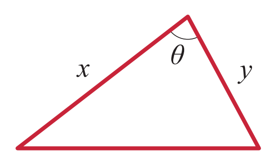
範例 9　老師講解　學生練習

設 θ 為銳角，若 $\sin\theta=\dfrac{3}{4}$，試求 $\cos\theta$、$\tan\theta$。

設 θ 為銳角，若 $\cos\theta=\dfrac{5}{6}$，試求 $\sin\theta$、$\tan\theta$。

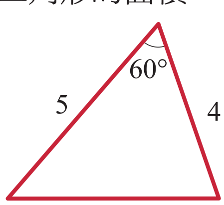
焦點主題 10　三角形的面積公式：兩邊夾一角求面積

已知三角形的兩邊長 x、y 與其夾角 θ，則面積為 $\dfrac{1}{2}xy\sin\theta$。

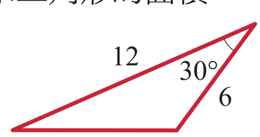


範例 10　老師講解　學生練習

如圖，試求三角形的面積。



如圖，試求三角形的面積。



2-2　邁向統測之路

三角平方關係之應用

(1) 正餘弦的和（差）平方：$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta$。

小提醒　$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=\sin^2\theta\pm2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1\pm2\sin\theta\cos\theta$。

(2) 正餘切的和：$\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$。

小提醒　$\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$。

老師講解

設 θ 為銳角，若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{3}$，試求：

(1) $\sin\theta\cos\theta=$ ？

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=$ ？

(3) $\tan\theta+\cot\theta=$ ？

(4) $\sec\theta+\csc\theta=$ ？

學生練習

設 θ 為銳角，若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，試求：

(1) $\sin\theta\cos\theta=$ ？

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=$ ？

(3) $\tan\theta+\cot\theta=$ ？

(4) $\sec\theta-\csc\theta=$ ？

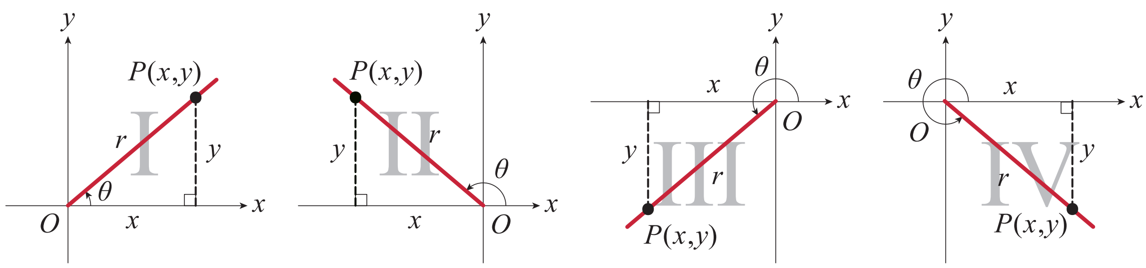
2-3

任意角的三角函數

焦點主題 11 任意角三角函數的定義

在標準位置角 θ 的終邊上，任取異於原點的一點 $P(x, y)$，令 $\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$，

則 $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$，$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$，$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$，$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$。



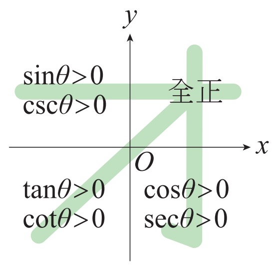
範例 11　老師講解　　學生練習

設點 $P(-12, 5)$ 在標準位置角 θ 的終邊上，試求 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 與 $\tan\theta$ 的值。

設點 $P(-4, -3)$ 在標準位置角 θ 的終邊上，試求 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 與 $\tan\theta$ 的值。

焦點主題 12　三角函數在各象限的正負

函數 \ 象限	I	II	III	IV
$\sin\theta$、$\csc\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$、$\sec\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$、$\cot\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$



範例 12　老師講解　　　　學生練習

點 $(\cos 600°, \tan 600°)$ 在第幾象限？

點 $(\sin 700°, \cos 700°)$ 在第幾象限？

焦點主題 13　由任意角的三角函數值來求其他三角函數值

由某個象限的任意角三角函數值，可畫出對應的直角三角形，再求出其他三角函數值。

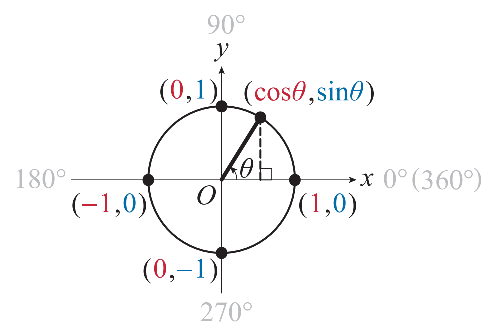
範例 13　老師講解　　　　學生練習

已知 θ 為第三象限角，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，試求 $\sin\theta$、$\cos\theta$。　[102(C)]

假設 θ 為第二象限角，且 $\tan\theta=-\dfrac{5}{12}$，試求 $\sin\theta$、$\cos\theta$。

焦點主題 14　象限角的三角函數值

函數 \ θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$0°$（$360°$）	0	1	0	無意義	1	無意義
$90°$	1	0	無意義	0	無意義	1
$180°$	0	-1	0	無意義	-1	無意義
$270°$	-1	0	無意義	0	無意義	-1



小提醒　$\cos\theta$ 看 x 坐標，$\sin\theta$ 看 y 坐標，而 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$。

範例 14　老師講解

求 $\sin 0°+2\sin 90°+3\cos 0°+4\cos 90°$。

學生練習

求 $\sin 90°+3\sin 180°+5\cos 90°+7\cos 180°$。

焦點主題 15　任意角三角函數的轉換（同界角公式）

$\sin(360°\times n+\theta)=\sin\theta$，$\cos(360°\times n+\theta)=\cos\theta$，$\tan(360°\times n+\theta)=\tan\theta$，
$\cot(360°\times n+\theta)=\cot\theta$，$\sec(360°\times n+\theta)=\sec\theta$，$\csc(360°\times n+\theta)=\csc\theta$，$n$ 為整數。

範例 15　老師講解

試求下列三角函數的值：
(1) $\sin 390°$　(2) $\cos 765°$

學生練習

試求下列三角函數的值：
(1) $\sin 405°$　(2) $\cos 780°$

焦點主題 16 任意角三角函數的轉換（負角公式）

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$，
$\cot(-\theta)=-\cot\theta$，$\sec(-\theta)=\sec\theta$，$\csc(-\theta)=-\csc\theta$。

範例 16 老師講解

試求下列三角函數的值：
(1) $\sin(-30°)$ (2) $\cos(-30°)$

學生練習

試求下列三角函數的值：
(1) $\sin(-60°)$ (2) $\cos(-60°)$

焦點主題 17 任意角三角函數的轉換（$180°-\theta$）

若 f 為六種三角函數之一，則 $f(180°-\theta)=\pm f(\theta)$。

角度＼函數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$180°-\theta$(II)	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$-\sec\theta$	$\csc\theta$

範例 17 老師講解

試求下列三角函數的值：
(1) $\sin 135°$ (2) $\cos 135°$ (3) $\tan 135°$

學生練習

試求下列三角函數的值：
(1) $\sin 150°$ (2) $\cos 150°$ (3) $\tan 150°$

焦點主題 18 任意角三角函數的轉換（$180^\circ+\theta$）

若 f 為六種三角函數之一，則 $f(180^\circ+\theta)=\pm f(\theta)$。

角度 \ 函數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$180^\circ+\theta$ (III)	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\sec\theta$	$-\csc\theta$

範例 18　老師講解　學生練習

試求下列三角函數的值：
(1) $\sin 240^\circ$　(2) $\cos 240^\circ$　(3) $\tan 240^\circ$

試求下列三角函數的值：
(1) $\sin 225^\circ$　(2) $\cos 225^\circ$　(3) $\tan 225^\circ$

焦點主題 19 任意角三角函數的轉換（$360^\circ-\theta$）

若 f 為六種三角函數之一，則 $f(360^\circ-\theta)=\pm f(\theta)$。

角度 \ 函數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$360^\circ-\theta$ (IV)	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\sec\theta$	$-\csc\theta$

範例 19　老師講解　　學生練習

試求下列三角函數的值：
(1) $\sin 330^\circ$　(2) $\cos 330^\circ$　(3) $\tan 330^\circ$

試求下列三角函數的值：
(1) $\sin 300^\circ$　(2) $\cos 300^\circ$　(3) $\tan 300^\circ$

C

2

焦點主題 20　任意角三角函數的轉換（$90^\circ \pm \theta$、$270^\circ \pm \theta$）

(1) $\sin\theta$、$\cos\theta$ 互為餘函數，$\tan\theta$、$\cot\theta$ 互為餘函數，$\sec\theta$、$\csc\theta$ 互為餘函數。
(2) 若 f、g 是互餘的三角函數，則 $f(90^\circ \pm \theta) = \pm g(\theta)$，$f(270^\circ \pm \theta) = \pm g(\theta)$。

函數 / 角度	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$90^\circ - \theta$ (I)	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$
$90^\circ + \theta$ (II)	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$-\csc\theta$	$\sec\theta$
$270^\circ - \theta$ (III)	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\csc\theta$	$-\sec\theta$
$270^\circ + \theta$ (IV)	$-\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\csc\theta$	$-\sec\theta$

範例 20　老師講解　　學生練習

設 θ 為銳角，求
$\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)}{\sin(90^\circ+\theta)} + \dfrac{\cos(270^\circ-\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}$。

設 θ 為銳角，求
$\dfrac{\cos(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ+\theta)} + \dfrac{\sin(270^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}$。

2-4 三角函數的圖形與週期

焦點主題 21 三角函數的圖形與週期

(1) 函數的週期

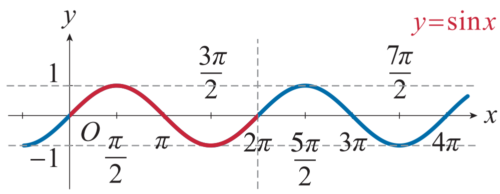
若函數 $f(x)$ 的圖形每隔固定段落就會重複出現，則 f 為週期函數，此時存在的最小正數 T 使得 $f(x+T)=f(x)$，則稱此函數的週期為 T。

(2) 三角函數的圖形

$y=\sin x$

① 週期 2π。

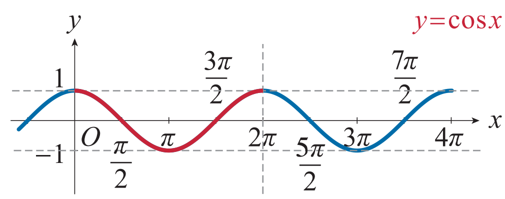
② $-1\le \sin x\le 1$。



$y=\cos x$

① 週期 2π。

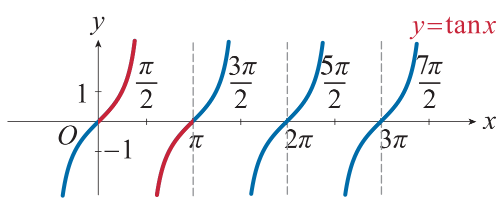
② $-1\le \cos x\le 1$。



$y=\tan x$

① 週期 π。

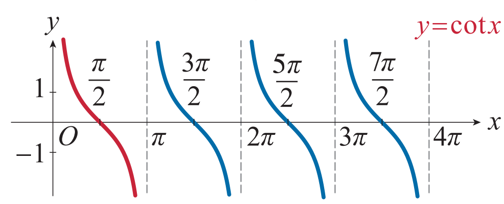
② $\tan x$ 可為任意實數。



$y=\cot x$

① 週期 π。

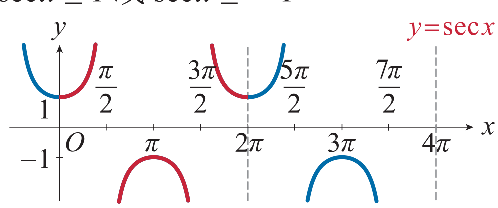
② $\cot x$ 可為任意實數。



$y=\sec x$

① 週期 2π。

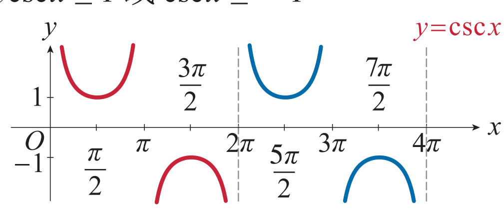
② $\sec x\ge 1$ 或 $\sec x\le -1$。



$y=\csc x$

① 週期 2π。

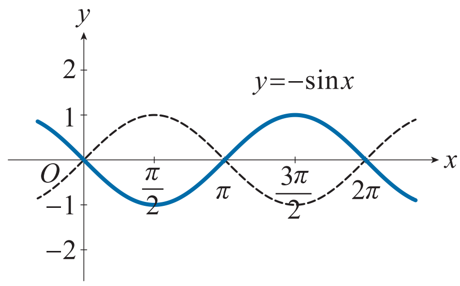
② $\csc x\ge 1$ 或 $\csc x\le -1$。



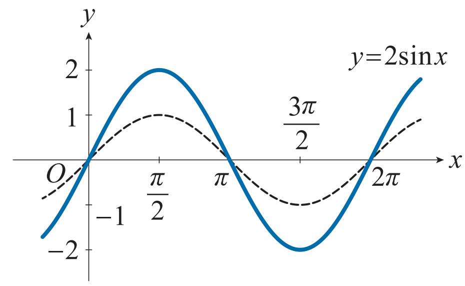
小提醒 $\sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 就是 $\cos x$ 的圖形。

(3) 三角函數圖形的變化（以虛線 $\sin x$ 圖形為例）

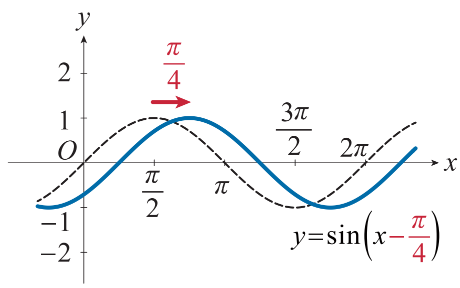
$y=-\sin x$：虛線以 x 軸為基準上下顛倒



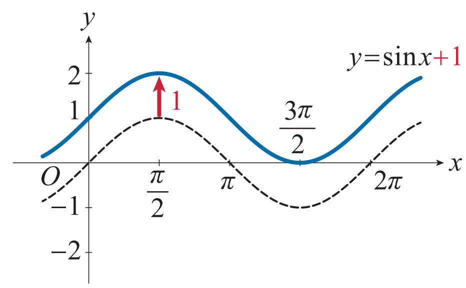
$y=2\sin x$：虛線以 x 軸為基準拉伸 2 倍



$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$：虛線向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 單位

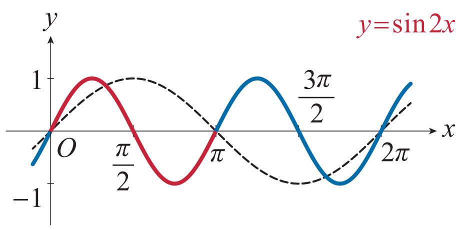


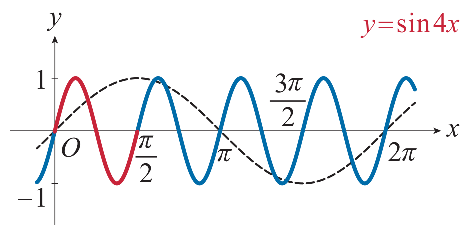
$y=\sin x+1$：虛線向上平移 1 單位



(4) 三角函數的週期變化

① $\sin x$ 的週期是 2π，而 $\sin 2x$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$、$\sin 4x$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$。





② 若 $f(x)$ 的週期為 T，則 $a\times f(kx+b)+c$ 的週期為 $\dfrac{T}{|k|}$，其中 a、$k\neq 0$。

觀念是非題　(　　) 1. 函數 $y=2\sin 3x$ 的最大值為 3。

範例 21　老師講解　　　　學生練習

試求 $y=3\tan 5x+1$ 的週期。

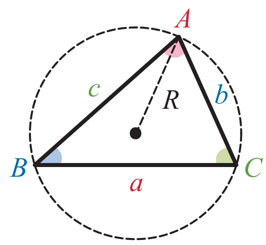
試求 $y=2\cos 3x$ 的週期。

2-5

正弦定理與餘弦定理

焦點主題 22 正弦定理(I)

若△ABC 的外接圓半徑為 R，則 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。



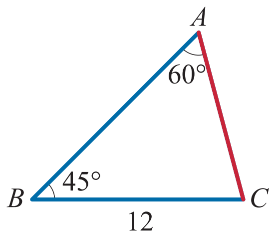
小提醒 三組邊長與對角的正弦比值恆相等。

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0

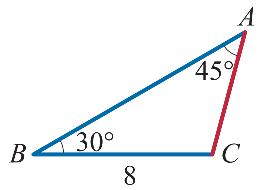
觀念是非題 （　）1. 當△ABC 的外接圓半徑為 5，$\angle A=30°$ 時，則 $\overline{BC}=5$。

範例 22 老師講解 　　　　　　 學生練習

如圖，試求 $\overline{AC}$ 長，即 b 之值。



如圖，試求 $\overline{AC}$ 長，即 b 之值。



焦點主題 23　正弦定理(II)

$\triangle ABC$ 中，$a：b：c=\sin A：\sin B：\sin C$。（各邊的長度比 ＝ 對角的正弦比）

範例 23

老師講解	學生練習
$\triangle ABC$ 中，$\angle A=105°$、$\angle B=30°$，試求 $b：c$。	$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$、$\angle C=75°$，試求 $a：b$。

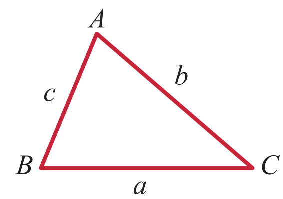
焦點主題 24　餘弦定理(I)

$\triangle ABC$ 的任意兩邊長與其夾角（SAS）可以表示第三邊：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

小提醒　畢氏定理是餘弦定理的特例。

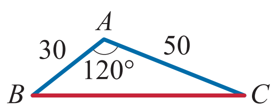
θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



範例 24

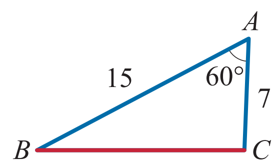
老師講解

如圖，試求 $\overline{BC}$ 長，即 a 之值。



學生練習

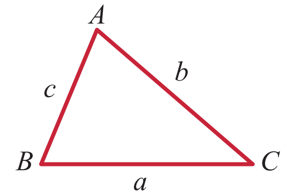
如圖，試求 $\overline{BC}$ 長，即 a 之值。



焦點主題 25　餘弦定理(II)

$\triangle ABC$ 的三邊長（SSS）可以表示任一角的餘弦值，再求出其角度。

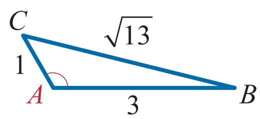
$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。



範例 25　老師講解　學生練習

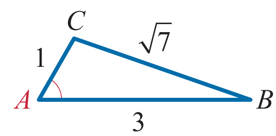
老師講解

如圖，試求：(1) $\cos A$　(2) $\angle A$



學生練習

如圖，試求：(1) $\cos A$　(2) $\angle A$



焦點主題 26　海龍公式：三邊長求面積

$\triangle ABC$ 中，令 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，則面積為 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

範例 26　老師講解　學生練習

老師講解

若三角形的三邊長為 5、6、7，則面積為何？

學生練習

若三角形的三邊長為 5、7、8，則面積為何？

2-5　邁向統測之路

正弦定理求三內角的正弦比

由正弦定理知，$\triangle ABC$ 的三內角正弦比 $\sin A：\sin B：\sin C = a：b：c$。

老師講解	學生練習
(1) $\triangle ABC$ 中，若 $(a+b)：(b+c)：(c+a)=7：8：9$，試求 $\sin A：\sin B：\sin C=$ ？ (2) $\triangle ABC$ 中，若 $a+2b-2c=0$ 與 $a-2b+c=0$，試求 $\sin A：\sin B：\sin C=$ ？	(1) $\triangle ABC$ 中，若 $(a+b)：(b+c)：(c+a)=5：6：7$，試求 $\sin A：\sin B：\sin C=$ ？ (2) $\triangle ABC$ 中，若 $a-2b+2c=0$ 與 $a+2b-3c=0$，試求 $\sin A：\sin B：\sin C=$ ？

