技高數學 C

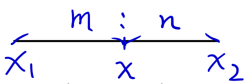
重點清單 1

坐標系與函數圖形

- ❒ 循環小數化分數
- ❒ 絕對值方程式
- ❒ 絕對值不等式
- ❒ 根式與乘法公式
- ❒ 算幾不等式

  $a>0,b>0 \rightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a=b$ 時等號成立)
- ❒ 平面上兩點間距離公式 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- ❒ 分點公式

  $x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$

  (比例相加當分母，交叉相乘再相加當分子)
- ❒ 中點公式 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$
- ❒ 三角形重心公式 $G(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3})$
- ❒ 平行四邊形公式 $\begin{cases} x_1+x_3=x_2+x_4 \\ y_1+y_3=y_2+y_4 \end{cases}$
- ❒ 配方法與二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形
- ❒ 二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸相交情形
- ❒ $ax^2+bx+c=0$ 之根的公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- ❒ $ax^2+bx+c=0$ 之根與係數的關係

  $\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$
- ❒ 函數圖形的平移與方程式的變化
- ❒ 一元二次不等式
- ❒ 判別式在一元二次不等式的應用
- ❒ 已知解求絕對值不等式或一元二次不等式

  $a<x<b \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|<\dfrac{b-a}{2}$

  $\Leftrightarrow (x-a)(x-b)<0$

  $x\leq a$ 或 $x\geq b \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|\geq\dfrac{b-a}{2}$

  $\Leftrightarrow (x-a)(x-b)\geq 0$
- ❒ 分式不等式(注意分母不得為 0)

三角函數

- ❒ 度與弳度之換算($\pi=180°$)
- ❒ 最小正同界角 $0°\leq\theta<360°$
- ❒ 扇形的弧長與面積公式

  $\begin{cases} S=r\theta \\ A=\dfrac{1}{2}r^2\theta \end{cases}$，其中 θ 要使用弳度單位
- ❒ 銳角三角函數的定義
- ❒ 特別角之三角函數值
- ❒ 三角函數的恆等式
- ❒ 三角恆等式搭配乘法公式之題型
- ❒ 三角恆等式搭配根與係數關係之題型
- ❒ 任意角三角函數的定義
- ❒ 六個三角函數在四個象限之正負號判斷
- ❒ 象限角 0^0、90^0、180^0 與 270^0 之三角函數值
- ❒ 負角公式
- ❒ $180°\pm\theta$、$360°\pm\theta$ 之變換 $\rightarrow$ 函數不變
- ❒ $90°\pm\theta$、$270°\pm\theta$ 之變換 $\rightarrow$ 函數正餘互換
- ❒ 三角函數的圖形與週期
- ❒ 有關 $-1\leq\sin\theta\leq 1$、$-1\leq\cos\theta\leq 1$ 之方程式問題與函數極值問題
- ❒ 已知兩邊夾一角之三角形面積公式

  $\Delta=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$
- ❒ 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$
- ❒ 餘弦定理

  $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
- ❒ 海龍公式 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，

  $s=\dfrac{a+b+c}{2}$
- ❒ 三角形外接圓半徑公式 $R=\dfrac{abc}{4\Delta}$
- ❒ 三角形內切圓半徑公式 $r=\dfrac{\Delta}{s}$
- ❒ 解三角形之相關題型

平面向量

- ❒ 兩向量相等 $\Leftrightarrow$ x 分量相等且 y 分量相等
- ❒ 向量的長度與方向角
- ❒ 向量相加要頭接尾(配合使用四邊形法)
- ❒ 向量相減要共始點(配合使用四邊形法)
- ❒ 向量的實數積
- ❒ 兩向量互相平行 $\Leftrightarrow$ 分量成比例
- ❒ 零向量 $\vec{0}=(0,0)$與單位向量 $a=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- ❒ 向量分點公式
- ❒ 向量內積的代數形式與幾何形式
- ❒ $|p\vec{a}+q\vec{b}|^2=p^2|\vec{a}|^2+2pq(\vec{a}\cdot\vec{b})+q^2|\vec{b}|^2$

技高數學 C

重點清單 2

- ❐ 兩向量所張之三角形面積公式

$$\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec a|^2|\vec b|^2-(\vec a\cdot\vec b)^2}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right|$$

- ❐ 柯西不等式

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2$$

當 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ 時等號成立

- ❐ 正射影(投影向量)

$\vec a$ 在 $\vec b$ 上的正射影為 $(\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|^2})\vec b$