C

2

統測常考題

範例 1 三角恆等式

已知 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，則 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=$ (A) $2\left(\sqrt{3}-1\right)$ (B) $4\left(\sqrt{3}-1\right)$ (C) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$ (D) $4\left(\sqrt{3}+1\right)$。 [統測]

解題小技巧

平方關係：

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Leftrightarrow \sin^2\theta=1-\cos^2\theta$，$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$。

(2) $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$。

(3) $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$。

解：$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$$=\sin\theta\times\left(\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}\right)$$

$$=\sin\theta\times\frac{(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\sin\theta\times\frac{2}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\sin\theta\times\frac{2}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}-1}=\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$=\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=2\left(\sqrt{3}+1\right)$$，故選 (C)

類題 1 若 $\tan\theta=\dfrac{8}{15}$，則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta=$ ？________

(A) $\dfrac{514}{225}$ (B) $\dfrac{38}{15}$ (C) $\dfrac{64}{225}$ (D) $\dfrac{49}{625}$。 [107(B)]

類題 2 已知 θ 為一銳角，且 $\tan\theta=\dfrac{7}{19}$，則 $\left(\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\left(\dfrac{1+\sec\theta}{1+\csc\theta}\right)$ 之值為何？

____

(A) $\dfrac{25}{17}$ (B) $\dfrac{7}{19}$ (C) $\dfrac{19}{267}$ (D) $\dfrac{277}{319}$。 [統測]

統測常考題

範例 2 三角函數的象限問題

若 $\tan\theta = -\dfrac{3}{4}$ 且 $\sin\theta < 0$，則 $5\sin\theta + 10\cos\theta =$ (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8。

[統測]

解：若 $\tan\theta < 0$，則 θ 為第二象限角或第四象限角

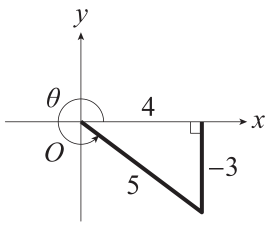
若 $\sin\theta < 0$，則 θ 為第三象限角或第四象限角

$\because\ \tan\theta = -\dfrac{3}{4} < 0$ 且 $\sin\theta < 0$

$\therefore\ \theta$ 為第四象限角

以 $\tan\theta = -\dfrac{3}{4}$ 來作圖，

則 $\sin\theta = -\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$



故 $5\sin\theta + 10\cos\theta = 5\times\left(-\dfrac{3}{5}\right) + 10\times\dfrac{4}{5} = 5$

故選 (A)

類題 1 若 $\sin\theta = \dfrac{33}{65}$，且 $\tan\theta = \dfrac{-33}{56}$，則 θ 為哪一象限角？________

(A) 第一象限角 (B) 第二象限角 (C) 第三象限角 (D) 第四象限角。[107(B)]

類題 2 設 $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ 且 $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$，則 $\sin\theta + \cos\theta =$ ？________

(A) $-\dfrac{8}{5}$ (B) $-\dfrac{7}{5}$ (C) -1 (D) 0。 [統測]

歷屆試題

基礎題

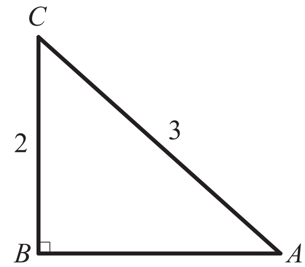
有向角及其度量

______ 1. 若一扇形的面積為$\dfrac{27\pi}{2}$，弧長為$\dfrac{9\pi}{2}$，則此扇形的圓心角為何？ (A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{3\pi}{4}$。 [108 (A)]

三角函數的定義與性質

______ 2. 若 $\tan\theta+\sec\theta=5$，則 $\tan\theta-\sec\theta=$ ？ (A) $-\dfrac{3}{5}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{3}{5}$。 [110 (C)]

______ 3. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，如圖所示，且 $\overline{AC}=3$、$\overline{BC}=2$，則 $\tan A=$ ？
(A) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ (B) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (D) $\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$。 [112 (C)]



任意角的三角函數

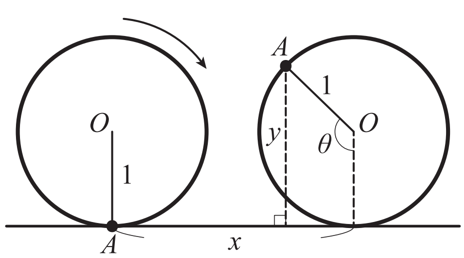
______ 4. 若 $180°<\theta<270°$ 且 $\sin\theta=\sin 2024°$，則 $\theta=$ ？ (A) 204° (B) 214° (C) 224° (D) 234°。 [113 (C)]

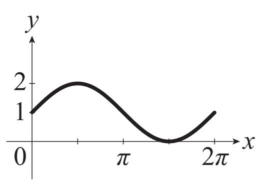
______ 5. 已知 $\sin\theta\tan\theta<0$ 且 $\cos\theta\cot\theta>0$，則 θ 為第幾象限角？ (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四。 [113 (C)]

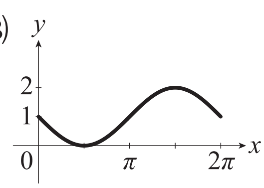
三角函數的圖形與週期

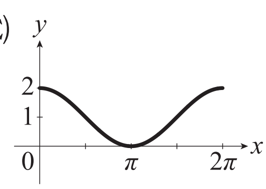
______ 6. 下列何者**錯誤**？ (A) $y=|\sin 2x|$ 之週期為$\dfrac{\pi}{2}$ (B) $y=3\sin x$ 之週期為 2π (C) $y=\cos 2x$ 之週期為$\dfrac{\pi}{2}$ (D) $y=4\cos x$ 之週期為 2π。 [111 (C)]

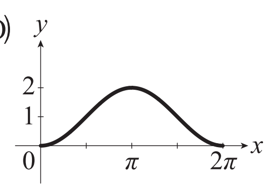
______ 7. 有一個在水平地面上的圓形輪子，其半徑為 1 單位長。輪子上 A 點與地面接觸，如圖所示，當輪子向右滾動，相對於圓心 O 而言，A 點以順時針轉動 θ 角，且輪子中心 O 前進 x 單位長的時候，A 點距離地面的高度為 y 單位長。在坐標平面上，若在 $0\le x\le 2\pi$ 的範圍中，y 可以表示為 x 的函數 $f(x)$，則下列圖形何者為 $y=f(x)$ 的圖形？ [113 (C)]



(A)


(B)


(C)


(D)


。

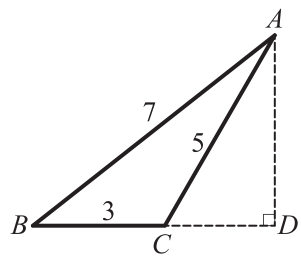
正弦定理與餘弦定理

8. 已知△ABC 中，a、b、c 分別為∠A、∠B、∠C 之對邊長。若 ab：bc：$ca = 3$：4：6，則 $\sin A$：$\sin B$：$\sin C$ = ？ (A)4：3：2 (B)4：2：3 (C)2：3：4 (D)3：2：4。 [110 (C)]

9. 若△ABC 三邊長為 4、5、6，則其外接圓直徑為何？ (A) $\dfrac{8}{\sqrt{7}}$ (B) $\dfrac{12}{\sqrt{7}}$ (C) $\dfrac{16}{\sqrt{7}}$ (D) $\dfrac{20}{\sqrt{7}}$。 [111 (C)]

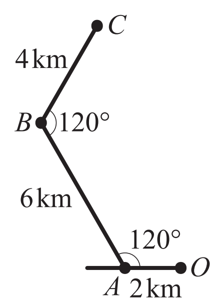
10. 已知△ABC 的面積為 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，其中 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=2$，且∠BAC 為鈍角。若 $\overline{BC}$ 的長度為 a，則 a^2 = ？ (A) $13-6\sqrt{2}$ (B) $13-2\sqrt{6}$ (C) $13+2\sqrt{6}$ (D) $13+6\sqrt{2}$。 [111 (C)]

11. 已知△ABC 三邊長分別為 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=5$，如圖所示，試求 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}$ = ？
(A) $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$。 [112 (C)]

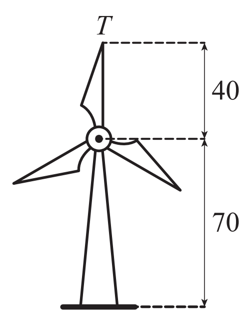


進階題

12. 一公路依水平地形迂迴而建，如圖所示。從 O 地到 A 地、A 地到 B 地、B 地到 C 地的距離分別是 2、6、4 公里 (km)，而 $\overline{OA}$ 與 $\overline{AB}$ 的夾角及 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的夾角均為 120°，則 C 地到 O 地的直線距離為多少公里？
(A) $2\sqrt{11}$ (B) $2\sqrt{21}$ (C) $2\sqrt{31}$ (D) $2\sqrt{41}$。 [112 (C)]



13. 假設風力發電的風車旋轉軸平行於地面，且有三葉片，T 點為某葉片的頂端，如圖所示，我們想了解 T 點在風車旋轉過程中距離地面的高度變化。已知風車逆時針方向等速旋轉一圈需時 4 秒，且每個葉片長度皆為 40 公尺，其旋轉中心離地面 70 公尺。若風車開始運轉時，T 點恰在離地面最高的位置上，且 x 秒後可用 $f(x)=40\sin\left(ax+\dfrac{\pi}{2}\right)+70$（其中常數 $a>0$ 且 $0\le x\le 4$）來描述 T 點離地面的高度（單位：公尺），則 a 可為下列何者？
(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\dfrac{4\pi}{3}$。 [112 (C)]



學習導航

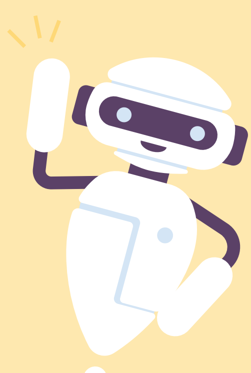
雲端教室

3 平面向量

平面向量

向量及其基本運算

向量



3-1

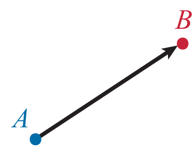
向量及其基本運算

趨勢分析

本單元的「向量加減」、「係數積」與代數運算雷同，而命題以向量的「內積」、「正定性」為主，如遇到向量的合成，宜藉助圖形來輔助，並聯想可能的公式。

焦點主題 1 向量的定義

(1) 具有大小和方向的量就稱為「向量」。**例** 汽車以時速 50 公里向東移動。



(2) 帶有箭頭的線段稱為「從 A 點到 B 點的有向線段」，以 $\overrightarrow{AB}$ 表示，而 A 為起點，B 為終點，$\overrightarrow{AB}$ 的長度以 $|\overrightarrow{AB}|$ 來表示，即 $\overline{AB}=|\overrightarrow{AB}|$。

(3) 有向線段可代表向量，有向線段的方向、長度代表向量的方向、大小。

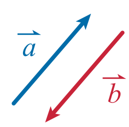
(4) 若有兩個向量的大小（長度）相等，方向也相同，則這兩個向量相等。

(5) 向量由大小和方向來決定，不在意其位置，為了方便，常以 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 來表示。

(6) 起點與終點重合的向量稱為「零向量」，記作 $\overrightarrow{0}$。**例** $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{0}$。

(7) 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的長度相等但方向相反，則互為「相反向量」，

記作 $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{b}$ 或 $\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{a}$。

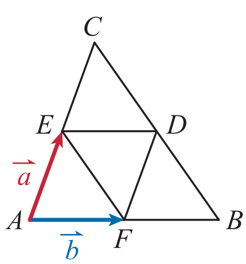


例 兩向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA}$ 互為相反向量，記作 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$。

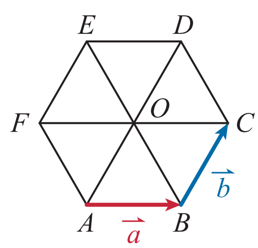
觀念是非題　(　　) 1. 若 M 是 $\overline{AB}$ 的中點，則 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}$。

範例 1　老師講解　　　學生練習

如圖，D、E、F 為 $\triangle ABC$ 三邊的中點，若 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{b}$，則還有哪些向量等於 $\overrightarrow{a}$？哪些等於 $-\overrightarrow{b}$？



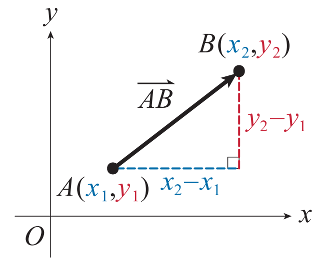
如圖為正六邊形，若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$，則還有哪些向量等於 $\overrightarrow{a}$？哪些等於 $-\overrightarrow{b}$？



焦點主題 2　向量的坐標表示

(1) 設兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，則向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$。（$\overrightarrow{AB}=B-A$）

而 x_2-x_1 為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的 x 分量，y_2-y_1 為向量 $\overrightarrow{AB}$ 的 y 分量。



小提醒　零向量 $\vec{0}=(0,0)$ 不討論其方向。

(2) 若向量 $\vec{a}=(x, y)$，則其長度 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$。

範例 2　老師講解	學生練習
已知 $A(8,2)$、$B(20,7)$ 兩點，試求 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$。	已知 $P(1,2)$、$Q(9,8)$ 兩點，試求 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$。

焦點主題 3　向量的相等

若兩向量 $\vec{a}=(x_1, y_1)$、$\vec{b}=(x_2, y_2)$ 相等，則 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$。

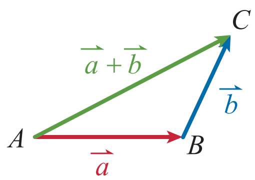
觀念是非題　(　　) 2. 設兩向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，則 $\vec{a}=\vec{b}$。

範例 3　老師講解	學生練習
已知兩向量 $\vec{a}=(x-5, y+3)$、$\vec{b}=(7,4)$，若 $\vec{a}=\vec{b}$，試求 x、y。	已知兩向量 $\overrightarrow{AB}=(2x, 3y-1)$、$\overrightarrow{CD}=(8,5)$，若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，試求 x、y。

焦點主題 4　向量的加減法及其圖示

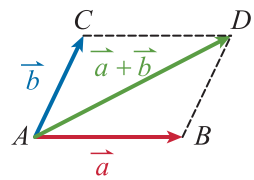
(1) 向量加法的圖示：

① 三角形法（尾首重合）



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

② 平行四邊形法（起點重合）



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

(2) 向量的減法：規定 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$，即 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的相反向量之合成。

觀念是非題　(　　) 3. 若 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{BC}=(1,1)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,4)$，則 $\overrightarrow{AD}=(0,7)$。

範例 4　老師講解

已知 $A(1,3)$、$B(2,6)$、$C(9,8)$ 三點，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$。

學生練習

已知 $P(0,1)$、$Q(5,4)$、$R(6,5)$ 三點，試求：

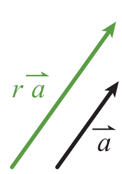
(1) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$　(2) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}$。

焦點主題 5　向量的實數積

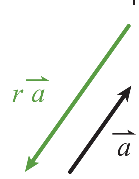
若向量 $\vec{a}$ 不是零向量，且 r 為實數，則 $r\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 的關係如下：

(1) 當 $r=0$ 時：$r\vec{a}=\vec{0}$，是零向量。

(2) 當 $r\neq 0$ 時：方向相同或相反，$r\vec{a}$ 的長度是 $\vec{a}$ 的 $|r|$ 倍。



$r>0$，方向相同



$r<0$，方向相反

觀念是非題　(　　) 4. 設 $\overline{AB}$ 的中點為 M，則 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BM}$。

範例 5 老師講解 學生練習

如圖，C、D、E 分別為線段 $\overline{AB}$ 的等分點，若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BC}=n\overrightarrow{AC}$，試求 m、n。

如圖，C、D、E、F 分別為線段 $\overline{AB}$ 的等分點，若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BE}=n\overrightarrow{AC}$，試求 m、n。

焦點主題 6 向量加減、實數積的坐標表示

若向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，且 r 為實數，則：

(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$　(2) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$　(3) $r\overrightarrow{a}=(ra_1,ra_2)$。

觀念是非題　(　　) 5. 若 $\overrightarrow{a}=(1,3)$、$\overrightarrow{b}=(2,6)$，則 $\overrightarrow{b}$ 的長度是 $\overrightarrow{a}$ 的 2 倍。

範例 6 老師講解 學生練習

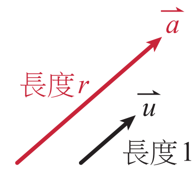
已知 $\overrightarrow{a}=(1,3)$、$\overrightarrow{b}=(4,5)$、$\overrightarrow{c}=(2,6)$，試求：

(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$　(2) $3\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c}$。

已知 $\overrightarrow{a}=(6,4)$、$\overrightarrow{b}=(2,3)$、$\overrightarrow{c}=(3,1)$，試求：

(1) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$　(2) $2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}$。

焦點主題 7　單位向量



(1) 長度為 1 的向量稱為「單位向量」，例 $\overrightarrow{u}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ 就是單位向量。

(2) 若向量 $\overrightarrow{a}$ 的長度是 r（$\neq 0$），則其單位向量 $\overrightarrow{u}=\pm\frac{1}{r}\overrightarrow{a}$。

小提醒　同向：+，反向：–。

範例 7　老師講解

已知 $\overrightarrow{a}=(5,12)$，若 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 方向相同且 $\left|\overrightarrow{u}\right|=1$，試求 $\overrightarrow{u}$。

學生練習

已知 $\overrightarrow{AB}=(8,6)$，若 $\overrightarrow{u}$ 是單位向量且與 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同，試求 $\overrightarrow{u}$。

焦點主題 8　向量的平行

兩個非零向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的方向相同或相反都稱為「向量平行」，記作 $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$。

(1) 若 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 平行，則存在一實數 r，使得 $\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}$。

(2) 若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ 平行，則 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$，其中 a_1、a_2、b_1、$b_2\neq 0$。

範例 8　老師講解

若 $\overrightarrow{a}=(6,-8)$、$\overrightarrow{b}=(-3,k)$，且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行，試求 k。

學生練習

設 $\overrightarrow{AB}=(k-1,9)$、$\overrightarrow{CD}=(2,3)$，若 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 平行，試求 k。

3-1　邁向統測之路

三角形上的向量合成

已知三角形任意兩邊的對應向量，利用向量合成可以求出第三邊的對應向量。

老師講解	學生練習
$\triangle ABC$ 中，若向量 $\overrightarrow{AB}=(3,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(1,1)$，試求： (1) 向量 $\overrightarrow{AC}=$ ？ (2) 向量 $\overrightarrow{CA}=$ ？ (3) $\triangle ABC$ 之周長為何？	$\triangle ABC$ 中，向量 $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(4,3)$，試求： (1) 向量 $\overrightarrow{BA}=$ ？ (2) 向量 $\overrightarrow{BC}=$ ？ (3) $\triangle ABC$ 之周長為何？

C

3

3-2

向量的內積

焦點主題 9 向量內積的定義

已知兩個非零向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 在平面上，則：

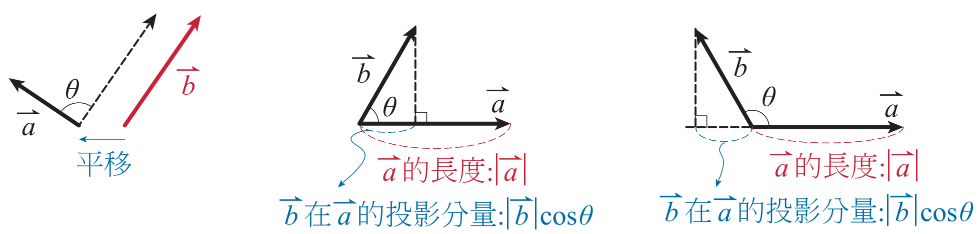
(1) 藉由平移讓兩向量的起點重合，此時角 θ（$0° \le \theta \le 180°$）稱為兩向量的夾角。

(2) 當兩向量同向時，其夾角為 0°；當兩向量反向時，其夾角為 180°。

(3) 若向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，則規定 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積：$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$。其幾何意義：$\left(\overrightarrow{a}\text{ 的長度}\right) \times \left(\overrightarrow{b}\text{ 在 }\overrightarrow{a}\text{ 的投影分量}\right)$。

小提醒

① 夾角是銳角，內積為正值。
② 夾角是直角，內積為零。
③ 夾角是鈍角，內積為負值。



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

範例 9 老師講解 學生練習

已知 $|\overrightarrow{a}| = 2$，$|\overrightarrow{b}| = 3$，且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 30°，試求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積。

已知 $|\overrightarrow{a}| = 5$，$|\overrightarrow{b}| = 4$，且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 45°，試求 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$。

焦點主題 10 內積的運算性質

(1) 分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$。

(2) 交換律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$。

(3) 結合律：$r(\vec{a}\cdot\vec{b})=(r\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(r\vec{b})$，其中 r 為實數。

(4) 正定性：$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0°=|\vec{a}|^2\geq 0$。

小提醒　$\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 的內積 $=$ $\vec{a}$ 的長度平方。

C

3

範例 10　老師講解　　學生練習

老師講解：

已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=8$，
試求：
(1) $\vec{b}\cdot\vec{b}$　(2) $\vec{b}\cdot(\vec{a}-4\vec{b})$。

學生練習：

已知 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，
試求：
(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}$　(2) $\vec{a}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$。

焦點主題 11 內積正定性的應用

$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot(\vec{a}\pm\vec{b})=|\vec{a}|^2\pm 2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$。

範例 11　老師講解　　學生練習

老師講解：

若 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，
試求 $|\vec{a}+\vec{b}|$。

學生練習：

若 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=12$，
試求 $|\vec{a}-\vec{b}|$。

焦點主題 12　內積的坐標計算

已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，則其內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$。

觀念是非題　（　）1. 設 $\overrightarrow{a}=(1,3)$，$\overrightarrow{b}=(2,1)$，則內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(2,3)$。

範例 12　老師講解

已知 $A(1,2)$、$B(2,5)$、$C(3,7)$ 為坐標平面上三點，試求內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。

學生練習

已知 $A(4,5)$、$B(6,9)$、$C(7,6)$ 為坐標平面上三點，試求內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。

焦點主題 13　向量的垂直

若兩非零向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 互相垂直（夾角 90°），則其內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$。

觀念是非題　（　）2. 向量 $\overrightarrow{a}=(3,2)$ 與 $\overrightarrow{b}=(-2,3)$ 互相垂直。

範例 13　老師講解

已知兩向量 $\overrightarrow{AB}=(4,1)$、$\overrightarrow{AC}=(3,2k)$ 的夾角為 90°，試求 k。

學生練習

若 $\overrightarrow{a}=(3,5)$ 與 $\overrightarrow{b}=(k,6)$ 互相垂直，試求 k。

3-2 邁向統測之路

內積正定性的延伸應用

$|m\vec{a}+n\vec{b}|^2=(m\vec{a}+n\vec{b})\cdot(m\vec{a}+n\vec{b})=m^2|\vec{a}|^2+2mn(\vec{a}\cdot\vec{b})+n^2|\vec{b}|^2$。

老師講解	學生練習
已知 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=4$、$\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=3$，又 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$，則 $\lvert\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\rvert=$ ？	已知 $\vec{u}$ 的長度為 2，$\vec{v}$ 的長度為 5，且 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 夾角為 $\frac{2\pi}{3}$，則 $3\vec{u}+\vec{v}$ 的長度為何？

C

3

3-3

內積的應用

焦點主題 14 二階行列式

符號$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$稱為「二階行列式」，定義$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$。例 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2$。

範例 14　老師講解　學生練習

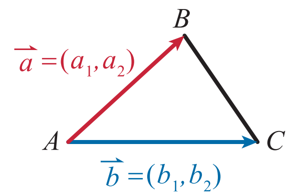
試求行列式$\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$。

試求行列式$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 11 & 7 \end{vmatrix}$。

焦點主題 15 兩向量所圍的三角形面積

$\triangle ABC$ 中，若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，

則$\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$。



範例 15　老師講解　學生練習

設平面上有 $A(1,2)$、$B(9,4)$、$C(8,5)$ 三點，試求$\triangle ABC$ 的面積。

設平面上有 $A(2,3)$、$B(11,7)$、$C(14,11)$ 三點，試求$\triangle ABC$ 的面積。

焦點主題 16 柯西不等式

設 a、b 及 x、y 均為實數，則 $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq(ax+by)^2$，而等號成立必須 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$（$xy\neq 0$）。

範例 16 老師講解 學生練習

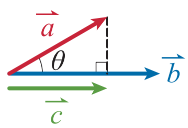
已知 x、y 為實數且 $x+3y=30$，試求 x^2+y^2 的最小值。

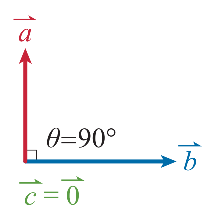
已知 x、y 為實數且 $3x+4y=10$，試求 x^2+y^2 的最小值。

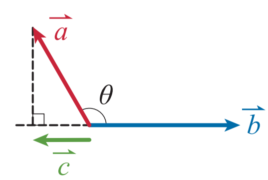
焦點主題 17 向量的正射影

如圖，若向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的正射影為向量 $\vec{c}$，則：

(1) 正射影：$\vec{c}=\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right)\vec{b}$。 (2) 正射影長：$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\cos\theta\right|=\dfrac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|}$。







範例 17 老師講解 學生練習

已知兩向量 $\vec{a}=(7,4)$，$\vec{b}=(1,2)$，試求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影。

已知兩向量 $\vec{a}=(11,2)$，$\vec{b}=(4,3)$，試求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影。

統測常考題

範例 1 向量的分解、係數積

已知平面上四點坐標為 $A(57, 23)$、$B(7, -2)$、$C(5, 12)$、$D(x, y)$，若向量 $\overrightarrow{AD}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，則 $x+y=$ (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。 [統測]

解題小技巧

設 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 兩點，則 $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$，即 $\overrightarrow{PQ}=Q-P$。

解：$\overrightarrow{AD}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \overset{\times 4}{\Rightarrow} 4\overrightarrow{AD}=7\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow 4(D-A)=7(B-A)-3(C-A)$

$\Rightarrow 4D=7B-3C=7(7, -2)-3(5, 12)=(49, -14)-(15, 36)=(34, -50)$

則 $4D=(34, -50) \overset{\div 4}{\Rightarrow} D=\left(\frac{17}{2}, -\frac{25}{2}\right)$

故 $x=\frac{17}{2}$、$y=-\frac{25}{2}$，因此 $x+y=\frac{17}{2}+\left(-\frac{25}{2}\right)=-4$，故選 (A)

類題 1 設平面上三點 $A(x, y)$，$B(-1, 4)$ 及 $C(9, -1)$，若向量 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，則 D 點坐標為何？________

(A) $(1, 5)$ (B) $(3, 2)$ (C) $(5, 1)$ (D) $(2, 3)$。 [統測]

類題 2 已知平面上 $A(1, 2)$、$B(2, -1)$、$C(a, b)$ 三點共線，且 $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$，則 $a+b=$ ？________

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。 [統測]

統測常考題

範例 2 向量係數積的應用

設 $A(-13,\ -19)$、$B(x,y)$ 為平面上相異兩點。若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\overrightarrow{u}=(5,12)$ 同方向且 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=26$，則 $3x-4y=$ (A) -103 (B) -29 (C) 29 (D) 103。 [統測]

解題小技巧

設向量 $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$，則

(1) 當 $r>0$ 時，$r\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 同方向。

(2) 當 $r<0$ 時，$r\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 反方向。

(3) $r\overrightarrow{a}$ 的長度是 $\overrightarrow{a}$ 的 $|r|$ 倍。

解：$\overrightarrow{AB}=B-A=(x,y)-(-13,\ -19)=(x+13,y+19)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=26$，$\left|\overrightarrow{u}\right|=\sqrt{5^2+12^2}=13$

$\because$ $26\div 13=2$ $\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ 的長度是 $\overrightarrow{u}$ 的 2 倍

而 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 同方向，則 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{u}$

故 $(x+13,y+19)=2(5,12)=(10,24)$

$\Rightarrow$ $x+13=10$，$y+19=24$ $\Rightarrow$ $x=-3$，$y=5$

因此 $3x-4y=3\times(-3)-4\times 5=-29$，故選 (B)

類題 1 已知 $A(0,1)$、$B(-3,5)$、$C(a,b)$ 為平面上三點。若向量 $\overrightarrow{AC}$ 的長度為 10，且與向量 $\overrightarrow{AB}$ 反向，則 a、b 之值為何？________

(A) $a=9$，$b=0$ (B) $a=-3$，$b=5$ (C) $a=6$，$b=-7$

(D) $a=-6$，$b=9$。 [105 (B)]

類題 2 若向量 $\overrightarrow{a}=(x,y)$ 與向量 $\overrightarrow{b}=(-5,12)$ 的方向相反，且 $\left|\overrightarrow{a}\right|=52$，則 $x+y=$ ？________

(A) -68 (B) -28 (C) 28 (D) 68。 [統測]

C

3

統測常考題

範例 3 內積分配律的應用

已知 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，若 $t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ 和 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，其中 t 為實數，則 $t=$ (A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$。 [106 (C)]

解題小技巧

設兩非零向量 $\vec{u}$、$\vec{v}$：

(1) 若 $\vec{u}\perp\vec{v}$，則 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$。

(2) 正定性：$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$。

(3) 交換性：$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$。

解：由內積的分配律展開 $\left(t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

$$=t\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{a}\cdot\left(-\vec{b}\right)+(1-t)\vec{b}\cdot\vec{a}+(1-t)\vec{b}\cdot\left(-\vec{b}\right)$$

$$=t|\vec{a}|^2-t\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+(1-t)\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-(1-t)|\vec{b}|^2$$

$$=t|\vec{a}|^2+(1-2t)\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-(1-t)|\vec{b}|^2$$

$$=t\times1^2+(1-2t)\times(-2)-(1-t)\times\left(\sqrt{5}\right)^2=10t-7$$

$\because$ $t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ 和 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直

$\therefore$ $\left(t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，因此 $10t-7=0$ $\Rightarrow$ $t=\frac{7}{10}$

類題 1 設平面上兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ，若 $\cos\theta=\frac{33}{65}$，且 $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=13$，則 $\left(4\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=$ ？________

(A) -39 (B) 93 (C) 97 (D) 435。 [統測]

類題 2 設向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 $60°$，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，則向量 $\vec{a}$ 和 $\left(-\vec{a}+2\vec{b}\right)$ 之夾角為何？________

(A) $30°$ (B) $60°$ (C) $90°$ (D) $120°$。 [統測]

最素傳說

C

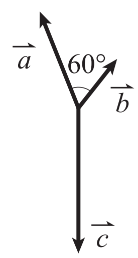
3

素養題　生活素養之向量合成

阿邦與小雛各拉一手把他們的兒子小盈提起，此時呈現平衡狀態，阿邦的拉力為 10 公斤重，小雛的拉力為 6 公斤重，且兩拉力的夾角是 60°，則小盈的體重是多少公斤？　(A) 16　(B) 14　(C) 12　(D) 10。

解題小技巧

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}\ \Rightarrow\ |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{c}|$。



解：設阿邦與小雛的拉力分別是 $\vec{a}$、$\vec{b}$

而小盈的重量是 $\vec{c}$

則 $|\vec{a}|=10$，$|\vec{b}|=6$

如圖呈現平衡狀態，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

$\Rightarrow\ \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}\ \Rightarrow\ |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{c}|$

$\Rightarrow\ |\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=10^2+2\times10\times6\times\cos 60°+6^2=196$

$\Rightarrow\ |\vec{c}|=\sqrt{196}=14$，故小盈的體重為 14 公斤

類題 1　阿樊玩單槓運動，當他雙手握住單槓，身體自然垂吊靜止不動在單槓上，左手的拉力為 36 公斤重，右手的拉力為 48 公斤重，左右手張開的角度為 90°，則阿樊的體重是多少公斤？__________

(A) 60　(B) 65　(C) 70　(D) 75。

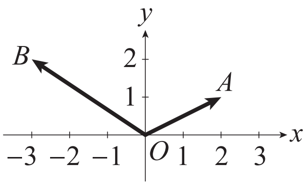
歷屆試題

基礎題

向量及其基本運算

_______ 1. 已知 $A(3,1)$、$B(2,-3)$、$C(7,-1)$、$D(x,y)$ 為坐標平面上的四個點。若 $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$，則 $x+y=$ (A) -8 (B) -4 (C) 5 (D) 6。 [109 (B)]

_______ 2. 在坐標平面上，已知 O 為原點，$A(2,1)$，$B(-3,2)$，如圖所示，若 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+t\,\overrightarrow{OA}$，其中 $-1\leq t\leq 1$，則所有滿足 P 點所形成的線段長為多少？ (A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $4\sqrt{2}$。



[113 (C)]

向量的內積

_______ 3. 若 $\vec{a}=\left(2,-2\sqrt{3}\right)$ 及 $\vec{b}=(1,0)$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為何？ (A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{3}$。 [107 (A)]

_______ 4. 若 $\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$ 且 $\vec{a}$ 垂直 $\vec{b}$，則 $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=$ (A) 17 (B) $\sqrt{17}$ (C) 3 (D) $\sqrt{7}$。 [107 (A)]

_______ 5. 已知 $\vec{u}=(1,1)$，$\vec{v}=(x+4,y-1)$ 及 $\vec{w}=(2x,y)$。若 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 垂直且 $\vec{u}$ 與 $\vec{w}$ 平行，則下列何者正確？ (A) $x=1$ (B) $y=-2$ (C) $y=1$ (D) $x=-2$。 [108 (C)]

_______ 6. 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 兩向量的夾角為 $60°$，且 $\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=3$，則 $\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=$ (A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18。 [109 (A)]

_______ 7. 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 為平面上的三向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$\left|\vec{a}\right|=5$，$\left|\vec{b}\right|=12$，$\left|\vec{c}\right|=13$。若 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ？ (A) -30 (B) -60 (C) -65 (D) -156。 [110 (C)]

_______ 8. 已知平面上兩向量 $\vec{a}=(2x+1,-3)$、$\vec{b}=(3,x-2)$，滿足 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2$，則 $x=$ ？ (A) 3 (B) 1 (C) -1 (D) -3。 [111 (C)]

______ 9. 在坐標平面上，已知△ABC 的三個頂點坐標為 $A(x,y)$、$B(2,0)$、$C(0,0)$，線段 $\overline{AB}$ 的中點為 D，線段 $\overline{BC}$ 的中點為 E，線段 $\overline{AC}$ 的中點為 F。若內積 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=0$，則下列何者為真？ (A)△$ABC$ 為銳角三角形 (B)△ABC 為鈍角三角形 (C)∠BCA 為直角 (D)∠BAC 為直角。 [112 (C)]

● 內積的應用

______ 10. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(-6,8)$ 且與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為 60°，則向量 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長為何？ (A) 5 (B) 7 (C) $5\sqrt{3}$ (D) 10。 [105 (C)]

______ 11. 若二階行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{vmatrix}=5$，且 $\begin{vmatrix} x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，則 $x+y$ 之值為何？ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 5。 [107 (B)]

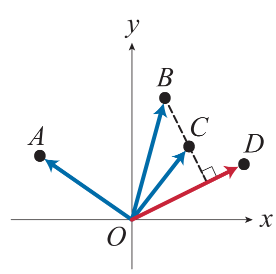
______ 12. 設 x、y 為實數，且 $x-2y=10$。試問 $f(x,y)=x^2+y^2$ 之最小值為何？ (A) 25 (B) 20 (C) 17 (D) 16。 [108 (B)]

______ 13. 設平面上三點 $A(1,1)$、$B(5,-2)$、$C(5,2)$，且 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影為 $\overrightarrow{AD}$，若 $\overrightarrow{DC}=(x,y)$，則 $x+y=$ (A) $\frac{34}{25}$ (B) $\frac{89}{25}$ (C) $\frac{104}{25}$ (D) $\frac{112}{25}$。 [109 (C)]

進階題

______ 14. 若 A、B 為直線 $3x+4y=5$ 上相異的兩點，且向量 $\overrightarrow{AB}=(a,b)$，則 $6a+8b-5=$ (A) -10 (B) -5 (C) 5 (D) 10。 [108 (A)]

______ 15. 如圖所示，以 O 為原點的直角坐標系上有四點，由左至右依序為 A、B、C、D，其中 A 落在第二象限，B、C、D 落在第一象限，且直線 BC 與直線 OD 的交點落在 O、D 兩點之間。已知∠$AOD>90°$，且 $\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{OD}$ 的內積為 0。若向量 $\overrightarrow{OD}$ 分別與向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 及 $\overrightarrow{OD}$ 求內積，依次得到 a、b、c 及 d 四個數值，則下列何者正確？



(A) $b>a>c>d$ (B) $b=c>d>a$ (C) $a>b>c>d$ (D) $d>b=c>a$。 [108 (B)]

______ 16. 在坐標平面上，3 個非零向量滿足 $2019\overrightarrow{a}+5\overrightarrow{b}+5\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$。若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 90°，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角 θ 滿足下列哪個式子？ (A) $0°<\theta<90°$ (B) $\theta=90°$ (C) $90°<\theta<180°$ (D) $\theta=180°$。 [108 (S)]

學習導航

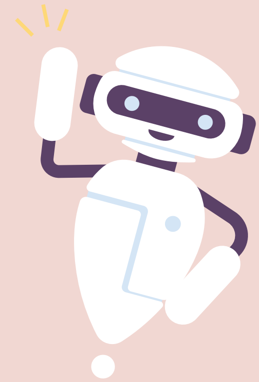
雲端教室

4 式的運算

式的運算

多項式的四則運算

多項式



4-1
多項式的四則運算

趨勢分析

本單元命題以「除法原理」、「餘因式定理」為主，都要流暢地正反向使用，另外「多項式除法」、「部分分式」、「共軛虛根」常有基本題目，務必要掌握住。

焦點主題 1 多項式的定義

(1) 形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的式子稱為「多項式」，其中 n 為零或正整數。

小提醒

多項式的 x 不可以出現在分母、次方、根號內、絕對值內。

例 $\dfrac{1}{x}$、2^x、$\sqrt{x-3}$、$|x-3|$ 都不是多項式。

(2) 已知多項式 $f(x)=5x^3+x^2-3x+8$，其中 x 的最高次方為 3（記作 $\deg f(x)=3$），則 $f(x)$ 為三次多項式。把 $f(x)$ 的每一項用加號隔開看成 $f(x)=5x^3+x^2+(-3x)+8$，其中

① 三次項為 $5x^3$，其係數為 5

② 二次項為 x^2，其係數為 1

③ 一次項為 $-3x$，其係數為 -3

④ 常數項為 8

(3) 只有常數項的多項式稱為「常數多項式」，不是 0 的常數多項式為「零次多項式」，是 0 的常數多項式為「零多項式」。例 1 是零次多項式，0 是零多項式。

(4) 設 $f(x)$ 是多項式，則 $f(0)$ 表示常數項，$f(1)$ 為所有項係數和。

觀念是非題　(　　) 1. 多項式 $f(x)=x^3+5x^7+4x^2+6$ 為三次多項式。

範例 1 老師講解	學生練習
已知 $(a-3)x^2+(b-2)x+1$ 為一次多項式，且一次項的係數為 5，試求 a、b 的值。	已知 $(a-4)x^2+(b+5)x+6$ 為常數多項式，試求 a、b 的值。

焦點主題 2　多項式的相等

(1) 若兩多項式 $f(x)$、$g(x)$ 的次數相等且同次項係數也相等，記作 $f(x)=g(x)$。
(2) 若兩多項式 $f(x)$、$g(x)$ 相等，則對於任一實數 a，都使得 $f(a)=g(a)$ 成立。