式的運算

- ❐ 多項式的判斷
- ❐ 兩多項式相等 $\Leftrightarrow$ 對應項的係數相等
- ❐ 多項式的係數和
- ❐ 多項式的加減
- ❐ 多項式相乘
- ❐ 除法原理
- ❐ 長除法
- ❐ 綜合除法
- ❐ 使用連續綜合除法處理多項式的變換
- ❐ 餘式定理
- ❐ 因式定理
- ❐ 整係數一次因式檢驗法(牛頓定理)
- ❐ 最高公因式與最低公倍式
- ❐ 餘式的假設技巧
- ❐ 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$
- ❐ $i=\sqrt{-1}$ 的循環性
- ❐ 兩複數相等 $\Leftrightarrow$ 實部等於實部且虛部等於虛部
- ❐ 共軛複數
- ❐ 複數的四則運算
- ❐ 部分分式(常見類型分析)
- ❐ 解分式方程式
- ❐ 雙重根號公式

$$\sqrt{(x+y)\pm2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\ (x>y)$$

- ❐ 應用乘法公式處理根式化簡

直線與圓

- ❐ 斜率與斜角

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\theta$$

- ❐ 三點共線 $\Leftrightarrow$ 任兩點所得之直線斜率相等
- ❐ 兩直線互相平行 $\Leftrightarrow$ 斜率相等
- ❐ 兩直線互相垂直 $\Leftrightarrow$ 斜率相乘等於 -1
- ❐ 直線的點斜式 $y-y_0=m(x-x_0)$
- ❐ 直線的一般式 $ax+by+c=0$
- ❐ 直線的截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
- ❐ 直線的斜截式 $y=mx+b$
- ❐ 直線的點法式 $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$
- ❐ 直線的參數式 $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$，$t\in R$
- ❐ 點到直線距離公式 $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- ❐ 兩平行線間距離公式 $d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- ❐ 圓的標準式(心徑式) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
- ❐ 圓的直徑式 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$
- ❐ 圓的一般式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$
- ❐ 圓判別式 $\Delta=d^2+e^2-4f$
- ❐ 圓的參數式 $\begin{cases}x=h+r\cos\theta\\ y=k+r\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$
- ❐ 圓與點的關係
- ❐ 圓與直線的關係
- ❐ 圓的切線方程式求法
- ❐ 圓的切線段長公式

① $\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2}$

② $\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f}$

等差數列與等差級數

- ❐ $a_1=S_1$，$a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge2)$
- ❐ Σ 的性質與公式
- ❐ 等差數列一般項 $a_n=a_1+(n-1)d$
- ❐ 等差數列已知 a_m、a_n 求公差 d

$$a_m=a_n+(m-n)d\ \rightarrow\ d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$$

- ❐ a、b、c 成等差 $\rightarrow$ 等差中項 $b=\frac{a+c}{2}$
- ❐ 等差級數前 n 項和公式

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

- ❐ 等比數列一般項 $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$
- ❐ 等差級數前 n 項和公式

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

- ❐ 等差級數延伸公式

$$S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}\rightarrow S_n=\frac{a_n\times r-a_1}{r-1}$$

- ❐ a、b、c 成等比$\rightarrow b^2=ac\rightarrow$等差中項 $b=\pm\sqrt{ac}$

技高數學 C

重點清單 3

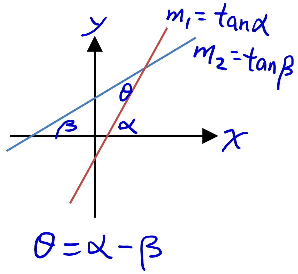
排列組合

- 樹狀圖
- 加法原理與乘法原理
  『或就是加』；『且就是乘』
- 排容原理
- $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$
  ※ $0!=1$(不選也是 1 種選擇)
- $P_r^n=\dfrac{n!}{(n-r)!}$(從 n 開始，連續 r 個相乘)
- $C_r^n=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- $C_a^n=C_b^n\to$ ① $a=b$ 或② $a+b=n$
- 重複排列 $\to n^r$(要注意是誰選誰！)
- 不盡相異物直線排列
  以 $aaaabbbcc$ 為例 $\to$ 排列數為 $\dfrac{9!}{4!3!2!}$
- 分堆(需分組時，再去乘以幾階乘，視題意而定)
  以 6 個相異物為例：
  分 2,2,2 $\to C_2^6\times C_2^4\times C_2^2\times\dfrac{1}{3!}$
  分 3,3 $\to C_3^6\times C_3^3\times\dfrac{1}{2!}$
  分 3,2,1 $\to C_3^6\times C_2^3\times C_1^1$
  分 2,2,1,1 $\to C_2^6\times C_2^4\times C_1^2\times C_1^1\times\dfrac{1}{2!2!}$

- 不連號
  以 1~10 為例：
  取 3 個不連號的方法數為 C_3^{10-3+1}
- 成雙不成雙問題
  以 Aa、Bb、Cc、Dd、Ee 五對夫婦為例：
  選 4 人為 2 對夫婦 $\to C_2^5$
  選 3 人均不為夫婦 $\to C_3^5\times2^3$
  選 4 人恰有 1 對夫婦 $\to C_1^5\times C_2^4\times2^2$
  選 5 人恰有 2 對夫婦 $\to C_2^5\times C_1^3\times2$