範例 2　老師講解

設 $f(x)=ax^2+(b-4)x+(3c+1)$、$g(x)=3x^2+5x+13$，若 $f(x)=g(x)$，試求 a、b、c 的值。

學生練習

設 $f(x)=(a+3)x+2b-7$、$g(x)=4x+5$，若 $f(x)=g(x)$，試求 a、b 的值。

焦點主題 3　多項式的加法、減法

當多項式相加（減）時，就是把同次項的係數相加（減），即 $ax^n \pm bx^n=(a\pm b)x^n$。

例 $(5x^2+4x+3)+(x^2+3x+5)=(5+1)x^2+(4+3)x+(3+5)=6x^2+7x+8$。

觀念是非題　(　　) 2. 兩個二次多項式相加為二次多項式。

範例 3　老師講解

設 $f(x)=7x^3+4x+5$、$g(x)=2x^3+3x-1$，試求：(1) $f(x)+g(x)$　(2) $f(x)-g(x)$。

學生練習

設 $f(x)=4x^2+5x-3$、$g(x)=x^2-3x+6$，試求：(1) $f(x)+g(x)$　(2) $f(x)-g(x)$。

焦點主題 4　多項式的乘法

依乘法的分配律展開，當兩項相乘時，係數相乘，次數相加。

(1) $ax^m \times bx^n = (a \times b)x^{m+n}$。

(2) $\left(ax^m\right)^n = a^n x^{m \times n}$。

例 $\left(5x^2+4\right)\times(3x+2) = 5x^2\times 3x + 5x^2\times 2 + 4\times 3x + 4\times 2 = 15x^3 + 10x^2 + 12x + 8$。

觀念是非題　(　) 3. $\left(x^3+1\right)\times\left(x^2+1\right) = x^5 + x^3 + x^2 + 1$。

範例 4　老師講解　學生練習

試展開 $\left(6x^2-4x+3\right)\times(2x-1)$。

試展開 $(4x+5)\times\left(x^2-2x+3\right)$。

焦點主題 5　常用的乘法公式(I)

(1) 平方差：$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$。

(2) 立方和（差）：$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) = a^3+b^3$，$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3-b^3$。

觀念是非題　(　) 4. $(2x-3)\times(2x+3) = 2x^2 - 9$。

範例 5　老師講解　學生練習

試展開下列各式：

(1) $\left(4x^3+7\right)\left(4x^3-7\right)$

(2) $(5x+3)\left(25x^2-15x+9\right)$

試展開下列各式：

(1) $(5x+6)(5x-6)$

(2) $(3x+2)\left(9x^2-6x+4\right)$

焦點主題 6　常用的乘法公式(II)

(1) 和（差）的平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。

(2) 和（差）的立方公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

範例 6　老師講解　　　　學生練習

試展開下列各式：

(1) $(7x+5)^2$　(2) $(3x+2)^3$。

試展開下列各式：

(1) $(3x+4)^2$　(2) $(2x+1)^3$。

焦點主題 7　多項式的除法（長除法、分離係數法）

(1) 若 A、B 為多項式，則 A 除以 B 記作 $A \div B$，或唸作「A 被 B 除」或「B 除 A」。

(2) 已知 $A=3x^3+10x^2+13x+9$、$B=x^2+2x+1$，則 $A \div B$ 的算法如下：

【長除法】

$3x^3 \div x^2=3x$

$4x^2 \div x^2=4$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x + 4 \\
\hline
x^2+2x+1 & 3x^3+10x^2+13x+9 \\
 & 3x^3+6x^2+3x \\
\hline
 & 4x^2+10x+9 \\
 & 4x^2+8x+4 \\
\hline
 & 2x+5
\end{array}
$$

商式為 $3x+4$，餘式為 $2x+5$

【分離係數法】

$3 \div 1=3$

$4 \div 1=4$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3 + 4 \\
\hline
1+2+1 & 3+10+13+9 \\
 & 3+6+3 \\
\hline
 & 4+10+9 \\
 & 4+8+4 \\
\hline
 & 2+5
\end{array}
$$

商式為 $3x+4$，餘式為 $2x+5$

(3) 多項式的除法運算必須計算到餘式等於 0（整除）或餘式的次數低於除式的次數。

(4) 當多項式有缺項時，缺項的係數以 0 來表示。例 $5x^3+4=5x^3+0x^2+0x+4$。

觀念是非題　（　）5. 任何多項式除以 $(x+3)$ 的餘式一定為常數。

範例 7　老師講解　學生練習

試求 $8x^3+6x^2+9x+5$ 除以 $2x^2+1$ 的商式、餘式。

試求 $2x^3+3x^2+8x+5$ 除以 x^2+x+3 的商式、餘式。

焦點主題 8 除法原理

若多項式 A 除以多項式 B（$\neq 0$）的商式為 Q、餘式為 R，則 $A=B\times Q+R$。

小提醒　被除式 ＝ 除式 × 商式 ＋ 餘式。

觀念是非題　（　）6. 若多項式 A 除以多項式 B（$\neq 0$）的商式為 Q，且餘式為 R，則 $B=\dfrac{A-R}{Q}$。

範例 8　老師講解　學生練習

已知多項式 $f(x)$ 除以 $3x^2+4x+5$ 的商式為 $4x+1$，餘式為 6，試求 $f(2)$。

已知多項式 $f(x)$ 除以 $2x^2+5x+1$ 的商式為 $x+2$，餘式為 $5x+1$，試求 $f(3)$。

焦點主題 9　綜合除法

多項式 $4x^3+2x^2+2x+3$ 除以 $x-1$ 的綜合除法算式如右，

(1) 第一列是被除式的係數：4　+2　+2　+3。

(2) 令除式 $x-1=0$ $\Rightarrow$ $x=1$，把 1 放在算式的右側當作乘數。

(3) 第一列與運算後的第二列相加得第三列（商式係數，餘式）。

(4) 因此除法運算的結果：商式為 $4x^2+6x+8$，餘式為 11。

(5) 倘若多項式除以 $2(x-1)$，則商式需再除以 2，餘不變。

$$
\begin{array}{cccc|c}
4 & +2 & +2 & 3 & 1 \\
 & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + & \\
 & +4 & +6 & +8 & \\
\hline
\underbrace{4 \quad +6 \quad +8}_{\text{商式係數}} & & & \underset{\text{餘式}}{\underset{\uparrow}{,11}} &
\end{array}
$$

範例 9　老師講解　　　　學生練習

(1) 求 $3x^3+x^2+1$ 除以 $x-2$ 的商式及餘式。

(2) 求 $10x^3+x^2+5x+2$ 除以 $2x-1$ 的商式及餘式。

(1) 求 $2x^3+x^2+4$ 除以 $x-3$ 的商式及餘式。

(2) 求 $12x^3+2x^2+x+7$ 除以 $3x-1$ 的商式及餘式。

焦點主題 10　連續的綜合除法

利用連續的綜合除法，可以將多項式以某個一次式的次方來組合。

例 令 $f(x)=x^3+x^2+x+1=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，以連續的綜合除法得 $(x-2)^3+7(x-2)^2+17(x-2)+15$。

$$\begin{array}{rrrr|l}
1\ + & 1\ + & 1\ + & 1 & 2 \\
+ & 2\ + & 6\ + & 14 & \\
\hline
\multicolumn{1}{r}{1\ +} & \multicolumn{1}{r}{3\ +} & \multicolumn{1}{r|}{7} & \multicolumn{1}{r}{15} & \longleftarrow \text{先除以 } x-2 \text{ 第一次，餘式為 } d \\
+ & 2\ + & \multicolumn{1}{r|}{10} & & \\
\cline{1-3}
\multicolumn{1}{r}{1\ +} & \multicolumn{1}{r|}{5} & \multicolumn{1}{r}{17} & & \longleftarrow \text{再除以 } x-2 \text{ 第二次，餘式為 } c \\
+ & \multicolumn{1}{r|}{2} & & & \\
\cline{1-2}
\multicolumn{1}{r}{1\ ,} & \multicolumn{1}{r}{7} & & & \longleftarrow \text{後除以 } x-2 \text{ 第三次，餘式為 } b \\
\uparrow & & & & \text{最後得 } a
\end{array}$$

範例 10　老師講解　　　　學生練習

已知 x^3-5x^2+8x+1
$=a(x-3)^3+b(x-3)^2+c(x-3)+d$，
試求 a、b、c、d 的值。

已知 $2x^3+x^2+x+1$
$=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，
試求 a、b、c、d 的值。

4-2

餘式與因式定理

C

焦點主題 11 餘式定理

(1) 多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式為 $f(a)$。（令 $x-a=0$ 的 x 值，代入 $f(x)$ 就是餘式）

(2) 多項式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的餘式為 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$，其中 $a\neq 0$。

4

範例 11 老師講解 學生練習

老師講解	學生練習
試求 $f(x)=x^5+3x^4+7$ 除以 $x-2$ 的餘式。	試求 $f(x)=3x^9+4x^8+5$ 除以 $x-1$ 的餘式。

焦點主題 12 因式定理

(1) 已知 A、B、C 為多項式，若 $A=B\times C$，則 B、C 都是 A 的因式，也就是 A 可以被 B 或 C 整除。例 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$，則 x^2+5x+6 有因式 $x+2$、$x+3$。

(2) 若 $x-a$ 為多項式 $f(x)$ 的因式，則 $f(a)=0$，反之亦然。

(3) 若 $ax-b$ 為多項式 $f(x)$ 的因式，則 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$，其中 $a\neq 0$，反之亦然。

範例 12 老師講解 學生練習

老師講解	學生練習
已知多項式 $f(x)=5x^{13}+3x^{10}-8$，判斷 $x-1$ 是否為 $f(x)$ 的因式。	已知多項式 $f(x)=x^3+5x^2+x-28$，判斷 $x-2$ 是否為 $f(x)$ 的因式。

4-2　邁向統測之路

整係數一次因式檢驗法

已知多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的係數都是整數，若 $ax+b$ 為 $f(x)$ 的一次因式，其中 a、b 為互質整數，則 a 為 a_n 的因數且 b 為 a_0 的因數。

例 因式分解 $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$。

解：$\because$ 最高次項係數 1 的因數為 ±1，而常數項 6 的因數為 ±1、±2、±3、±6，

$\therefore$ $f(x)$ 的可能因式為 $\pm(x\pm1)$、$\pm(x\pm2)$、$\pm(x\pm3)$、$\pm(x\pm6)$。

而 $f(1)\neq0$，$f(-1)=0$，$f(2)\neq0$，$f(-2)=0$，$f(3)\neq0$，$f(-3)=0$，$f(6)\neq0$，$f(-6)\neq0$，

由因式定理可知，$f(x)$ 的因式為 $x+1$、$x+2$、$x+3$，故 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$。

老師講解	學生練習
試因式分解 $f(x)=x^3+x^2-10x+8$。	試因式分解 $f(x)=x^3-3x^2-4x+12$。

4-3

多項式方程式

焦點主題 13 一元二次方程式的解（因式分解、十字交乘法）

若方程式 $A(x)\times B(x)=0$，則 $A(x)=0$ 或 $B(x)=0$。例 $(x-1)(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$ 或 $x=2$。

因式分解	十字交乘法
解方程式：$x(x-3)+4(x-3)=0$。 解：方程式提出公因式 $x-3$ $(x-3)(x+4)=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$ 或 $x=-4$。	解方程式：$x^2-3x-10=0$。 解： $\left.\begin{array}{ccc} x & \times & -5 \\ x & & 2 \end{array}\right\} 2x+(-5x)=-3x$ $(x-5)(x+2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=5$ 或 $x=-2$

觀念是非題 （　）1. 方程式 $x(2x-1)=x(x+2)$，則 $2x-1=x+2$，故 $x=3$。

範例 13 老師講解 學生練習

試解下列的方程式：

(1)$x^2-7x+12=0$　(2)$2x^2+5x+3=0$

試解下列的方程式：

(1)$x^2-9x+14=0$　(2)$3x^2+16x+5=0$

焦點主題 14　一元二次方程式的公式解

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

範例 14　老師講解　　學生練習

試解方程式 $2x^2+5x+1=0$。

試解方程式 $3x^2+7x+3=0$。

焦點主題 15　一元二次方程式的根與係數

若方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有兩根 α、β，則兩根和 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$、兩根積 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。

範例 15　老師講解　　學生練習

設 α、β 為 $2x^2+5x+1=0$ 的兩根，試求：
(1) $(\alpha+2)(\beta+2)$　(2) $\alpha^2+\beta^2$。

設 α、β 為 $3x^2+7x+3=0$ 的兩根，試求：
(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$　(2) $\alpha^2+\beta^2$。

焦點主題 16 認識複數

為了讓方程式 $x^2=-1$ 有解，我們在實數之外，規定虛數 $i=\sqrt{-1}$ 當作解，即 $i^2=-1$。

(1) 當實數 $a>0$ 時，規定 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$。例 $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$，$\sqrt{-4}=\sqrt{4}i=2i$。

(2) i 的次方：$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，且 $i+i^2+i^3+i^4=0$。

(3) 當 n 是正整數，$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i^1=i$，$i^{4n+2}=i^2=-1$，$i^{4n+3}=i^3=-i$。（四次一循環）

(4) 形如 $a+bi$（a、b 為實數）的數稱為「複數」，其中 a 為「實部」，b 為「虛部」。

(5) 若 $a+bi=c+di$（a、b、c、d 為實數），則 $a=c$ 且 $b=d$。（實部相等且虛部相等）

範例 16　老師講解　　學生練習

老師講解：若 $(a+3)+i=5+(b-7)i$，其中 a、b 為實數，試求 a、b 的值。

學生練習：設 $z_1=(a-1)+2bi$、$z_2=4+6i$， 且 a、b 為實數，若 $z_1=z_2$，試求 a、b 的值。

焦點主題 17 複數的加、減法

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$。

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$。

範例 17　老師講解　　學生練習

老師講解：設 $z_1=3+4i$、$z_2=1-2i$，試求：
(1)z_1+z_2　(2)z_1-3z_2。

學生練習：設 $z_1=2-3i$、$z_2=1+4i$，試求：
(1)z_1-z_2　(2)$2z_1+z_2$。

焦點主題 18 複數的乘法

複數乘法依分配律展開：$(a+bi)\times(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$。

範例 18 老師講解 學生練習

試求 $(2+i)\times(3-4i)$。

試求 $(3-2i)\times(1+4i)$。

焦點主題 19 共軛複數、複數的除法

(1) 若複數 $z=a+bi$（a、b 為實數），則 $a-bi$ 稱為 $a+bi$ 的「共軛複數」，記作 $\bar{z}$（唸作 z bar），即 $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$。例 $\overline{1+2i}=1-2i$，$\overline{3-4i}=3+4i$。

(2) 設 $z=a+bi$（a、b 為實數），則 $z\times\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$。

(3) 複數的除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)\times(c-di)}{(c+di)\times(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$。（$c^2+d^2\neq 0$）

範例 19 老師講解 學生練習

試求 $\dfrac{13+11i}{3+i}$。（寫成 $a+bi$ 的形式）

試求 $\dfrac{5+10i}{4+3i}$。（寫成 $a+bi$ 的形式）

C

4

焦點主題 20　一元二次方程式的虛根

設 a、b、c 均為實數，一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

若 $b^2-4ac<0$，則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是虛數，方程式有兩個虛根且互為共軛複數。

小提醒　若實係數方程式有虛根 $p+qi$（p、q 為實數），則必有另一根 $p-qi$。

範例 20　老師講解　　　　學生練習

試解方程式 $x^2+2x+5=0$。

試解方程式 $x^2+4x+13=0$。

焦點主題 21　一元二次方程式的判別式

設 a、b、c 為實數，一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根的性質如下：

判別式	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
根的性質	兩相異實根	兩相等實根	兩共軛虛根

範例 21　老師講解　　　　學生練習

設 k 為實數，若方程式 $9x^2+6x+k=0$ 有相異實根，試求 k 的範圍。

設 k 為實數，若方程式 $x^2+8x+k=0$ 有共軛虛根，試求 k 的範圍。

4-3 邁向統測之路

實係數方程式的虛根共軛成對

若實係數方程式有虛根 $a+bi$（a、b 為實數），則必有另一根 $a-bi$。（兩根互為共軛）

老師講解	學生練習
設 a、b 為實數且 $i=\sqrt{-1}$，若 $2+\sqrt{3}\,i$ 為 $2x^2+ax+b=0$ 之一根，則 $a+b=$ ？	已知 a 和 c 為實數，若複數 $a+2i$ 為一元二次方程式 $x^2+2x+c=0$ 的一根，則 $c=$ ？

4-4

分式與根式的運算

C

4

焦點主題 22 分式

設 $A(x)$、$B(x)$ 為多項式且 $B(x) \neq 0$，則形如$\dfrac{A(x)}{B(x)}$的式子稱為「分式」，其運算與分數一樣。

範例 22　老師講解　學生練習

試計算$\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{7}{x^2-9}$。

試計算$\dfrac{3}{x+5}-\dfrac{2}{x^2-25}$。

焦點主題 23 分式方程式

解分式方程式時，先以乘法消去分母，再來求解，倘若解會使分母為 0（不合），須剔除。

範例 23　老師講解　學生練習

解方程式$\dfrac{8}{x}+\dfrac{3x}{x+8}=3$。

解方程式$\dfrac{4}{x}+\dfrac{x}{x+6}=1$。

焦點主題 24 部分分式分解

把一個真分式（分子次數小於分母次數）拆解成幾個真分式的和稱為「部分分式分解」。

例 $\dfrac{f(x)}{(x+a)(x+b)}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}$，$\dfrac{f(x)}{(x+a)\left(x^2+bx+c\right)}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$。

範例 24　老師講解　學生練習

老師講解：若 $\dfrac{4x-7}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$，試求 A、B。

學生練習：若 $\dfrac{9x-22}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$，試求 A、B。

焦點主題 25 三次根式

(1) 若實數 b 滿足 $b^3=a$，則 b 稱為「a 的三次方根」，記作 $\sqrt[3]{a}$。例 $2^3=8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8}=2$。

(2) 若 a、b 為實數，則 $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=\sqrt[3]{a^3}=a$，$\sqrt[3]{a^2}=\left(\sqrt[3]{a}\right)^2$，$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$。

範例 25　老師講解　學生練習

老師講解：試求 $\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}\right)$。

學生練習：試求 $\left(\sqrt[3]{2}+3\right)\left(\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}+9\right)$。

統測常考題

範例 1 除法原理與餘式定理

設一個次數不小於 3 之多項式 $f(x)$，以 $x+2$ 除之餘 -6，以 $x-3$ 除之餘 9。若以 $(x+2)(x-3)$ 除 $f(x)$ 所得餘式為 $r(x)$，則 $r(1)$ 之值為 (A) -6 (B) 0 (C) 3 (D) 9。 [統測]

解題小技巧

(1) 除法原理：$A \div B = Q \cdots R \quad \Leftrightarrow \quad A = B \times Q + R$。

(2) 餘式定理：多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式為 $f(a)$。

解：(1) $\because$ $f(x)$ 以 $x+2$ 除之餘 -6，以 $x-3$ 除之餘 9

$\therefore$ $f(-2)=-6$，$f(3)=9$

(2) 設以 $(x+2)(x-3)$ 除 $f(x)$ 的餘式 $r(x)=ax+b$

而商式為 $Q(x)$，則 $f(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$f(-2)=(-2+2)(-2-3)Q(-2)+a\times(-2)+b=-2a+b$

$f(3)=(3+2)(3-3)Q(3)+a\times 3+b=3a+b$

由 (1) 和 (2) 可知 $\begin{cases} -2a+b=-6 \cdots ① \\ 3a+b=9 \quad \cdots ② \end{cases}$

② $-$ ① $\Rightarrow$ $5a=15$ $\Rightarrow$ $a=3$

$a=3$ 代入 ② $\Rightarrow$ $9+b=9$ $\Rightarrow$ $b=0$

故 $r(x)=3x$，因此 $r(1)=3$

類題 1 已知 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f\left(\frac{3}{2}\right)=27$，$f\left(-\frac{5}{3}\right)=8$。若 $f(x)$ 除以 $6x^2+x-15$ 的餘式為 $ax+b$，則 $a+b=$______

(A) 4 (B) 6 (C) 18 (D) 24。 [統測]

類題 2 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 得到商式 $g(x)$ 以及餘數 3，且 $g(x)$ 除以 $x-2$ 得到餘數 6，則 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘數為何？______

(A) 6 (B) 9 (C) 15 (D) 21。 [108 (A)]

統測常考題

範例 2 因式定理

已知 m、n 為實數，$Q(x)$ 為二次多項式。若 $x^4 - mx^3 - x^2 - 5x + n = \left(x^2 - 3x + 2\right)Q(x)$，則 $2m + n =$ (A) -6 (B) -2 (C) 4 (D) 8。 [統測]

解題小技巧

設 $f(x)$ 為多項式，

(1) 若 $(x-a)(x-b)$ 為 $f(x)$ 的因式，則 $x-a$ 與 $x-b$ 也是 $f(x)$ 的因式。

(2) 若 $x-a$ 為 $f(x)$ 的因式，則 $f(a)=0$。

解：令 $f(x) = x^4 - mx^3 - x^2 - 5x + n$

$\because$ $f(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)Q(x) = (x-1)(x-2)Q(x)$

$\therefore$ $x-1$ 與 $x-2$ 均為 $f(x)$ 的因式

由因式定理知

$f(1) = 1 - m - 1 - 5 + n = 0 \Rightarrow -m + n = 5 \cdots ①$

$f(2) = 16 - 8m - 4 - 10 + n = 0 \Rightarrow -8m + n = -2 \cdots ②$

① $-$ ② $\Rightarrow 7m = 7 \Rightarrow m = 1$

$m = 1$ 代入 ① $\Rightarrow -1 + n = 5 \Rightarrow n = 6$

故 $2m + n = 2 \times 1 + 6 = 8$

類題 1 若 $x^2 + x - 2$ 為多項式 $x^3 + ax^2 + 3x + b + 1$ 的因式（其中 a、b 皆為實數），則 $a - b =$ ______

(A) 17 (B) 3 (C) -4 (D) -15。 [統測]

類題 2 若 $x^2 - 3x + 2$ 是 $ax^3 + 3x^2 + bx - 2$ 的因式，則 $a + 3b =$ ______

(A) $-\dfrac{4}{3}$ (B) -1 (C) $-\dfrac{1}{3}$ (D) 0。 [統測]

統測常考題

範例 3 部分分式的分解

設 $\dfrac{5x^2+2x-4}{(x-1)(x^2+x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x-1}$，則 $A+B+C=$ (A)3 (B)4 (C)5 (D)6。 [統測]

解題小技巧

部分分式的分子係數求法：

利用同乘把等式的分母消去，再由等式兩邊恆等的關係，同次項的係數也要相等。

解：原式兩側同乘以 $(x-1)\left(x^2+x-1\right)$

$$\Rightarrow \quad 5x^2+2x-4$$

$$=A\left(x^2+x-1\right)+(Bx+C)(x-1)=\left(Ax^2+Ax-A\right)+\left(Bx^2-Bx+Cx-C\right)$$

$$=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(-A-C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \cdots ① \\ A-B+C=2 \cdots ② \\ -A-C=-4 \cdots ③ \end{cases}$$

由 ①＋② $\Rightarrow$ $2A+C=7\cdots$④

由 ③＋④ $\Rightarrow$ $A=3$

$A=3$ 代入 ① $\Rightarrow$ $3+B=5$ $\Rightarrow$ $B=2$

$A=3$ 代入 ③ $\Rightarrow$ $-3-C=-4$ $\Rightarrow$ $C=1$

故 $A+B+C=3+2+1=6$

類題 1 已知 A、B、C 為常數，且對任意 x 均滿足

$\dfrac{3x^2+9x-3}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$，則 $B=$ ______

(A) -1 (B)0 (C)1 (D)2。 [105 (C)]

類題 2 已知 a、b、c 為實數。若 $x\neq\dfrac{3}{2}$ 時，$\dfrac{4x^2-6x-3}{(2x-3)^2}=a+\dfrac{b}{2x-3}+\dfrac{c}{(2x-3)^2}$

恆成立，則 $a+b+2c=$ ______

(A) -4 (B) -2 (C)2 (D)4。 [統測]

歷屆試題

基礎題

多項式的四則運算

______ 1. 設 $f(x)=3x^3-7x^2+4x-6=a+b(x-2)+c(x-2)^2+d(x-2)^3$，則 $a-b-c-d=$
(A) -28　(B) -26　(C) -22　(D) -18。 [109 (A)]

______ 2. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得之餘式為 $3x^2+5x-2$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 所得之餘式為　(A) -4　(B) $2x-5$　(C) 6　(D) $8x-5$。 [109 (C)]

______ 3. 若四次多項式 $ax^4+bx^3+6x^2+5x+2$ 除以 $(x+1)^2$ 所得的餘式為 $3x+4$，則 $a+b=$？　(A) -12　(B) -6　(C) -4　(D) -2。 [111 (C)]

______ 4. 化簡 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-1\right)\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+1\right]=$？　(A) $6+5\sqrt{2}$　(B) $8-5\sqrt{2}$
(C) $6-5\sqrt{2}$　(D) $-8+5\sqrt{2}$。 [113 (C)]

餘式與因式定理

______ 5. 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為多項式，若以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 所得餘式為 $3x-4$，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式為 5，則以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 所得餘式為　(A) -4
(B) -3　(C) 3　(D) 4。 [108 (C)]

______ 6. 設 $f(x)=2x^3+x^2-7x-6$，則下列何者不為 $f(x)$ 的因式？　(A) $x+1$
(B) $x-2$　(C) $2x+3$　(D) $2x-1$。 [109 (A)]

多項式方程式

______ 7. 已知 $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，且 $\bar{z}$ 為其共軛複數。若 $\dfrac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$，其中 a、b 為實數，則點 (a,b) 在第幾象限？　(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四。 [107 (C)]

______ 8. 已知 α、β 及 -3 為方程式 $x^3-x^2-11x+3=0$ 的三個相異解。求 $|\alpha-\beta|=$
(A) $2\sqrt{3}$　(B) 4　(C) 6　(D) $4\sqrt{5}$。 [109 (B)]

______ 9. 已知 $i=\sqrt{-1}$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=a+bi$，則 $a+b=$？　(A) $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$
(B) -1　(C) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$　(D) 1。 [110 (C)]

______10. 已知方程式 $4x^2-2x-5=0$ 的兩根為 α、β，則 $\alpha\beta=$ ？

(A) $\frac{-5}{4}$ (B) $\frac{-1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{4}$。 [112 (C)]

______11. 已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 a、b 為實數。若 a、$b+2i$、$-1+ai$ 為實係數三次方程式 $f(x)=0$ 之三根，則下列多項式何者可能為 $f(x)$ ？ (A)x^3-x-10 (B)x^3+x+10 (C)$x^3-4x^2+9x-10$ (D)$x^3+4x^2+9x+10$。 [112 (C)]

分式與根式的運算

______12. 若 $\frac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$，其中 A、B 為實數，則下列何者正確？

(A)$A=2$ (B)$B=1$ (C)$A=-2$ (D)$B=-1$。 [110 (C)]

______13. 若 $\frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$，則 $A+B+C=$ ？ (A)1 (B)5 (C)10 (D)15。 [111 (C)]

______14. 下列何者正確？

(A) 對任意實數 x，$\sqrt[3]{x^3}=x$ (B) 對任意實數 x，$\sqrt{4+x^2}=2+x$

(C) 對任意實數 x，$\sqrt{x^2}=x$ (D) 對任意實數 x，$\sqrt[3]{8-x^3}=2-x$。 [112 (C)]

______15. 若 $\frac{5}{(2x+1)(x-2)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-2}$，其中 A、B 為實數，則 $3A+2B=$ ？ (A) -7 (B) -6 (C) -5 (D) -4。 [113 (C)]

進階題

______16. 若一元二次方程式 $x^2+(a-5)x+a+3=0$ 有兩正根，滿足 a 的實數解為 $m<a\leq n$，則 $m+n=$ (A) -4 (B) -3 (C) -2 (D)1。 [107 (C)]

______17. 設 α、β 為方程式 $x^2+5x+k=0$ 之二根，已知多項式 $f(x)=2x^2+7x+5$ 除以 $x-\alpha$、$x-\beta$ 所得的餘式分別為 -1、2，則 $k=$ (A)4 (B)5 (C)6 (D)7。 [109 (C)]

______18. 已知三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $f(1)=f(2)=f(-2)=2$，且 $f(-1)=8$，則下列何者正確？ (A)$a=-1$ (B)$b=1$ (C)$c=-4$ (D)$d=4$。 [110 (C)]

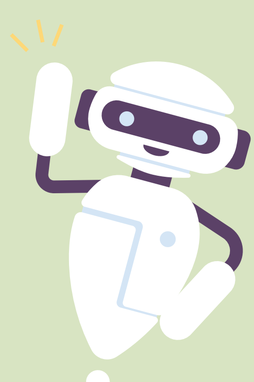
學習導航

雲端
教室

5 直線與圓

直線與圓

直線方程式



5-1

直線方程式

趨勢分析

本單元的「直線方程式」是坐標平面的基本工具，時常與「圓」、「圓錐曲線」合併命題。而「圓」的問題最好搭配圖形來思考，並輔以圓的知識來解題。

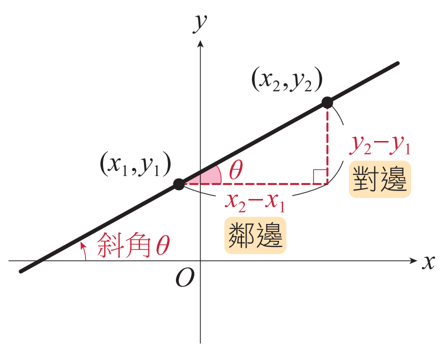
焦點主題 1 直線的斜率、斜角

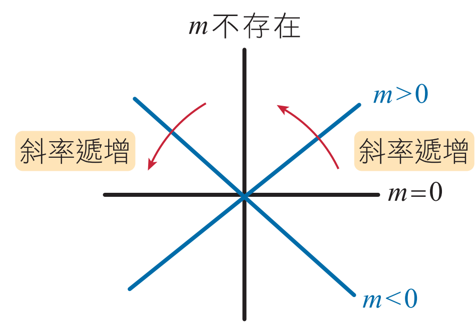
(1) 直線上任取相異的兩點 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，則此直線的斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$。

小提醒 水平線的斜率為 0，鉛垂線的斜率不存在。

(2) 直線與 x 軸正向所夾的最小正角為此直線的斜角，而 $0° \leq$ 斜角 $< 180°$。

(3) 若直線的斜角為 θ，則此直線的斜率 $m=\tan\theta$。





觀念是非題 (　) 1. 坐標平面上，斜率為正的直線是由左往右下降。

範例 1	老師講解	學生練習

老師講解

設三點 $A(2, 1)$、$B(4, 7)$、$C(4, 9)$，試求：
(1) 直線 AB 的斜率　(2) 直線 BC 的斜率。

學生練習

設三點 $A(1, 5)$、$B(7, 8)$、$C(10, 8)$，試求：
(1) 直線 AB 的斜率　(2) 直線 BC 的斜率。

焦點主題 2　三點共線

若三個相異點在同一條直線上（無法圍成三角形），則任取兩點來算的斜率都相等。

觀念是非題　（　）2. 三點 $(0, 0)$、$(1, 2)$、$(3, 6)$ 位於同一條直線上。

C

範例 2　老師講解　　學生練習

若 $A(0, 1)$、$B(3, 7)$、$C(8, k)$ 三點共線，試求 k 值。

若 $P(1, 2)$、$Q(3, 12)$、$R(7, k)$ 三點共線，試求 k 值。

5

焦點主題 3　直線方程式（點斜式）

通過點 (x_0, y_0) 且斜率 m 的直線方程式為 $y - y_0 = m(x - x_0)$。

觀念是非題　（　）3. 直線 $y - 1 = 5(x - 4)$ 的斜率為 5，且通過點 $(1, 4)$。

範例 3　老師講解　　學生練習

試求通過點 $(1, 2)$，且斜率為 3 的直線方程式。（寫成 $ax + by + c = 0$）

試求通過點 $(2, 3)$，且斜率為 4 的直線方程式。（寫成 $ax + by + c = 0$）

焦點主題 4 直線方程式（兩點式）

(1) 通過相異兩點 (x_1, y_1)、(x_1, y_2) 的直線方程式為 $x = x_1$。（鉛垂線上點的 x 坐標恆相等）

(2) 通過相異兩點 (x_1, y_1)、(x_2, y_1) 的直線方程式為 $y = y_1$。（水平線上點的 y 坐標恆相等）

(3) 其他求通過相異兩點的直線方程式：先以兩點來求直線斜率，再用點斜式。

範例 4

老師講解

已知兩點 $A(3, 4)$、$B(5, 9)$，試求：
(1) 直線 AB 的斜率　(2) 直線 AB 方程式。

學生練習

已知兩點 $P(1, 3)$、$Q(7, 7)$，試求：
(1) 直線 PQ 的斜率
(2) 直線 PQ 方程式。

焦點主題 5 直線的截距

(1) 當直線與 x 軸恰好交於一點 $(a, 0)$ 時，則 a 為該直線的 x 截距。
(2) 當直線與 y 軸恰好交於一點 $(0, b)$ 時，則 b 為該直線的 y 截距。

範例 5

老師講解

試填寫下列表格：

	直線方程式	x 截距	y 截距
(1)	$2x + y = 4$		
(2)	$x - 3y - 6 = 0$		

學生練習

試填寫下列表格：

	直線方程式	x 截距	y 截距
(1)	$x - 4y = 12$		
(2)	$2x + 5y - 10 = 0$		

焦點主題 6　直線方程式（斜截式）

斜率 m 且 y 截距為 b 的直線方程式為 $y=mx+b$。（斜截式的「截」是 y 截距，不是 x 截距）

小提醒　當條件是斜率 m、x 截距為 a，即通過點 $(a, 0)$ 時，要用點斜式來求直線。

C

範例 6　老師講解

設直線的斜率為 $\frac{4}{3}$，其 y 截距為 2，

試求此直線的方程式。

（寫成 $ax+by+c=0$）

學生練習

設直線的斜率為 $\frac{7}{5}$，其 y 截距為 -3，

試求此直線的方程式。

（寫成 $ax+by+c=0$）

5

焦點主題 7　直線方程式（截距式）

x 截距為 a，y 截距為 b 的直線方程式為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，其中 a、$b\neq 0$。

觀念是非題　（　）4. 直線 $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ 的 x、y 截距分別為 2、3。

範例 7　老師講解

設直線的 x、y 截距分別為 -3、5，

試求此直線的方程式。

（寫成 $ax+by+c=0$）

學生練習

設直線的 x、y 截距分別為 7、-2，

試求此直線的方程式。

（寫成 $ax+by+c=0$）

焦點主題 8 直線方程式（一般式）

(1) 設 a、$b \neq 0$，則方程式 $ax+by+c=0$ 的圖形是一條斜直線，斜率為 $-\dfrac{a}{b}$。

(2) 方程式 $x=c$ 是鉛垂直線（沒有斜率），方程式 $y=c$ 是水平直線（斜率為 0）。

範例 8　老師講解　學生練習

老師講解：

試填寫下列表格：

	直線方程式	斜率
(1)	$6x+3y+5=0$	
(2)	$x-3y=6$	

學生練習：

試填寫下列表格：

	直線方程式	斜率
(1)	$2x+10y-1=0$	
(2)	$8x-2y=7$	

焦點主題 9 兩直線的平行

若兩直線互相平行，則兩直線的斜率相等（傾斜程度相同）。

觀念是非題　（　）5. 坐標平面上的矩形一定有兩邊所在的直線斜率相等。

範例 9　老師講解　學生練習

老師講解：

設直線 L_1 通過 $A(3, 1)$、$B(k, 13)$ 兩點，且與直線 L_2：$3x-y+1=0$ 互相平行，試求 k 之值。

學生練習：

設直線 L_1 通過 $A(5, 3)$、$B(k, 23)$ 兩點，且與直線 L_2：$4x-y+2=0$ 互相平行，試求 k 之值。

焦點主題 10 平行線的假設

平行於 $ax+by+c=0$ 的直線方程式可以假設為 $ax+by+k=0$。（x、y 係數相同且 $k\neq c$）

範例 10 老師講解 學生練習

已知直線 $L：3x+4y+5=0$，試求通過點 $(1,2)$ 且平行 L 的直線方程式。

已知直線 $L：4x+5y+6=0$，試求通過點 $(3,1)$ 且平行 L 的直線方程式。

C

5

焦點主題 11 兩直線的垂直

若兩直線互相垂直（不是水平、鉛垂線），則斜率相乘為 -1（互為相反倒數）。

小提醒 若兩個向量互相垂直，則其內積為 0。

觀念是非題 （　）6. 兩直線 $x+2y+3=0$ 與 $x-2y+3=0$ 互相垂直。

範例 11 老師講解 學生練習

設直線 L_1 通過 $A(9,5)$、$B(1,k)$ 兩點，且與直線 $L_2：2x-3y+4=0$ 互相垂直，試求 k 之值。

設直線 L_1 通過 $A(10,1)$、$B(4,k)$ 兩點，且與直線 $L_2：3x-4y+5=0$ 互相垂直，試求 k 之值。

焦點主題 12 垂直線的假設

垂直於 $ax+by+c=0$ 的直線方程式可以假設為 $bx-ay+k=0$。

範例 12 老師講解 學生練習

已知直線 L：$4x+5y+6=0$，試求通過點 $(2,1)$ 且垂直 L 的直線方程式。

已知直線 L：$5x+6y+7=0$，試求通過點 $(4,3)$ 且垂直 L 的直線方程式。

焦點主題 13 直線的距離公式

(1) 點 (x_0, y_0) 到直線 $ax+by+c=0$ 的距離 $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

(2) 兩平行線 $ax+by+c_1=0$、$ax+by+c_2=0$（x、y 係數要相同）的距離為 $d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

範例 13 老師講解 學生練習

(1) 求點 $(2,3)$ 到直線 $5x+12y+6=0$ 的距離。
(2) 兩直線 $8x+6y+47=0$、$8x+6y+17=0$ 的距離為何？

(1) 求點 $(7,5)$ 到直線 $3x+4y+9=0$ 的距離。
(2) 兩直線 $12x+5y+76=0$、$12x+5y+11=0$ 的距離為何？

5-1　邁向統測之路

三角形各邊的特殊直線方程式

(1) 中線方程式：邊的中點與對應頂點相連的直線。

(2) 中垂線方程式：通過邊的中點，且與邊互相垂直的直線（兩者斜率相乘為 -1）。

(3) 高的方程式：從邊的對應頂點，作直線垂直該邊（兩者斜率相乘為 -1）。

C

老師講解	學生練習
設 $A(4,8)$、$B(0,6)$、$C(2,0)$ 為$\triangle ABC$ 的三個頂點，試求： (1) $\overline{BC}$ 邊上的中線方程式。 (2) $\overline{BC}$ 邊上的中垂線方程式。	已知$\triangle ABC$ 三頂點為 $A(3,5)$、$B(4,0)$、$C(0,2)$，試求： (1) $\overline{BC}$ 邊上的中線方程式。 (2) $\overline{BC}$ 邊上的中垂線方程式。

5

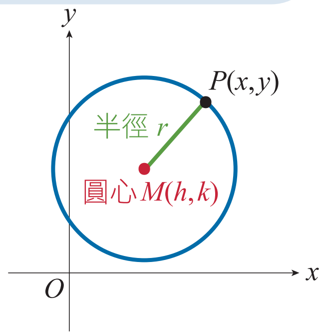
5-2 圓方程式

焦點主題 14 圓方程式（標準式）

(1) 平面上有一定點 M，所有到 M 點距離是 r 的點 P（$r>0$）所形成的圖形為「圓」，而 M、r 分別稱為圓的「圓心」、「半徑」。

(2) 以點 $M(h,k)$ 為圓心，半徑 r 的圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

例 以點 $(1,2)$ 為圓心，半徑 3 的圓為 $(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$。



範例 14 老師講解 學生練習

已知一圓的圓心 $Q(2,3)$，且圓通過點 $P(7,15)$，試求此圓的方程式。

已知一圓的圓心 $Q(4,1)$，且圓通過點 $P(7,5)$，試求此圓的方程式。

焦點主題 15 圓標準式的圓心、半徑

若圓方程式 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，則其圓心為 (h,k)、半徑為 r，其中 $r>0$。

範例 15 老師講解 學生練習

試填寫下列表格：

	圓方程式	圓心	半徑
(1)	$(x-2)^2+(y-1)^2=16$		
(2)	$x^2+(y+3)^2=100$		

試填寫下列表格：

	圓方程式	圓心	半徑
(1)	$(x-3)^2+(y-5)^2=36$		
(2)	$(x+7)^2+y^2=64$		

焦點主題 16 圓方程式（一般式）

(1) 圓的標準式展開來可以寫成 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，稱為圓的「一般式」。

(2) 圓方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的圓心 $\left(-\dfrac{d}{2},\ -\dfrac{e}{2}\right)$、半徑為 $\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$。