三角函數的應用

- 和差角公式
  $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
  $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
  $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$
- 二倍角公式
  $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
  $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$
  $=2\cos^2\theta-1$
  $=1-2\sin^2\theta$
  $\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$
- 以 $\tan\theta$ 表示 $\sin2\theta$ 與 $\cos2\theta$
  $\sin2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$；$\cos2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$
- 半角公式
  $\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos2\theta$；$\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos2\theta$
- 正餘弦疊合公式
  $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$
  其中 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$；$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
  $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin\theta+b\cos\theta\le\sqrt{a^2+b^2}$
- 兩直線交角公式
  $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$
  另一交角為 $180^\circ-\theta$
- 三角測量問題



指數與對數

- 指數律(底數大於 0 且不等於 1)
  ① $a^0=1$
  ② $a^1=a$
  ③ $a^m\times a^n=a^{m+n}$
  ④ $a^m\div a^n=a^{m-n}$
  ⑤ $(a^m)^n=a^{m\times n}$
  ⑥ $\sqrt[n]{a^m}=a^{m\div n}=a^{\frac{m}{n}}$
  ⑦ $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$；$a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$
  ⑧ $(a\times b)^m=a^m\times b^m$；$(\dfrac{a}{b})^m=\dfrac{a^m}{b^m}$

技高數學 C

重點清單 4

❒ 對數 $\log_a b$ 有意義：

①底數 a 大於 0

②底數 a 不等於 1

③真數 b 大於 0

❒ 對數公式：

① $\log_a 1 = 0$

② $\log_a a = 1$

③ $\log_a M + \log_a N = \log_a (M \times N)$

④ $\log_a M - \log_a N = \log_a (\dfrac{M}{N})$

⑤ $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$

⑥ $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c b}$ (換底公式)

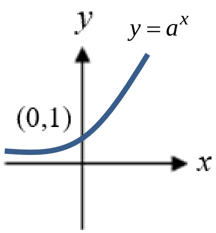
⑦ $(\log_a b)(\log_b a) = 1$

⑧ $(\log_a b)(\log_b c)(\log_c d) = \log_a d$ (連鎖律)

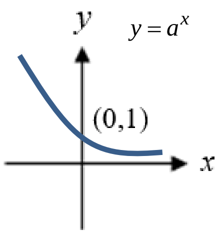
⑨ $X^{\log_a Y} = Y^{\log_a X}$

❒ 指數函數圖形

(1) $a > 1$

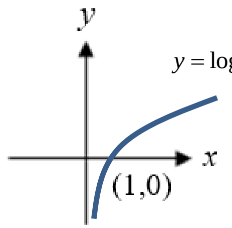


(2) $0 < a < 1$

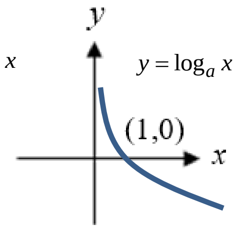


❒ 對數函數圖形

(1) $a > 1$



(2) $0 < a < 1$



❒ 首數與尾數

$x = a \times 10^n$ ($1 \le a < 10$，$n \in Z$)

$\log x = n + \log a$ ($0 \le \log a < 1$，$n \in Z$)

(1) n 為首數

① $n \ge 0 \rightarrow x$ 整數部分的位數=首數 $n+1$

② $n < 0 \rightarrow x$ 小數部分在小數點後第 $|n|$ 位始不為 0

(2) $\log a$ 為尾數

① x 使用的數與 $\log a$ 使用的數相同

例： $\log 54321 = 4 + \log 5.4321$

② 用 $\log a$ 的值配合下表來決定 x 最左邊的數

$\log 2 \approx 0.3010$

$\log 3 \approx 0.4771$

$\log 4 \approx 0.6020$

$\log 5 \approx 0.6990$

$\log 6 \approx 0.7781$

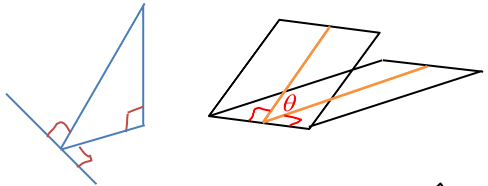
$\log 7 \approx 0.8451$

$\log 8 \approx 0.9030$

$\log 9 \approx 0.9542$

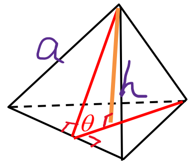
空間向量

❒ 三垂線定理與兩面角



❒ 正四面體

$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$；高 $h = \dfrac{\sqrt{6}}{3} a$



❒ $O(0,0,0)$ 為原點，求 $P(a,b,c)$ 在 xy 平面、yz 平面、xz 平面、x 軸、y 軸、z 軸之投影點與 $\overline{OP}$ 的投影長：

(1) xy 平面(z=0)：投影點(a,b,0)，投影長 $\sqrt{a^2+b^2}$

(2) yz 平面(x=0)：投影點(0,b,c)，投影長 $\sqrt{b^2+c^2}$

(3) xz 平面(y=0)：投影點(a,0,c)，投影長 $\sqrt{a^2+c^2}$

(4) x 軸($\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$)：投影點($a$,0,0)，投影長 $|a|$

(5) y 軸($\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$)：投影點(0,$b$,0)，投影長 $|b|$

(6) z 軸($\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$)：投影點(0,0,$c$)，投影長 $|c|$

❒ $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

技高數學 C

重點清單 5

❐ 空間向量的內積

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3) \rightarrow \left|\vec{a}\right|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3) \rightarrow \left|\vec{b}\right|=\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$

$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 的夾角為 $\theta\,(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

❐ 兩向量互相平行 → 分量成比例

❐ 兩向量互相垂直 → 內積為 0

❐ 柯西不等式

$(a_1^2+a_2^2+{a_3}^2)(b_1^2+b_2^2+{b_3}^3)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

當 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$ 時等號成立

❐ 正射影(投影向量)

$\vec{a}$ 在[illegible]上的正射影為 $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right)\vec{b}$

❐ $\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=0 \\ b_1x+b_2y+b_3z=0 \end{cases}$

$$x:y:z=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

❐ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 、$\vec{n}=(x,y,z)$

$$\begin{cases} \vec{a}\perp\vec{n} \\ \vec{b}\perp\vec{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{n}=0 \\ \vec{b}\cdot\vec{n}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=0 \\ b_1x+b_2y+b_3z=0 \end{cases}$$

❐ 空間向量的外積

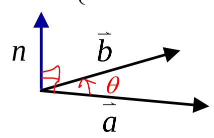
$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3) \rightarrow \left|\vec{a}\right|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3) \rightarrow \left|\vec{b}\right|=\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$

$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 的夾角為 $\theta\,(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta)n$ ，其中

n 為單位向量且 $\begin{cases} \vec{a}\perp n \\ \vec{b}\perp n \end{cases}$ 並遵守**右手定則**



(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

❐ 空間中兩向量所張出的平行四邊形面積大小，是等於這兩向量的外積之長度大小。

即 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 與 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 所張出之平行四邊形面積為

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

❐ 降階法則

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$=+a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

❐ 三階行列式的性質

(1)行列互換，其值不變。

(2)任兩行(列)對調，其值變號。

(3)任一行(列)可提出公因數。

(4)任兩行(列)成比例時，其值為 0。

(5)將任一行(列)乘以 k 倍後加到另一行(列)，其值不變。

(6)任一行(列)的每個元素可以分成兩行(列)的元素和，進而將此行列式拆成兩個行列式之和。

$$\begin{vmatrix} a_1+d & a_2 & a_3 \\ b_1+e & b_2 & b_3 \\ c_1+f & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d & a_2 & a_3 \\ e & b_2 & b_3 \\ f & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

❐ 空間中三向量

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 、$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

所張出之平行六面體體積為 $V=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

※若三向量共平面，則此時 $V=0$，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

❐ 點法式

(1)平面坐標系中，直線的點法式為

$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

※直線過點(x_0,y_0)且 $\vec{n}=(a,b)$ 為法向量

(2)空間坐標系中，平面的點法式為

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

※平面過點(x_0,y_0,z_0)且 $\vec{n}=(a,b,c)$ 為法向量

技高數學 C

重點清單 6

❐ 截距式

(1)平面坐標系中，過$(a,0)$、$(0,b)$兩點的直線方程式為 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

(2)空間坐標系中，過$(a,0,0)$、$(0,b,0)$、$(0,0,c)$三點的平面方程式為 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

❐ 點到平面距離公式

空間中，點(x_0,y_0,z_0)到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

❐ 兩平面間距離公式

兩平行平面 $E_1: ax+by+cz+d_1=0$、$E_2: ax+by+cz+d_2=0$ 之間的距離為 $\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

❐ 在平面坐標系中要求兩直線的交角，或在空間坐標系中要求兩平面的交角，可使用法向量來計算

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$ → 求得 θ，而另一夾角為 $180°-\theta$

一次聯立方程式與矩陣

❐ 兩直線 $\begin{cases}L_1: a_1x+b_1y+c_1=0\\ L_2: a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$

(1) $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ ⇔ 兩直線相交於一點 ⇔ 恰一組解

(2) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ ⇔ 兩直線重合 ⇔ 無限多組解

(3) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ ⇔ 兩直線平行 ⇔ 無解

❐ 克拉瑪公式(二元一次方程組)

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}，\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}，\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$$

(1) $\Delta\neq0$ ⇒ 恰一組解$(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta})$

(2) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ ⇒ 無限多組解

(3) $\Delta=0$，但 Δ_x、Δ_y 至少有一不為 0 ⇒ 無解

❐ 克拉瑪公式(三元一次方程組)

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}，\Delta_x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}，$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}，\Delta_z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$$

(1) $\Delta\neq0$ ⇒ 恰一組解$(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta},\dfrac{\Delta_z}{\Delta})$