觀念是非題 （　）1. 已知圓方程式 $x^2+y^2-2x+2y-7=0$，則方程式 $2x^2+2y^2-4x+4y-14=0$ 的圖形也是圓。

C

範例 16 老師講解 | 學生練習

試求圓 $x^2+y^2-2x-6y-6=0$ 的圓心、半徑。

試求圓 $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ 的圓心、半徑。

5

焦點主題 17 圓一般式的判別式（d^2+e^2-4f）

設方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，若 $d^2+e^2-4f>0$，則方程式的圖形為圓。

(1) 當 $d^2+e^2-4f=0$，方程式的圖形為一點 $\left(-\dfrac{d}{2},\ -\dfrac{e}{2}\right)$。

(2) 當 $d^2+e^2-4f<0$，方程式無解，沒有圖形。

小提醒

$$x^2+y^2+dx+ey+f=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(d^2+e^2-4f\right)。$$

觀念是非題 （　）2. 方程式 $x^2+y^2+6x+8y+25=0$ 的圖形為圓。

範例 17 老師講解 學生練習

若方程式 $x^2+y^2-2x+2y+(k+3)=0$ 的圖形是圓，試求 k 的範圍。

若方程式 $x^2+y^2+4x+2y+(3k-1)=0$ 的圖形是圓，試求 k 的範圍。

焦點主題 18 圓方程式（參數式）

以點 (h, k) 為圓心、半徑 r 的圓，其參數式為 $\begin{cases} x=h+r\cos\theta \\ y=k+r\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。

小提醒 把 $(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2$ 與 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 比較，

則 $\begin{cases} x-h=r\cos\theta \\ y-k=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=h+r\cos\theta \\ y=k+r\sin\theta \end{cases}$

觀念是非題 （　）3. 圓：$\begin{cases} x=1+3\cos\theta \\ y=2+3\sin\theta \end{cases}$ 在坐標平面上所圍的面積為 9π。

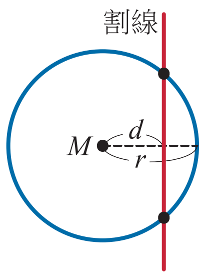
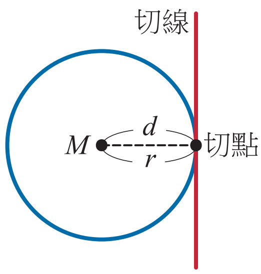
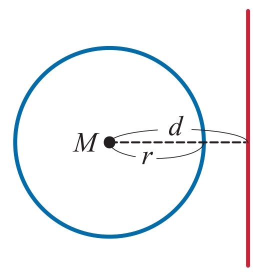
範例 18 老師講解 學生練習

試求圓 $(x-4)^2+(y-3)^2=49$ 的參數式。

試求圓 $(x-6)^2+(y-1)^2=25$ 的參數式。

5-3 圓與直線的關係

焦點主題 19 圓與直線的關係

(1) 交於兩點（相割）	(2) 恰交於一點（相切）	(3) 沒有交點（相離）
		
$d<r$	$d=r$	$d>r$

範例 19　老師講解　學生練習

老師講解：試問圓 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 與直線 L：$5x+12y+10=0$ 有幾個交點？

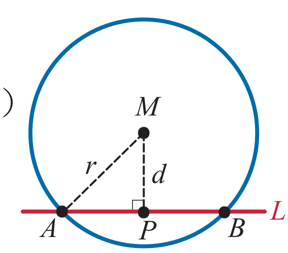
學生練習：試問圓 C：$(x-5)^2+(y-6)^2=81$ 與直線 L：$3x+4y+11=0$ 有幾個交點？

焦點主題 20 直線與圓交於兩點的弦長

當直線與圓有兩個交點 A、B 時，弦 $\overline{AB}$ 長的求法如下：

(1) 先求圓心 M 到直線的距離 d（弦心距），則 $\overline{MP}=d$。（P 是 $\overline{AB}$ 的中點）

(2) 若圓半徑為 r，則畢氏定理（$r^2=d^2+\overline{AP}^2$）可得 $\overline{AP}$，故 $\overline{AB}=2\overline{AP}$。



範例 20　老師講解　學生練習

已知直線 L：$4x+3y+5=0$ 與圓 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=25$ 交於 A、B 兩點，試求 $\overline{AB}$ 值。

已知直線 L：$12x+5y+31=0$ 與圓 C：$(x-4)^2+(y-5)^2=100$ 交於 A、B 兩點，試求 $\overline{AB}$ 值。

焦點主題 21　圓上一點的切線方程式（I）

(1) 當直線與圓相切時，圓心到切線的距離等於圓的半徑，圓心與切點的連線垂直於此切線。

(2) 已知圓上有一點 $P(x_0,y_0)$，則 P 對圓只有一條切線，若圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，則通過 P 點的切線方程式為 $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$。

範例 21　老師講解　學生練習

已知點 $P(8,14)$ 在圓 $(x-3)^2+(y-2)^2=169$ 上，試求通過 P 點的切線方程式。

已知點 $P(6,4)$ 在圓 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 上，試求通過 P 點的切線方程式。

焦點主題 22 圓上一點的切線方程式（II）

已知圓上有一點 $P(x_0, y_0)$，則 P 對圓只有一條切線，若圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則通過 P 點的切線方程式為 $x_0x+y_0y+d\left(\frac{x_0+x}{2}\right)+e\left(\frac{y_0+y}{2}\right)+f=0$。

小提醒 當點在圓外時，該點的切線不可用上述公式。

觀念是非題 （　）1. 當點在圓上時，對圓會有一條切線；而當點在圓外時，對圓會有二條切線。

C

範例 22 老師講解　學生練習

已知點 $P(1, 2)$ 在圓 $x^2+y^2+4x-6y+3=0$ 上，試求通過 P 點的切線方程式。

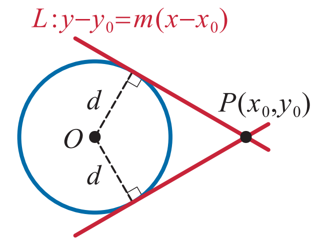
已知點 $P(2, 3)$ 在圓 $x^2+y^2+6x-8y-1=0$ 上，試求通過 P 點的切線方程式。

5

5-3 邁向統測之路

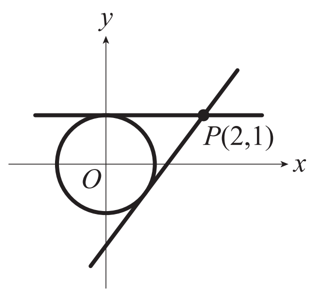
圓外一點的切線方程式

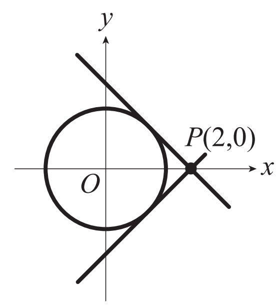
已知圓外有一點 $P(x_0,y_0)$，則 P 對圓必有兩條切線，假設 $y-y_0=m(x-x_0)$（點斜式，m 為斜率），寫出圓心到切線的距離關係式 d，則 $d=$ 半徑可以求出切線斜率 m。（應有兩個值）



小提醒 倘若求得的斜率 m 只有一個，則另一條為過 P 的鉛垂線 $x=x_0$（斜率不存在）。

老師講解	學生練習
如圖，已知過點 $P(2,1)$ 可作兩條直線與圓 $x^2+y^2=1$ 相切，試求這兩條切線的方程式？	如圖，已知過點 $P(2,0)$ 可作兩條直線與圓 $x^2+y^2=2$ 相切，試求這兩條切線的方程式？





統測常考題

範例 1 直線方程式的綜合問題

已知 $P(-2,4)$ 與 $Q(2,-2)$ 兩點，若直線 $L：ax+3y+b=0$ 為 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線，則 $a+b$ 之值為 (A) $-\dfrac{15}{2}$ (B) -5 (C) -1 (D) $\dfrac{3}{2}$。 [統測]

解題小技巧

線段 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線（中垂線）：

(1)通過 $\overline{PQ}$ 的中點。

(2)直線 PQ 與其垂直平分線互相垂直。

解：設 $\overline{PQ}$ 的中點為 M，則 $M=\dfrac{P+Q}{2}=\dfrac{(-2,4)+(2,-2)}{2}=\dfrac{(0,2)}{2}=(0,1)$

直線 PQ 的斜率 $m_{\overline{PQ}}=\dfrac{-2-4}{2-(-2)}=-\dfrac{3}{2}$

直線 $L：ax+3y+b=0$ 的斜率 $m=-\dfrac{a}{3}$

$\because$ $\overline{PQ}\perp L$ $\therefore$ $m_{\overline{PQ}}\times m=-1$

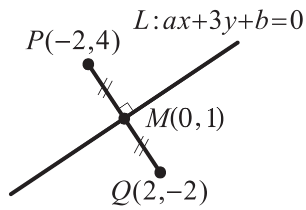
$\Rightarrow$ $-\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{a}{3}\right)=-1$ $\Rightarrow$ $a=-2$

則直線 $L：-2x+3y+b=0$

$\because$ 垂直平分線為 L 會通過 $M(0,1)$

$\therefore$ $-2\times0+3\times1+b=0$ $\Rightarrow$ $b=-3$

故 $a+b=-2+(-3)=-5$



類題 1 在坐標平面上，設 a、b 為實數，若 A、B 兩點的坐標分別為 $(a,1)$、$(b,3)$，且線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線為 $2x+y=4$，則 $2a+b=$ ？________

(A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2。 [統測]

類題 2 若兩點 $A(0,0)$、$B(a,b)$ 對稱於直線 $x-2y=5$，則 $a-b=$ ？________

（當兩點 A、B 對稱於直線 L 時，則直線 L 是線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線）

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。 [統測]

統測常考題

範例 2 圓與直線的關係

設直線 L：$kx+3y+10=0$ 與圓 C：$x^2+y^2=4$ 沒有交點，則常數 k 的範圍為

(A) $-4<k<4$　(B) $-2<k<2$　(C) $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$　(D) $k<-\sqrt{2}$ 或 $k>\sqrt{2}$。　[統測]

解題小技巧

設一圓的半徑是 r，其圓心到一直線的距離為 d，則

(1) $d>r$　$\Leftrightarrow$　圓與直線沒有交點。

(2) $d=r$　$\Leftrightarrow$　圓與直線相切。

(3) $d<r$　$\Leftrightarrow$　圓與直線有兩交點。

解：圓 C 的圓心為原點 $O(0,0)$，半徑 $r=2$

圓心 O 到直線 L 的距離 $d=\dfrac{|k\times0+3\times0+10|}{\sqrt{k^2+3^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{k^2+9}}$

$\because$ 圓 C 與直線 L 沒有交點　$\therefore$　$d>r$

$\Rightarrow\ \dfrac{10}{\sqrt{k^2+9}}>2\ \overset{\times\sqrt{k^2+9}}{\Rightarrow}\ 10>2\sqrt{k^2+9}\ \overset{\div2}{\Rightarrow}\ \sqrt{k^2+9}<5$

$\overset{平方}{\Rightarrow}\ k^2+9<25\ \Rightarrow\ k^2<16\ \Rightarrow\ k^2-16<0$

$\Rightarrow\ (k+4)(k-4)<0\ \Rightarrow\ -4<k<4$

類題 1　已知平面上有一圓 C：$(x-a)^2+y^2=1$ 與直線 L：$y=x$ 相交於兩點，則 $a=$？________

(A) $a=-2$　(B) $a=1$　(C) $a=2$　(D) $a=3$。　[統測]

類題 2　已知直線 L：$x+y=1$ 與圓 C：$x^2+y^2=a$ 相切，求 $a=$________

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2。　[統測]

素養題 **生活素養之圓方程式**

湖面上有一大圓圈可用圓方程式 $x^2+y^2+6x-8y-11=0$ 來表示，現在因水流關係而飄動，此大圓圈的圓心移到 $(3,-4)$ 的位置且半徑縮減為原來的 $\frac{1}{2}$，則此小圓圈可用下列哪一個方程式表示？ (A) $x^2+y^2-6x+8y+11=0$
(B) $x^2+y^2-6x+8y+16=0$ (C) $x^2+y^2-6x+8y-25=0$
(D) $x^2+y^2-6x+8y+25=0$。 [統測]

解題小技巧

圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的圓心 $\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$、半徑為 $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$。

解：大圓圈 $x^2+y^2+6x-8y-11=0$ 的半徑

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-8)^2-4\times(-11)}=\frac{1}{2}\sqrt{144}=6$$

$\because$ 大圓圈的半徑縮減為原來的 $\frac{1}{2}$

$\therefore$ 小圓圈的半徑為 $\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}\times 6=3$

而小圓圈的圓心為 $(3,-4)$

故小圓圈的方程式為 $(x-3)^2+(y+4)^2=3^2$

$\Rightarrow\ x^2+y^2-6x+8y+16=0$

類題 1 設打水漂遊戲中石頭落入水中的漣漪是以圓的形式展現。若某人向河面擲出石頭的方向是沿著直線 $y=x-1$ 行進，下列哪一個圓方程式可為此漣漪的形式？__________

(A) $x^2-2x+y^2+4y+1=0$ (B) $x^2-4x+y^2-2y+4=0$
(C) $x^2-2x+y^2-4y+4=0$ (D) $x^2-4x+y^2-6y+9=0$。 [106 (C)]

C

5

歷屆試題

基礎題

直線方程式

______ 1. 若兩直線 $3x+4y=6$ 與 $9x+12y=k$ 的距離為 2，則 k 的值可能為 (A) -48 (B) -12 (C) 10 (D) 24。 [107 (C)]

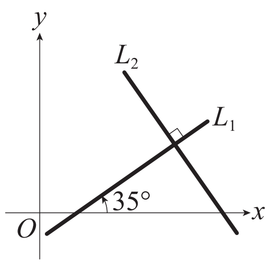
______ 2. 已知坐標平面上三直線 L_1：$3x+3y=2$、L_2：$2x-3y=3$、L_3：$x-ay=-2$，且這三直線將平面分成六個區域，則 a **不會**是下列哪一個值？ (A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) -1 (D) -9。 [108 (C)]

______ 3. 已知坐標平面上三直線 L、L_1 與 L_2，若直線 L 為水平線，L_1 與 L_2 的斜率分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{3}{2}$，且直線 L 被 L_1 與 L_2 所截出的線段長為 26，則此三直線所圍成的三角形面積為多少平方單位？ (A) 39 (B) 52 (C) 78 (D) 156。 [108 (C)]

______ 4. 已知 a、b 為實數。若直線 L_1：$y=ax+b$ 與 L_2：$y=bx+a$ 相互垂直，且 $a^2+b^2=50$，則 L_1 與 L_2 的交點與原點的距離為多少？ (A) $4\sqrt{3}$ (B) 7 (C) $5\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{13}$。 [110 (C)]

______ 5. 若 $A(1,4)$、$B(6,2)$ 所連接的線段 $\overline{AB}$ 與直線 L：$x-y+1=0$ 相交於 P 點，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=$？ (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$。 [111 (C)]

______ 6. 設直線 L_1 的斜角為 35°，已知直線 L_2 與 L_1 相互垂直，如圖所示，則 L_2 的斜角為何？ (A) 35° (B) 55° (C) 125° (D) 155°。 [113 (C)]



圓方程式

______ 7. 若 k 為實數，且點 $P(1,k)$ 為曲線 $kx^2+y^2+2x-4y+k-1=0$ 上之一點，則曲線之圖形為 (A) 圓 (B) 拋物線 (C) 橢圓 (D) 雙曲線。 [109 (C)]

______ 8. 若圓 C 與 y 軸相切，且圓心為拋物線 $y=x^2+4x+5$ 之頂點，則下列何者為圓 C 的方程式？ (A) $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ (B) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ (C) $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ (D) $x^2+y^2+4x-2y+1=0$。 [110 (C)]

______ 9. 若坐標平面上四點 $A(1,2)$、$B(2,-3)$、$C(2,7)$、$D(a,-10)$ 在同一圓上，則 $a=$ ？ (A) 19 或 9 (B) 20 或 8 (C) 24 或 6 (D) 27 或 3。 [112 (C)]

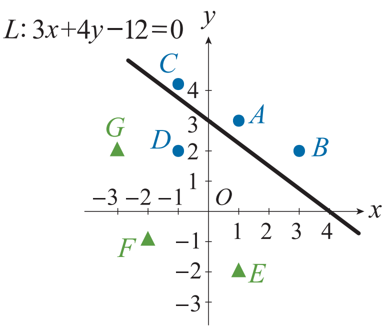
圓與直線的關係

______ 10. 已知圓 C：$(x-3)^2+(y-2)^2=1$。若點 P 是圓 C 上一點，則 P 到直線 L：$3x+4y+8=0$ 的最短距離為 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 [109 (B)]

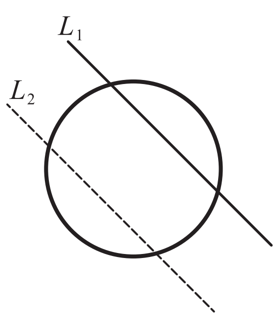
______ 11. 已知直線 L：$y=x-5$ 與圓 C 相切，且圓 C 的圓心為 $(3,-4)$，則圓 C 的半徑為何？ (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$。 [113 (C)]

進階題

______ 12. 在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點 $A(1,3)$、$B(3,2)$、$C(-1,4)$、$D(-1,2)$、$E(1,-2)$、$F(-2,-1)$、$G(-3,2)$ 分屬●、▲二類，其中直線 L：$3x+4y-12=0$ 未能將它們正確分類，如圖所示。若將 L 平行移動至新的位置成為新直線 L_1 且能達到正確分類目的，則下列何者可為 L_1 的直線方程式？ (A) $3x+4y+2=0$ (B) $3x+4y-6=0$ (C) $6x+8y+3=0$ (D) $6x+8y-3=0$。 [109 (C)]



______ 13. 已知圓 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 與相異兩直線 L_1：$x+y+1=0$ 及 L_2：$ax+by+10=0$ 分別交於兩點，且 $L_1 // L_2$，如圖所示。若此圓圓心到兩直線 L_1、L_2 的距離相等，則 $a+b=$ ？ (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10。 [111 (C)]

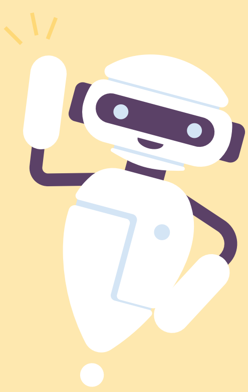


學習導航

雲端教室

6 數列與級數

數列與級數



等差數列與等差級數

- 數列
  - 級數 — $\sum$ 的運算
- 等差數列
  - 等差中項
  - 等差級數 — $\sum$ 的計算公式

等比數列與等比級數

- 等比數列
  - 等比中項
  - 等比級數 — 複利

6-1

等差數列與等差級數

趨勢分析

本單元命題以「等差數列」、「等比級數的和」為主，而生活素養題是常見的呈現方式，尤其是與等比級數有關的「複利」，要特別留意。

焦點主題 1 數列與級數

(1) 把一組數字由左而右排成一列稱為「數列」，而數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$可以記作 $\langle a_n \rangle$ 。

例 數列 $\langle 2n \rangle = 2\times1, 2\times2, 2\times3, \cdots = 2, 4, 6, \cdots$，是偶數數列。

(2) 數列中的數稱為「項」，第 n 個數為「第 n 項」，而第一項又稱為「首項」，最後一項為「末項」。例 質數數列 $2, 3, 5, 7, 11$ 有五項，首項是 2，第二項是 3，末項是 11。

(3) 項數有限的數列稱為「有限數列」，而項數有無限多個的數列稱為「無窮數列」。

(4) 把數列的各項數字相加起來的式子稱為「級數」。例 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$。

① 有限級數 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 的和，記作 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，其中「$\sum$」唸作 sigma。

② 無窮級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$的和，記作 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$，其中「$\infty$」為無限大。

例 $\sum\limits_{k=1}^{5} (2k+3) = (2\times1+3) + (2\times2+3) + (2\times3+3) + (2\times4+3) + (2\times5+3)$

觀念是非題 (　) 1. $\sum\limits_{k=0}^{4} (3k-1) = -1+2+5+8+11$。

範例 1	老師講解		學生練習

試求級數 $\sum\limits_{k=1}^{3} \left(4^k - 5k\right)$ 的和。

試求級數 $\sum\limits_{k=1}^{4} \left(3^k + 2k\right)$ 的和。

焦點主題 2　∑的運算性質

(1) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$，$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$。　(2) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$。