(2) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ⇒ 無限多組解

(3) $\Delta=0$，但 Δ_x、Δ_y、Δ_z 至少有一不為 0 ⇒ 無解

❐ 齊次方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\ a_2x+b_2y+c_2z=0\\ a_3x+b_3y+c_3z=0\end{cases}$ 必有$(0,0,0)$之解，故只有唯一解或無限多組解兩種可能。

❐ 矩陣

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$ 為 $m\times n$ 階矩陣，簡記為 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$，其中 a_{ij} 為 A 的第(i,j)元。

※A 為有 m 列、n 行的矩陣。

※ a_{ij} 為 A 的第 i 列、第 j 行的元。

❐ 係數矩陣與增廣矩陣

$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 之

係數矩陣為 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}$

增廣矩陣為 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix}$

❐ 矩陣的列運算

(1)矩陣中的某兩列可互換位置。

(2)可將矩陣中的某一列乘以一個不為 0 的數後，再加到另一列。

❐ 高斯消去法

利用矩陣的列運算將增廣矩陣的左下方簡化成 0，稱為「三角化矩陣」，即為高斯消去法的解題技巧。

$$\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{高斯消去法}}\begin{bmatrix}1 & B_1 & C_1 & D_1\\ 0 & 1 & C_2 & D_2\\ 0 & 0 & C_3 & D_3\end{bmatrix}$$

❐ 兩矩陣相等 ⇔ 對應元相等

❐ 兩矩陣相加減 ⇔ 對應元相加減

❐ 零矩陣 ⇔ 矩陣中之各元均為 0

技高數學 C

重點清單 7

- 任意矩陣 A 與同階的零矩陣 O 的和仍為 A，即
  $A+O=O+A=A$
  ※零矩陣為矩陣加法單位元素。
- 矩陣的係數積
  實數 r 乘以一矩陣時，要將 r 乘到各元裡去。
  如：$r\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\times a & r\times b \\ r\times c & r\times d \end{bmatrix}$
- 矩陣係數積的性質
  r、s 均為實數，且 A、B 為同階矩陣，則
  (1) $r(sA)=(rs)A$
  (2) $(r+s)A=rA+sA$
  (3) $r(A+B)=rA+rB$
- 對矩陣等式兩邊可行使等量公理加減，亦即可使用移項法則。

- 矩陣乘積
  若矩陣 A 的行數 p 等於矩陣 B 的列數 q，則矩陣 AB 可得一個 pxq 階的矩陣。
  例如：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}，B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}，$$

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}=C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$c_{11}=a_{11}\times b_{11}+a_{12}\times b_{21}+a_{13}\times b_{31}$

$c_{21}=a_{21}\times b_{11}+a_{22}\times b_{21}+a_{23}\times b_{31}$

$c_{12}=a_{11}\times b_{12}+a_{12}\times b_{22}+a_{13}\times b_{32}$

$c_{22}=a_{21}\times b_{12}+a_{22}\times b_{22}+a_{23}\times b_{32}$

- 矩陣的乘法單位元素
  一個 n 階方陣，從左上到右下的對角線上各元都是 1，而其餘各元都是 0，稱為 n 階單位方陣，以 I_n 表示。

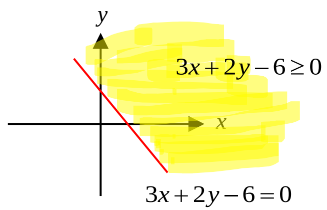
例如：$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 矩陣乘法的基本性質
  r 為實數，矩陣 A、B、C 在下列運算均有意義，則：
  (1) $(AB)C=A(BC)$
  (2) $A(B+C)=AB+AC$；$(A+B)C=AC+BC$
  (3) $r(AB)=(rA)B=A(rB)$
  (4)矩陣的乘法不滿足交換律，即 $AB\neq BA$。
  (5)補充 1
  矩陣 A、B 均為非零矩陣時，其乘積有可能是零矩陣。
  如：$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，則 $AB=O$
  (6)補充 2
  $AB=AC$ 且 $A\neq O$，$B=C$ 未必成立。
  如：$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
  此時 $AB=AC=O$，但 $B\neq C$
- 二階反方陣
  二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $\det(A)=\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，
  則 $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 為 A 的乘法反方陣，且滿足
  $A^{-1}A=AA^{-1}=I$

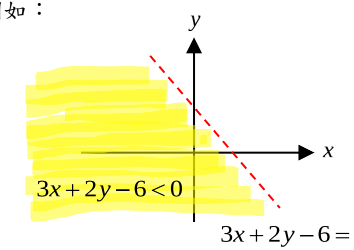
- 當一方陣的行列式為 0 時，其乘法反方陣不存在。

二元一次不等式與線性規劃

- a、b、c 為實數，則形如 $ax+by+c>0$(或 ≥ 0)、
  $ax+by+c<0$(或 ≤ 0)即為二元一次不等式。
- 左右側半平面的判定
  設直線 $L:ax+by+c=0$ 且「$a>0$」，則：
  (1) $ax+by+c>0$ 表在 L 右方且不含 L，圖解直線 L 要畫虛線。
  ※若有等號則含 L，圖解直線 L 要畫實線。
  例如：