C

範例 2　老師講解

已知 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 11$，$\sum_{k=1}^{10} b_k = 16$，試求 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 3)$ 的值。

學生練習

已知 $\sum_{k=1}^{20} a_k = 30$，$\sum_{k=1}^{20} b_k = 18$，試求 $\sum_{k=1}^{20} (2a_k - 3b_k + 4)$ 的值。

6

焦點主題 3　等差數列

等差數列的任意相鄰兩項，後項減前項的差都相等，而後項減前項的差稱為「公差」。

例 等差數列 $2, 12, 22, 32$ 的首項是 2，其公差為 $12 - 2 = 22 - 12 = 32 - 22 = 10$。

小提醒　等差數列中的後項 ＝ 前項 ＋ 公差。

範例 3　老師講解

若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = 100$，公差是 -20，試寫出此數列的 a_2、a_3、a_4。

學生練習

若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = 20$，公差是 15，試寫出此數列的 a_2、a_3、a_4。

焦點主題 4 等差數列的一般項（I）

若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 a_1，公差為 d，則第 n 項 $a_n = a_1 + (n-1)d$。

觀念是非題　（　）2. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = 3$，公差 $d = 2$，則 $a_{100} = 203$。

範例 4　老師講解　　學生練習

等差數列 $\langle a_n \rangle = 10, 6, 2, \cdots$，試求 a_{101}。

等差數列 $\langle a_n \rangle = 8, 15, 22, \cdots$，試求 a_{51}。

焦點主題 5 等差數列的一般項（II）

若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的第 m 項為 a_m，公差為 d，則第 n 項 $a_n = a_m + (n-m)d$。

範例 5　老師講解　　學生練習

若一等差數列的第 4 項為 10，第 8 項為 22，試求其公差及第 35 項。

已知一等差數列之第 10 項為 76，第 13 項為 100，試求其公差及第 20 項。

焦點主題 6 等差中項

若 a, b, c 為等差數列，則中間項 b 為「a、c 的等差中項」，且 $b=\frac{a+c}{2}$。

小提醒 公差 $=b-a=c-b \Rightarrow 2b=a+c \Rightarrow b=\frac{a+c}{2}$，$b$ 是 a、c 的平均數。

觀念是非題 (　) 3. 17 是 25 與 9 的等差中項。

C

範例 6 老師講解

若 $2x+1, 3x, 19$ 是等差數列，試求 x 之值。

學生練習

若 $4x$ 與 20 的等差中項是 $5x+4$，試求 x 之值。

6

焦點主題 7 等差級數（I）

等差級數的首項 a_1、公差 d，共有 n 項，總和為 $\frac{n\times[2a_1+(n-1)d]}{2}$。

範例 7 老師講解

試求等差級數 $5+9+13+\cdots$ 到第 16 項的和。

學生練習

試求等差級數 $2+7+12+\cdots$ 到第 10 項的和。

焦點主題 8　等差級數（II）

等差級數的首項 a_1、末項 a_n，共有 n 項，總和為 $\dfrac{n\times(a_1+a_n)}{2}$。（$\dfrac{\text{項數}\times(\text{首項}+\text{末項})}{2}$）

範例 8　老師講解　　學生練習

試求等差級數 $7+9+11+\cdots+65$ 的和。

試求等差級數 $2+5+8+\cdots+59$ 的和。

焦點主題 9　常用的 $\sum$ 計算公式

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

小提醒　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ 是等差級數。

範例 9　老師講解　　學生練習

試求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(3k+4)$ 的值。

試求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(5k-6)$ 的值。

6-2

等比數列與等比級數

C

6

焦點主題 10 等比數列

等比數列的任意相鄰兩項，後項與前項的比值都相等，而後項與前項的比值稱為「公比」。

例 等比數列 2, 20, 200, 2000 的首項是 2，其公比 $=\frac{20}{2}=\frac{200}{20}=\frac{2000}{200}=10$。

小提醒 等比數列中的後項 ＝ 前項 × 公比。

範例 10 老師講解

若等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項 $a_1=4$，公比是 -5，試寫出此數列的 a_2、a_3、a_4。

學生練習

若等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項 $a_1=10$，公比是 6，試寫出此數列的 a_2、a_3、a_4。

焦點主題 11 等比數列的一般項（I）

若等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 a_1，公比為 r，則第 n 項 $a_n=a_1r^{n-1}$。

觀念是非題 （　）1. 設等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項 $a_1=3$，公比為 2，則 $a_{100}=3\times 2^{100}$。

範例 11 老師講解

等比數列 $\langle a_n\rangle=8, -24, 72, \cdots$，試求 a_5 之值。

學生練習

等比數列 $\langle a_n\rangle=5, 10, 20, \cdots$，試求 a_6 之值。

焦點主題 12 等比數列的一般項（II）

若等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的第 m 項為 a_m，公比為 r，則第 n 項 $a_n = a_m r^{n-m}$。

範例 12 老師講解 學生練習

有一等比數列都是正數，第 2 項為 4，第 6 項為 324，試求其公比及第 7 項。

有一等比的正數數列，第 11 項為 10，第 13 項為 160，試求其公比及第 16 項。

焦點主題 13 等比中項

若 a, b, c 為等比數列，則中間項 b 為「a、c 的等比中項」，且 $b^2 = ac$。

小提醒 公比 $= \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac$。

觀念是非題 （　）2. 10 是 4 和 25 的等比中項。

範例 13 老師講解 學生練習

已知 $18, 2x, 2$ 是等比數列，試求 x 之值。

若 3 與 48 的等比中項是 $6x$，試求 x 之值。

焦點主題 14 等比級數

等比級數的首項 a_1，公比 $r \neq 1$，共有 n 項，總和為 $\dfrac{a_1 \times (r^n - 1)}{r-1} = \dfrac{a_1 \times (1-r^n)}{1-r}$。

範例 14　老師講解　學生練習

有一等比數列的首項為 3，公比為 -2，試求此數列前 11 項的和。

求等比級數 $5+10+20+\cdots$ 到第 9 項的和。

C

6

焦點主題 15 複利

(1) 複利會將本金所得利息併入本金中，並在下一期重複計息，有利滾利的效果。
(2) 若本金為 P、每期利率為 r，則 n 期複利計息後的本利和為 $P \times (1+r)^n$。

範例 15　老師講解　學生練習

小英把 10 萬元存入郵局定存，設年利率為 0.8%，且每年計息一次，請問 10 年後的本利和是多少？
（$(1.08)^{10} \approx 2.15892$，$(1.008)^{10} \approx 1.08294$）

小平向地下錢莊借了 1 萬元，利息約定是每天 6% 且每天複利一次，他打算 30 天後才一併償還本金和利息，請問屆時他應償還多少？
（$(1.06)^{30} \approx 5.7435$，$(1.006)^{30} \approx 1.1966$）

統測常考題

範例 1 等比數列的假設

設 a、b、c、d、e、f 六數成等比數列，且已知 $a+c+e=168$，$b+d+f=84$，則 d 之值為　(A) 6　(B) 9　(C) 16　(D) 32。 [統測]

解題小技巧

若等比數列的首項是 a，公比是 r，則接下來各項為 $ar, ar^2, ar^3, \cdots$。

解：設等比數列 a, b, c, d, e, f 的公比為 r，

則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$，$e=ar^4$，$f=ar^5$

(1) $a+c+e=168 \Rightarrow a+ar^2+ar^4=168 \Rightarrow a(1+r^2+r^4)=168 \cdots ①$

(2) $b+d+f=84 \Rightarrow ar+ar^3+ar^5=84 \Rightarrow ar(1+r^2+r^4)=84 \cdots ②$

$$\frac{②}{①} \Rightarrow \frac{ar(1+r^2+r^4)}{a(1+r^2+r^4)}=\frac{84}{168} \Rightarrow r=\frac{1}{2}$$

$$r=\frac{1}{2}\text{代回 ①} \Rightarrow a\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)=168 \Rightarrow a=128$$

所求 $d=ar^3=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=16$，故選 (C)

類題 1　已知四個正數 a、b、c、d 為一等比數列，若 $a+b=20$，$a+b+c+d=65$，則 $a=$ ？________

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8。 [統測]

類題 2　設七個實數 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ 成等比數列，公比為 r。若 $a_1+a_2=2$ 且 $a_6+a_7=486$，則 $r=$ ？________

(A) 3　(B) 4　(C) 6　(D) 9。 [統測]

最素傳說

素養題　**等差數列之生活素養**

某棒球投手自 4 月 1 日開始每天練投，他每日投球數為等差數列。若 4 月 5 日投球數為 41 個，4 月 13 日為 73 個，則他 4 月份有幾天投球數超過 100 個？
(A) 10　(B) 11　(C) 12　(D) 13。　[109 (C)]

解題小技巧

設 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，公差為 d，則 $a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$。

解：設 4 月 n 日的投球數是 a_n 個，則 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{30}$ 為等差數列
設此等差數列的公差為 d
由題意知：$a_5 = 41$，$a_{13} = 73$
則 $a_{13} = a_5 + (13-5) \times d \;\Rightarrow\; 73 = 41 + 8d \;\Rightarrow\; 8d = 32 \;\Rightarrow\; d = 4$
第 k 項 $a_k = a_{13} + (k-13) \times d = 73 + (k-13) \times 4 = 4k + 21$
若 $a_k > 100$，則 $4k + 21 > 100 \;\Rightarrow\; 4k > 79 \;\Rightarrow\; k > \dfrac{79}{4} = 19.75$，取 $k = 20$
故 4 月 20 日起，每日的投球數超過 100 個
從 4 月 20 日到 4 月 30 日共有 11 天
因此 4 月份有 11 天投球數超過 100 個，故選 (B)

類題 1　某部以「尋寶」為主題的電影中，男主角進到第二道關卡時看到了一扇巨大的鐵門，門邊有 100 個按鈕，每個按鈕都有一個數字，分別是從 1 到 100。牆上有一個過關提示，上面印著「有一個等差數列，其第 11 項和第 16 項分別為 31 和 56，按下該數列第 20 項數字的按鈕，鐵門就會打開」，則按下哪一個數字的按鈕就會開門？__________
(A) 65　(B) 76　(C) 83　(D) 99。　[109 (B)]

C

6

歷屆試題

基礎題

等差數列與等差級數

_______ 1. 今有一等差數列 $\langle a_n \rangle$，若前二項為 $a_1=3$、$a_2=2$，則此數列前 16 項之和 $S_{16}=$ (A) -80 (B) -72 (C) -64 (D) -56。 [106 (A)]

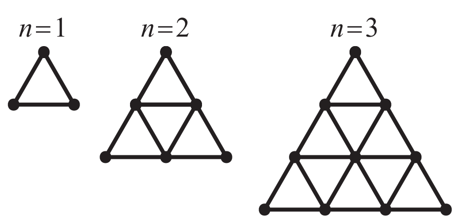
_______ 2. 若等差級數 $\sum_{k=10}^{1018} a_k$ 之值為 2018，則 $a_{514}=$ (A) 2018 (B) 1008 (C) 514 (D) 2。 [107 (A)]

_______ 3. 若一等差數列的第 10 項為首項的 4 倍，且首項不為 0，則該數列的第 6 項為第 2 項的幾倍？ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。 [107 (B)]

_______ 4. 安安為準備在 5 月舉行的路跑活動，4 月 1 日當天從 11 公里開始練習，爾後每日練習都比前一日多 1 公里，意思是 4 月 2 日跑了 12 公里，依此類推，則從 4 月 1 日至 4 月 10 日的十天中，安安總共跑了多少公里？ (A) 135 (B) 155 (C) 176 (D) 198。 [107 (S)]

_______ 5. 若 $a=\sum_{m=1}^{7}\frac{m-2}{2m-1}$、$b=\sum_{k=0}^{6}\frac{k-1}{2k+1}$、$c=\sum_{i=3}^{8}\frac{i-4}{2i-5}$，則下列敘述何者正確？ (A) $b>a>c$ (B) $c>a>b$ (C) $c>a=b$ (D) $a=b>c$。 [110 (C)]

_______ 6. 小美想用火柴棒排成一個 n 層正三角形金字塔，例如當 $n=1$、2、3 時，如圖所示。若依此規則，則排出一個 50 層金字塔恰需要多少根火柴棒？ (A) 3675 (B) 3825 (C) 7500 (D) 7803。 [113 (C)]



等比數列與等比級數

_______ 7. 已知 a、b 為實數，若 $a, 2, 3, b$ 為一等比數列，則 $a+b=$ (A) 4 (B) $\frac{31}{6}$ (C) $\frac{35}{6}$ (D) 7。 [106 (A)]

_______ 8. 若 a 為正整數，且 $1, a, 2a$ 為等比數列，則 $a^2+1=$ (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 10。 [106 (B)]

________9. 若等比數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_8$ 的首項 $a_1 = 2$，且前四項的乘積 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 2^{16}$，則後四項的乘積 $a_5 \times a_6 \times a_7 \times a_8 =$ (A) 2^{32} (B) 2^{48} (C) 2^{64} (D) 2^{80}。 [107 (A)]

________10. $\sum_{n=1}^{10}\left(2^n + 3n + 2\right) =$ (A) 1268 (B) 1298 (C) 2017 (D) 2231。 [107 (C)]

________11. 設 $\langle a_k \rangle$ 為公比 -2 的等比數列，已知 $a_1 a_3 = 12$，則 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 =$ (A) 219 (B) 237 (C) 246 (D) 255。 [108 (A)]

________12. 已知 a、$a+3$、10 三數成等差數列且 b、-15、60 三數成等比數列，則 ab 之值為 (A) $\frac{15}{16}$ (B) 15 (C) 19 (D) $\frac{305}{16}$。 [108 (S)]

________13. 若在 1 和 2 之間插入二個數，使其成等比數列，則這二個數的乘積為 (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8。 [109 (A)]

________14. 已知等比數列 $\langle a_k \rangle$ 的首項 $a_1 = 2$，公比 $r = 3$。若前 n 項和大於 2022，則滿足條件的最小正整數 $n =$ ？ (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11。 [111 (C)]

________15. 晴晴在 2018 年初以一股 50 元買進某一檔股票，在 2023 年初時該股經配股、配息還原後，可以還原股價為一股 60 元。若此股價 60 元可視為以每年固定年利率 r 進行複利計算，則 r 可以從下列哪個算式計算求得？

(A) $50 \times r^5 = 60$ (B) $50 \times (1+r)^5 = 60$ (C) $50 \times \left(r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5\right) = 60$

(D) $50 \times \left[(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + (1+r)^4 + (1+r)^5\right] = 60$。 [112 (C)]

進階題

________16. 設 a、b、c 三數成等比數列，且滿足 $a + b + c = 9$ 及 $a^2 + b^2 + c^2 = 189$，則等比中項 $b =$ (A) -6 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 6。 [106 (C)]

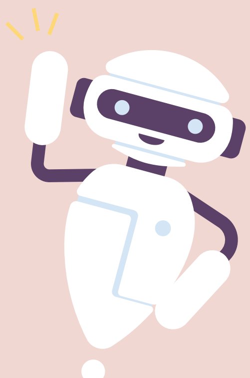
________17. 已知 $\{a_n\}$ 為等差數列且滿足 $a_1 > 0$、$a_5 = 3a_{12}$。則當 n 為多少時，a_n 開始為負數？ (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17。 [108 (C)]

學習導航

雲端
教室

7 排列組合

排列組合



7-1
排列

趨勢分析

本單元命題以相異物的「排列」、「組合」為主，尤其是分步驟的問題（乘法原理）、分類的問題（加法原理），而其差異可善用範例來輔助分辨，以免觀念混淆。

焦點主題 1 計數原理

(1) 列舉：透過逐一的列出而導致結論的方法。當方法數不會太多時，可以使用這種方法。
(2) 樹狀圖：利用樹枝形狀的圖形，列舉一連串事件發生時所有可能情況的方法。

範例 1 老師講解

試回答下列問題：
(1) 把 200 元紙鈔兌換成 50 元硬幣或 10 元硬幣的組合，共有多少種兌換法？
(2) 甲、乙比賽猜拳，每次比賽沒有平手，規定先勝 3 次者為贏家。目前甲是 2 勝 0 敗，試問往後會有多少種比賽情形可以決定贏家？

學生練習

試回答下列問題：
(1) 將 50 元硬幣兌換成 10 元硬幣或 1 元硬幣之組合，共有多少種兌換法？
(2) 甲、乙比賽 100 公尺短跑，每次比賽沒有平手，規定先勝兩次者取得校外的參賽權，試問有多少種比賽情形可以決定參賽權？

焦點主題 2 加法原理

若完成一件事的方法可分成若干類（任兩類不重複）：第 1 類有 n_1 種方法、第 2 類有 n_2 種方法、…、第 k 類有 n_k 種方法，則完成這件事的方法數為 $n_1+n_2+\cdots+n_k$。

例 童軍社有 8 位男生、4 位女生來開會，現在選 1 人去買冰，則選 1 人買冰可以分成男、女兩類，方法數為 $8+4=12$ 種。

小提醒 分類就是用加法原理。

C

範例 2 老師講解 學生練習

北海道的札幌到釧路可以乘坐飛機、火車及長途巴士，明天的飛機有 7 班，火車有 5 班，長途巴士有 4 班，則明天從札幌到釧路共有多少種班次可選擇？

飲料店販售的飲料有茶類 12 種，咖啡類 5 種，冰沙類 4 種，果茶類 3 種。阿良現在要買一杯飲料來喝，試問有多少種不同的選擇？

7

焦點主題 3 乘法原理

若完成一件事可以依序分成 k 個步驟（各步驟中的方法可互相搭配）：第 1 步有 n_1 種方法、第 2 步有 n_2 種方法、…、第 k 步有 n_k 種方法，則完成這件事的方法數為 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$。

例 臺北到臺中有 2 條路，臺中到臺南有 3 條路，今欲從臺北到臺中再到臺南，可以分成兩個步驟（臺北到臺中，臺中到臺南），第 1 步的任一路線配上第 2 步的任一路線，都是可能的路線，故臺北到臺中再到臺南有 $2\times3=6$ 種路線。

小提醒 分步驟就是乘法原理。

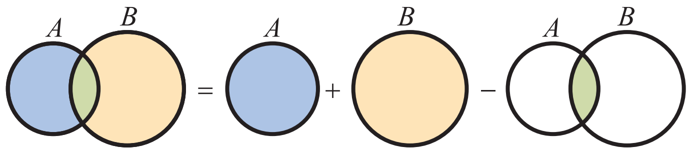
範例 3 老師講解 學生練習

你家牛排館提供的沙拉有 2 種，主餐有 4 種，附湯有 3 種，水果有 4 種。現在阿邦對沙拉、主餐、附湯以及水果各選一種，有幾種點餐的方式？

小雛擁有 3 本不同的小說、5 本不同的畫冊和 6 本不同的漫畫，她從小說、畫冊及漫畫各挑選 1 本來參與義賣，有幾種可能？

焦點主題 4 取捨原理（排容原理）

如圖，已知被計數的物品可以分成 A、B 兩類（可能有重複），則
$(A$ 類或 B 類的個數$)=(A$ 類的個數$)+(B$ 類的個數$)-($既是 A 類也是 B 類的個數）。



範例 4 老師講解 學生練習

從 1 到 200 的正整數中，是 2 或 3 的倍數有多少個？

從 1 到 300 的正整數中，是 2 或 7 的倍數有多少個？

焦點主題 5 n 的階乘

設 n 為正整數，規定 n、$n-1$、$n-2$、⋯、1 的連乘積稱為「n 的階乘」，記作 $n!$。
即 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$。例 $1!=1$，$2!=2\times1$，$3!=3\times2\times1$。

小提醒 $0!=1$。

範例 5 老師講解 學生練習

試求下列的值：(1) $6!$ (2) $\dfrac{8!}{4!2!}$。

試求下列的值：(1) $5!$ (2) $\dfrac{7!}{3!4!}$。

焦點主題 6 相異物的排列（I）

n 個不同的物品排成一列的方法數為 $n!$。

例 A、B、C 三個字母排成一列，則第一個位置有 3 種方法，選定後，第二個位置剩下 2 種方法，同理第三個位置剩下 1 種方法。故此排列有 $3\times2\times1=6$ 種方法，即 $3!=3\times2\times1$。