  (2) $ax+by+c<0$ 表在 L 左方且不含 L，圖解直線 L 要畫虛線。
  ※若有等號則含 L，圖解直線 L 要畫實線。
  例如：



★ 若 $a<0$，記得透過移項讓 x 的係數大於 0 後再去判斷左右側半平面。

技高數學 C

重點清單 8

❐ 同側異側之判斷

設兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$與直線 $L:ax+by+c=0$

(1) A、B 在 L 的同側(或稱 $\overline{AB}$ 與 L 不相交)，

則 $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)>0$

(2) A、B 在 L 的異側，則

$(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)<0$

(3) $\overline{AB}$ 與 L 相交，則

$(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)\le 0$

❐ 拋物線

(1) 平面上，動點 P 到一定點 F 與到定直線 L 等距離，則 P 點的軌跡為一拋物線。

(2) 定義式：$\overline{PF}=d(P,L)$

(3) 左右型拋物線之標準式為

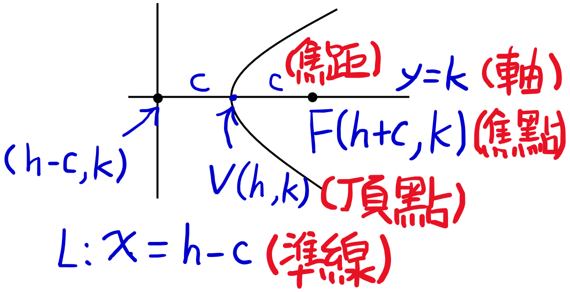
$(y-k)^2=\pm 4c(x-h)$，其中 $c>0$。

① 取正為開口向右，取負為開口向左。

② 頂點 $V(h, k)$。

③ c 為焦距，$4c$ 為正焦弦長。

④ 以 $(y-k)^2=4c(x-h)$ 為例之簡圖如下：



(4) 上下型拋物線之標準式為

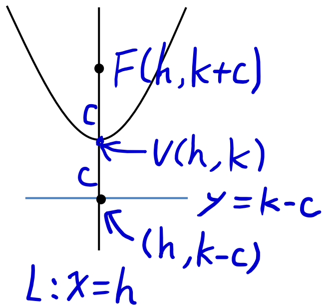
$(x-h)^2=\pm 4c(y-k)$，其中 $c>0$。

① 取正為開口向上，取負為開口向下。

② 頂點 $V(h, k)$。

③ c 為焦距，$4c$ 為正焦弦長。

④ 以 $(x-h)^2=4c(y-k)$ 為例之簡圖如下：



❐ 橢圓

(1) 平面上，動點 P 到滿足下列兩條件：

① P 到兩定點 F_1、F_2 之距離和等於定值 $2a$

※ 定義式：$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

② $\overline{F_1F_2}=2c<2a$

則 P 點的軌跡為一橢圓。

(2) 左右型橢圓之標準式為

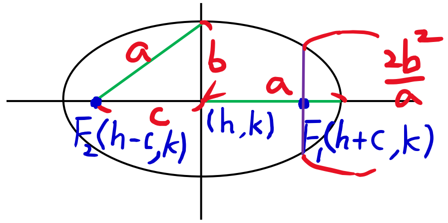
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，其中 $c^2=a^2-b^2$

① 中心坐標(h, k)。

② 兩焦點坐標$(h\pm c, k)$。

③ 長軸長=$2a$；短軸長=$2b$；正焦弦長=$\dfrac{2b^2}{a}$

④ 以 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 為例之簡圖如下：



(3) 上下型橢圓之標準式為

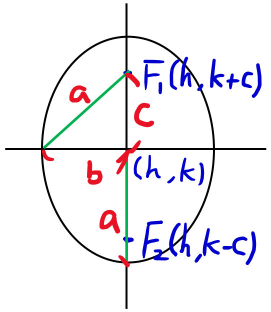
$\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$，其中 $c^2=a^2-b^2$

① 中心坐標(h, k)。

② 兩焦點坐標$(h, k\pm c)$。

③ 長軸長=$2a$；短軸長=$2b$；正焦弦長=$\dfrac{2b^2}{a}$

④ 以 $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ 為例之簡圖如下：



(4) 橢圓參數式：

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \rightarrow \begin{cases} x=h+a\cos\theta \\ y=k+b\sin\theta \end{cases} (0\le\theta<2\pi)$$

技高數學 C

重點清單 9

❐ 雙曲線

(1) 平面上，動點 P 到滿足下列兩條件：

① P 到兩定點 F_1、F_2 之距離差之絕對值等於定值 $2a$

※ 定義式：$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$

② $\overline{F_1F_2}=2c>2a$

(2) 左右型雙曲線之標準式為

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ ，其中 $c^2=a^2+b^2$

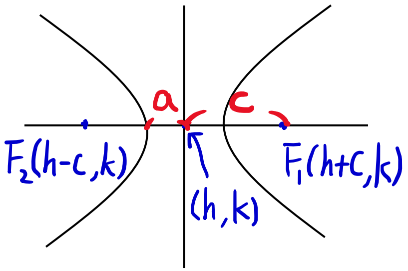
① 中心坐標 (h,k)。

② 兩焦點坐標 $(h\pm c,k)$。

③ 貫軸長 $=2a$；共軛軸長 $=2b$；

正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}$

④ 以 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 為例之簡圖：



⑤ 兩漸近線方程式為 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=0$

$\to b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=0$

$\to (bx+ay+c_1)(bx-ay+c_2)=0$

$\to L_1: bx+ay+c_1$ 、$L_2: bx-ay+c_2=0$

(3) 上下型雙曲線之標準式為

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$ ，其中 $c^2=a^2+b^2$

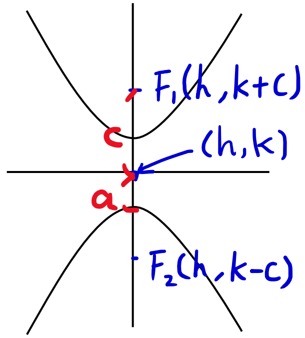
① 中心坐標 (h,k)。

② 兩焦點坐標 $(h,k\pm c)$。

③ 貫軸長 $=2a$；共軛軸長 $=2b$；

正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}$

④ 以 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ 為例之簡圖：



⑤ 兩漸近線方程式為 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=0$

$\to a^2(x-h)^2-b^2(y-k)^2=0$

$\to (ax+by+c_1)(ax-by+c_2)=0$

$\to L_1: ax+by+c_1=0$ 、$L_2: ax-by+c_2=0$

(4) 若雙曲線 Γ 之兩漸近線方程式為

$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ 、 $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$

則 $\Gamma:(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k$ (定值)

❐ 極限

(1) 設函數 $f(x)$，當 $x\to a$ 時，$f(x)$ 值會趨近定值 L，則 L 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 時之極限值，以 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ 表示。

(2) 求 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 時，若以 $x=a$ 代入 $f(x)$ 中不會產生分母為 0、根號裡面為負、…等不合之情形，則可直接以 $x=a$ 代入 $f(x)$ 中求得極限值。

※ 洛必達法則：(學完微分之後可使用)

求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 時，若 $f(a)=g(a)=0$ 但 $f'(a)\neq 0$，則

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=\frac{g'(a)}{f'(a)}$$

(3) 左極限、右極限：

① 若 $x<a$，則 x 由 $x=a$ 之左側趨近於 a 來求 $f(x)$ 的極限值，稱為左極限，以 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 表示。

② 若 $x>a$，則 x 由 $x=a$ 之右側趨近於 a 來求 $f(x)$ 的極限值，稱為右極限，以 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 表示。

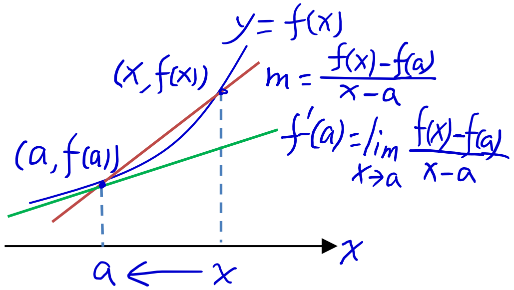
(4) 函數 $f(x)$ 的極限值存在且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ (即極限值等於函數值時)，稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。

※ 左極限 = 右極限 $\to$ 極限值存在

技高數學 C

重點清單 10

❐ 導數與導函數



(1) 導數第一型 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(2) 導數第二型 $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(3) 導函數 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

※ $f'(x)$ 為 $y=f(x)$ 的切線斜率函數，以切點的 **x 坐標**代入 $f'(x)$ 中，即可得其切線斜率。

❐ 微分公式

(1) $y=f(x)\ \to\ y'=\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$

(2) $f(x)=x^n\ \to\ f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

(3) $(uv)'=u'v+uv'$

(4) $(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

(5) 若 y 是 u 的函數且 u 是 x 的函數，則

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ (隱函數的微分)

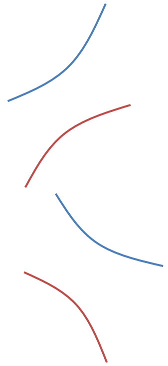
❐ 遞增、遞減與凹口方向

(1) $\begin{cases} f'(x)\ge 0\to \text{遞增} \\ f''(x)>0\to \text{凹口向上}\end{cases}$

(2) $\begin{cases} f'(x)\ge 0\to \text{遞增} \\ f''(x)<0\to \text{凹口向下}\end{cases}$

(3) $\begin{cases} f'(x)\le 0\to \text{遞減} \\ f''(x)>0\to \text{凹口向上}\end{cases}$

(4) $\begin{cases} f'(x)\le 0\to \text{遞減} \\ f''(x)<0\to \text{凹口向下}\end{cases}$