第一個	第二個	第三個
□	□	□
3 種	2 種	1 種

觀念是非題　(　) 1. 將 M、A、T、H 四個字母排成一列，共有 24 種排法。

範例 6　老師講解

校園歌唱比賽共有 5 人進入最終決賽，出場順序由抽籤決定，有幾種安排方式？

學生練習

200 公尺決賽有 6 位選手入選，用抽籤決定跑道第一至第六道次的順序，有幾種安排方式？

焦點主題 7 認識 P^n_k

(1) 設 n、k 為正整數且 $1\le k\le n$，$P^n_k=\underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)}_{\text{從 } n \text{ 倒數，} k \text{ 個數字相乘}}$。

例 $P^{10}_3=10\times9\times8$。

(2) P^n_k 的另一種形式：$P^n_k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$。例 $P^{10}_3=\dfrac{10!}{(10-3)!}=\dfrac{10!}{7!}=10\times9\times8$。

範例 7　老師講解

試求下列的值：(1) P^7_2　(2) P^5_3。

學生練習

試求下列的值：(1) P^4_3　(2) P^7_4。

C

7

焦點主題 8 相異物的排列（II）

從 n 個不同物品取出 k 個排成一列的方法數為 P^n_k，稱為「n 中取 k 的排列數」。

例 從 10 個不同物品取出 3 個來排列，則第一個位置有 10 種選擇，選定後，第二個位置剩下 9 種選擇，同理第三個位置剩下 8 種選擇。
故此排列有 $10\times9\times8=720$ 種方法，即 $P^{10}_3=10\times9\times8$。

第一個	第二個	第三個
□	□	□
10 種	9 種	8 種

範例 8 老師講解

學校辦理校外教學，預定從 7 個著名的景點中，選擇 4 個來依序參訪，共有多少種參訪的方案？

學生練習

某社團有社員 13 人，若從其中選出社長與副社長各一人，則共有多少種選法？ [統測]

焦點主題 9 分步驟的排列問題

(1) 如果完成一件事需要分步驟來算排列數，則最後再採用乘法原理來算完成此事的方法數。
(2) 若某些物品對位置有限制，如：不能排在某處，則優先安排到適合的位置，再排其他物品。

範例 9 老師講解

甲、乙、丙、丁、戊五人排成一行要進入傳說中的鬼屋來探險，甲不想排在最前面，共有多少種排法？

學生練習

今有 F、G、H、J 四幅畫作橫向並排掛在同一面牆上，且 F 作品不能擺在最左邊，則總共有幾種排法？

焦點主題 10 相鄰物品的排列（捆綁法）

優先把要相鄰的物品捆綁成一個整體，再和其他物品一起排列，同時也要考慮捆綁物的排列。

範例 10 老師講解 學生練習

甲、乙、丙、丁、戊、己共 6 人排成一列拍團體照，甲、乙兩人感情太好了，一定要站在相鄰的位置，有多少種排列的方法？

一排椅子有 5 個座位。今有甲、乙、丙、丁、戊共 5 人，各選一個位子坐，但甲、乙、丙三人必須相鄰，有幾種坐法？

[統測]

焦點主題 11 不相鄰物品的排列（插空法）

優先排列沒有位置要求的物品，再把不相鄰的物品安插在已排物品之間的空隙或兩端。

範例 11 老師講解 學生練習

甲、乙、丙、丁、戊、己共 6 人排成一列拍團體照，甲、乙兩人剛剛吵架，不要站在相鄰的位置，有多少種排列的方法？

今天小羽要將國文、英文、數學、專一、專二共五科分別安排在 5 個時段來複習。如果國文、英文不要連在一起複習，有幾種安排方式？

焦點主題 12　含有相同物的排列（I）

n 個物品中只有 n_1 個是相同的（其餘都相異），則這 n 個物品排列的方法數為 $\dfrac{n!}{n_1!}$。

例 A、B、B 三個字母排成一列，有 3 種方法：ABB、BAB、BBA。

改用其他方式來思考，把 A、B、B 的兩個 B 視為 B_1、B_2，則 A、B_1、B_2 的排列法為 $3!=6$，但實際上 B_1、B_2 都是 B，右圖中同一行的 $2!=2$ 種（B_1、B_2 互換）其實只是同一種，因此 A、B、B 三個字母排列法為 $\dfrac{3!}{2!}=3$ 種。

AB_1B_2	B_1AB_2	B_1B_2A
AB_2B_1	B_2AB_1	B_2B_1A
↓	↓	↓
ABB	BAB	BBA

範例 12　老師講解

將「風聲雨聲讀書聲」七個國字任意排列，有幾種的排列方法？

學生練習

將「A、B、C、C、C、C」六個英文字母任意排列，有幾種方法？

焦點主題 13　含有相同物的排列（II）

n 個物品可以分成 k 類，每一類各有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 個（每一類中的物品相同且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$），則這 n 個物品排列的方法數為 $\dfrac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$。

範例 13　老師講解

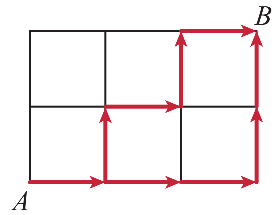
從跳棋中取出 8 個棋子，其中紅色有 4 個，黃色有 2 個，綠色有 2 個，將 8 個棋子排成一列，共有幾種不同的排法？

學生練習

由 2、2、3、3、4、4、4 這七個數字排成一列，則共可排成多少個不同的七位數？

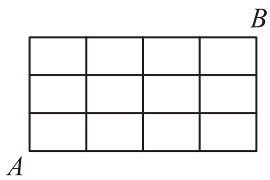
焦點主題 14 棋盤道路的捷徑數

如圖，從 A 點到 B 點走捷徑，只能→或↑：「→」要走 3 段、「↑」要走 2 段。每條捷徑都是 3 個「→」及 2 個「↑」所組成，即「→→→↑↑」的排列，而 $\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$，有 10 條捷徑。

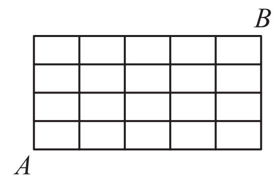


範例 14 老師講解 學生練習

如圖，從 A 點到 B 點的捷徑有多少條？

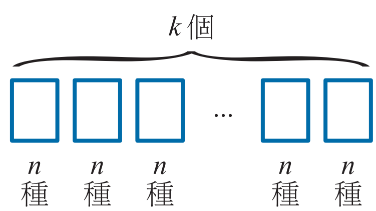


如圖，從 A 點到 B 點的捷徑有多少條？



焦點主題 15 重複排列

從 n 種物品中取出 k 個來排列，若每一種的個數都足夠（即 k 個位置中的每一個位置都有 n 種選擇），則物品可重複出現的排列方法數為 $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{k\text{ 個 }n\text{ 相乘}}=n^k$。



範例 15 老師講解 學生練習

骰子各面的點數分別為 1、2、⋯、6，若投擲一個骰子 3 次，則依序出現的點數有多少種可能的結果？

某個密碼鎖有 4 個滾輪，每個滾輪上都有 0、1、2、⋯、9 等 10 個數字可選擇。試問密碼有多少種設定方法？

7-1　邁向統測之路

排列的倒扣法

當計算有限制的排列數過於複雜時，可以用倒扣法。

小提醒　（有限制的排列數）＝（任意排列數）－（不符合限制的排列數）。

老師講解	學生練習
(1) 將 0、0、2、2、9、9、9、9 八個數字全取，排成一列，可得幾個不同的八位數？ (2) 假設在招呼站有三輛計程車，每輛至多可搭乘 4 位客人，招呼站現來 5 位要搭計程車的旅客，試問共有幾種不同的載客方式？	(1) 將六個數字 2, 0, 1, 3, 1, 4 排列，共可排出多少個六位數？ (2) 老師將把 5 塊不同的蛋糕，任意分給 A、B、C 三人，試問 C 至少拿到一塊蛋糕的方式有幾種？

7-2

組合

C

焦點主題 16 認識C^n_k

設 n、k 為正整數且 $1 \le k \le n$，$C^n_k = \dfrac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)}^{\text{從 } n \text{ 倒數，} k \text{ 個數相乘}}}{k!}$。

例 $C^{10}_3 = \dfrac{10\times9\times8}{3!}$。

範例 16 老師講解 學生練習

試求下列的值：(1) C^9_4 (2) C^7_5。

試求下列的值：(1) C^6_3 (2) C^8_4。

7

焦點主題 17 相異物的組合

關於「n 中取 k 的排列數 P^n_k」，可以分解成下面兩個步驟：

第 1 步：先從 n 個不同物品取出 k 個當作一個組合（不考慮物品的次序，設組合數為 x）。

第 2 步：再把每一個組合中的 k 個物品任意排列（排列數是 $k!$）

由乘法原理可知，$P^n_k = x\times k!$，故 $x = \dfrac{P^n_k}{k!} = \dfrac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!}$，即 C^n_k。

小提醒 $P^n_k = C^n_k \times k!$

因此從 n 個不同物品取出 k 個為一組（不分次序）的方法數為 C^n_k，稱為「n 中取 k 的組合數」。

例 從 10 人中選 3 人當作代表（不分次序），共有 $C^{10}_3 = \dfrac{10\times9\times8}{3!} = 120$ 種選法。

範例 17 老師講解 學生練習

澎湖漁會販售丁香魚乾、干貝、…等 7 種 XO 醬，如果要網購 4 瓶不同的 XO 醬，有多少種可能？

花蓮火車站的商店販售 8 種花蓮薯的禮盒。如果要選購 3 盒不同的花蓮薯，有多少種可能？

焦點主題 18 組合數的性質

(1) C^n_k 的另一種形式：$C^n_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$。

例 $C^{10}_7=\dfrac{10!}{7!3!}$，$C^{10}_3=\dfrac{10!}{3!7!}$；$C^{10}_6=\dfrac{10!}{6!4!}$，$C^{10}_4=\dfrac{10!}{4!6!}$。

(2) 組合數的互換（餘組合）：$C^n_k=C^n_{n-k}$。例 $C^{10}_7=C^{10}_3$，$C^{10}_6=C^{10}_4$。

觀念是非題　(　) 1. 組合數 $C^{100}_{80}=C^{100}_{20}$。

範例 18 老師講解 學生練習

某足球隊有 13 名球員，每次需 11 人同時上場比賽，若不考慮球員位置，共有幾種選法？

某次數學考試，規定由 12 題中任意選取 10 題作答，若不考慮題號順序，有多少種選法？

焦點主題 19 幾何上的組合問題

平面上有 n 個相異點（$n\geq 3$ 且任意三點都不在同一條直線上），以 n 個點畫出直線有 C^n_2 條，以其中每三點為頂點畫一個三角形有 C^n_3 個。

範例 19　老師講解　學生練習

平面上有 11 個相異點，且任意三點都不共線，試問可以畫出多少條直線？

平面上有 8 個相異點，且任意三點不共線，試問可以畫出多少條直線？

C

焦點主題 20 凸 n 邊形的對角線

凸 n 邊形（$n\geq3$）有 C^n_2-n 條對角線。（n 個點可畫出 C^n_2 條直線，但各邊不是對角線）

範例 20　老師講解　學生練習

凸九邊形的對角線共有多少條？

正 12 多邊形總共有幾條對角線？

7

焦點主題 21 分步驟的組合問題

如果完成一件事需要分步驟來算組合數，則最後再採用乘法原理來算完成此事的方法數。

例 從 10 男 9 女之中選出 3 男 5 女，共有 $C^{10}_3\times C^9_5=120\times126=15120$ 種選法。

範例 21　老師講解　學生練習

某幼兒園共有大班 6 班、中班 4 班及小班 3 班。若聖誕晚會需要從大班選取 4 班、中班選取 3 班及小班選取 2 班來支援，其搭配方式有幾種可能？

某餐廳推出之套餐包含二種不同的配菜、一種主菜及一杯飲料。若有四種配菜、三種主菜及五種飲料可供選擇，則共可搭配出多少種不同組合的套餐？

統測常考題

範例 1　數字排列的分類問題

由 0、1、2、3、4、5、6 七個數字中取三個相異數字排成三位數的偶數，則方法有幾種？　(A) 60　(B) 90　(C) 105　(D) 120。　[108 (A)]

解題小技巧

當三位數為偶數，則其個位數必須為偶數。

解：$\boxed{百}$ $\boxed{十}$ $\boxed{個}$

當三位數為偶數，則其個位數必須為偶數（0、2、4、6），分類如下

(1) 當個位數為 0 時（□□ 0）

原來 7 個數字剩下 6 個（1、2、3、4、5、6），取 2 個數字排在百位數、十位數，有 $P^6_2 = 6 \times 5 = 30$ 個偶數

(2) 當個位數為 2 或 4 或 6 時（□□ 2 或□□ 4 或□□ 6）

第 1 步：個位數可選偶數 2、4、6，有 3 種

第 2 步：原來 7 個數字剩下 6 個，刪除 0 之後還有 5 個數字，取 1 個數字排在百位數，有 5 種

第 3 步：原來 7 個數字剩下 5 個，取 1 個數字排在十位數，有 5 種

由乘法原理可知，有 $3 \times 5 \times 5 = 75$ 個偶數

從 (1)、(2) 可知，共有 $30 + 75 = 105$ 個偶數，故選 (C)

類題 1　若數字不可重複，則以 1、2、3、4 所組成的 4 位數中大於 2000 者共有幾個？＿＿＿＿＿＿

(A) 6　(B) 12　(C) 18　(D) 24。　[統測]

類題 2　將 0、1、2、3、5 五個數字全取，排成一列，可得 4 的倍數的五位數共有多少個？（凡是末兩位數是 4 的倍數者即為 4 的倍數）＿＿＿＿＿＿

(A) 18　(B) 20　(C) 24　(D) 36。　[統測]

最素傳說

素養題　**組合的分類問題**

某次啦啦隊競賽規定，每隊組隊人數 8 人且男、女生均至少 2 人。某班共有 4 名男生與 6 名女生想參加啦啦隊競賽，若由此 10 人中依規定選出 8 人組隊，則共有多少種組隊方式？　(A) 45　(B) 60　(C) 75　(D) 90。　[108 (C)]

解題小技巧

加法原理：若完成一件事的方法可分成若干類（任兩類不重複），則完成這件事的方法數為各類方法數的總和。

解：啦啦隊規定每隊組隊人數 8 人且男、女生均至少 2 人，則此班 10 人（4 名男生與 6 名女生）的組隊分類如下

(1) 2 名男生與 6 名女生 $C^4_2 \times C^6_6 = \dfrac{4\times3}{2!} \times 1 = 6\times1 = 6$ 種

(2) 3 名男生與 5 名女生 $C^4_3 \times C^6_5 = C^4_1 \times C^6_1 = \dfrac{4}{1!} \times \dfrac{6}{1!} = 4\times6 = 24$ 種

(3) 4 名男生與 4 名女生 $C^4_4 \times C^6_4 = C^4_4 \times C^6_2 = 1\times \dfrac{6\times5}{2!} = 1\times15 = 15$ 種

由 (1)、(2)、(3) 可知，男、女生均至少 2 人的方法共有 $6 + 24 + 15 = 45$ 種

故選 (A)

類題 1　從 5 位醫生、3 位護士中，任選 5 人組成一個醫療團隊。若團隊中至少有 2 位護士，則共有幾種組合的方式？＿＿＿＿＿

(A) 40　(B) 55　(C) 80　(D) 100。　[統測]

類題 2　由甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛八個人中選取 5 人組成一個委員會，且甲、乙、丙、丁四人中至少有 2 人為委員，則組成此委員會的方法數共有幾種？

＿＿＿＿＿

(A) 48　(B) 50　(C) 52　(D) 54。　[統測]

基礎題

排列

______ 1. 有一樂團計畫至甲、乙兩國巡迴表演。甲國有三個城市要去表演，乙國有四個城市要去表演。若先完成甲國的演出之後，再到乙國完成演出，則巡迴路線的規劃有多少種可能？ (A)7 (B)12 (C)36 (D)144。 [105 (B)]

______ 2. 某電影場景中，4 位演員在排成一列的 8 個座位中，選坐 4 個相連的座位，其餘皆為空位，則坐法有多少種？ (A)96 (B)120 (C)144 (D)168。 [107 (S)]

______ 3. 某班有 30 位學生，其中 20 位男生、10 位女生。今任選二位擔任班長和副班長，若規定其中一位是男生，另一位是女生，則共有幾種選法？ (A)200 (B)400 (C)435 (D)870。 [109 (A)]

______ 4. 在一次立法委員選舉中，每位選民須投區域立委與不分區政黨兩種選票，且每種選票均只能圈選一位（個），否則視為廢票。已知某甲的戶籍地有 6 位區域立委候選人，而全國共有 14 個政黨可選擇。若某甲決定去投票，且兩種選票均不投廢票，試問某甲有多少種的投票組合？ (A)6 (B)14 (C)20 (D)84。 [109 (C)]

______ 5. 某歌手打算在她的演唱會上表演一段由 6 首不同的歌曲串成的組曲，其中 3 首慢歌、3 首快歌。她的音樂總監建議在歌曲的安排上最多只能 2 首慢歌連在一起唱，因為這樣才會使得整個組曲的節奏比較流暢。若她認同並接受音樂總監的建議，試問這段組曲可以有多少種**不同**的安排方式？ (A)576 (B)648 (C)696 (D)720。 [111 (C)]

______ 6. 阿軒餐飲店推出均衡套餐，套餐有飯、主菜、湯與飲料 4 樣，其中飯有白飯、紫米飯、五穀飯、炒飯與稀飯 5 種，主菜有牛排、豬排、魚排與雞排 4 種，湯有洋蔥牛肉湯、豬肉貢丸湯、魚丸湯與人蔘雞湯 4 種，飲料有柳橙汁、西瓜汁、咖啡與紅茶 4 種。基於均衡原則，套餐的主菜與湯不能同為紅肉或同為白肉。（牛與豬為紅肉，魚與雞為白肉），若在符合均衡原則下，從飯、主菜、湯與飲料 4 樣中各任選 1 種，則均衡套餐共有幾種點餐的方式？ (A)80 (B)160 (C)240 (D)320。 [112 (C)]

組合

______ 7. 由十男十女共二十人中選出十人，其中三個是男生，七個是女生，則有多少種選法？ (A) 120 (B) 14400 (C) C^{20}_{10} (D) $7!\times3!$。 [108 (A)]

______ 8. A 學校桌球校隊有甲、乙、丙、丁、戊五位選手，有一天 A 學校桌球校隊與他校進行友誼賽。由於時間關係，只進行單打、雙打比賽各一場，且兩場比賽同時進行。若任意推出選手參賽（不考慮默契等因素），則 A 學校可推出的參賽選手名單有多少種？ (A) 12 (B) 30 (C) 125 (D) 243。 [109 (B)]

______ 9. 跆拳道隊有 8 個隊員，教練安排所有隊員每 2 人一組分別在 A、B、C、D 四個不同場地練習，則共有幾種安排的方式？ (A) 105 (B) 2520 (C) 5040 (D) 40320。 [110 (C)]

______ 10. 一個空的書櫃有上、中、下共三層，若將國文、英文、數學三本課本放入書櫃的任一層，且當課本放在同一層左右順序不同時視為不同排列，則共有幾種**不同**的排法？ (A) 60 (B) 36 (C) 27 (D) 18。 [110 (C)]

______ 11. 小輝從大賣場採買一些要祭拜祖先的水果，計有西瓜、芒果、蘋果、香瓜、橘子及木瓜等六種水果，他從中各取出一顆水果置於供桌準備祭拜，發現供桌大小只能容納其中五顆水果排成一列放置，若其中香瓜及木瓜都被選到，且此兩種水果位置相鄰，則有幾種不同排列方法？ (A) 48 (B) 96 (C) 192 (D) 240。 [113 (C)]

進階題

______ 12. 從 7 位男生、3 位女生中，任選 4 人到醫院實習。若此 4 人中至少有 1 位女生，則共有多少種選取的方式？ (A) 95 (B) 135 (C) 175 (D) 215。 [104 (A)]

______ 13. 某校舉辦新生盃網球個人賽，比賽採單淘汰制，也就是比賽一場輸的就淘汰，勝的晉級到下一輪比賽。若有 32 位新生參加比賽，則共要舉辦多少場比賽，才會產生冠軍？ (A) 31 (B) 32 (C) $\frac{32\times31}{2}$ (D) 32×31。 [109 (A)]