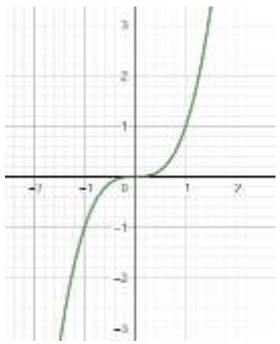
❐ 找極值用 $f'(x)=0$，找反曲點用 $f''(x)=0$

❐ 三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形

(1) 以 $f(x)=x^3$ 為例：

$f'(x)=3x^2\ge 0\ \to$ 恆為遞增

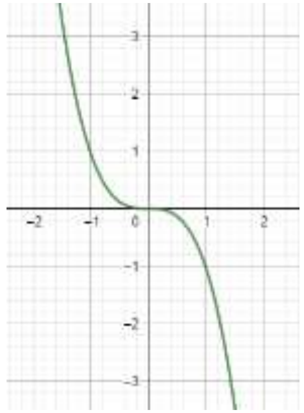
$f''(x)=6x\ \to\ x=0$ 處為反曲點



(2) 以 $f(x)=-x^3$ 為例：

$f'(x)=-3x^2\le 0\ \to$ 恆為遞減

$f''(x)=-6x\ \to\ x=0$ 處為反曲點



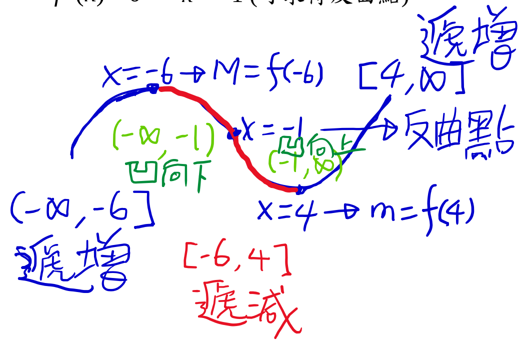
(3) 以 $f(x)=x^3+3x^2-72x-74$ 為例：

$f'(x)=3x^2+6x-72=3(x-4)(x+6)$

$f'(x)=0\ \to\ x=-6、4$ (可求得極值)

$f''(x)=6x+6$

$f''(x)=0\ \to\ x=-1$ (可求得反曲點)



技高數學 C

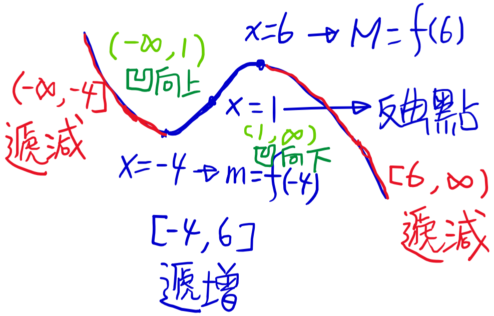
重點清單 11

(4) 以 $f(x)=-x^3+3x^2+72x+20$ 為例：

$f'(x)=-3x^2+6x+72=-3(x+4)(x-6)$

$f'(x)=0 \rightarrow x=-4$、6 (可求得極值)

$f''(x)=-6x+6 \rightarrow x=1$ (可求得反曲點)



❐ 無窮等比數列與無窮等比級數

(1) 無窮等比數列收斂的條件為 $-1<r\le 1$

(2) 無窮等比級數收斂的條件為 $-1<r<1$

此時和 $S=\dfrac{a_1}{1-r}$

❐ 夾擠定理

已知數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$，對所有 n 滿足

$a_n\le b_n\le c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$，則

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$。

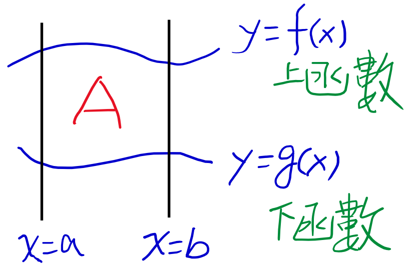
❐ 不定積分

$\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ ($n\ne -1$，C 為常數)

❐ 定積分

$$\int_a^b x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$$

❐ 定積分求面積



$$A=\int_a^b(\text{上函數}-\text{下函數})dx=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

❐ 微積分基本定理

設 $f(x)$在區間$[a,b]$上可積分，若

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ($a\le x\le b$)，則 $F'(x)=f(x)$，

且 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$。

❐ 微積分在物理上的應用實例

(1) 變速度之位移量 $s=\int_a^b v(t)dt$

(2) 變力做功 $W=\int_a^b F(x)dx$

❐ 變數變換實例

(1) $u=px+q \rightarrow du=pdx$

(2) $u=px^2+qx+r \rightarrow du=(2px+q)dx$

(3) $u=px^3+qx^2+rx+s \rightarrow du=(3px^2+2qx+r)dx$

依此類推

※ 積分時，記得 x 的上下限要換成 u 的上下限

❐ 積分範圍之切割

$f(x)$在區間$[a,c]$上可積分，設 $a<b<c$，則

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$