一、單選題(39 小題)

1. (　　)設 $A=\begin{bmatrix} a & -2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$，則 $a-b=$　(A)6　(B)8　(C)－6　(D)－8

2. (　　)使用反方陣解聯立方程式 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -7x-y=-15 \end{cases}$，則 $x-y=$　(A)1　(B)2　(C)－3　(D)－4

3. (　　)請問下列哪一個選項中的矩陣乘積等於 $\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}$？　(A)$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
(C)$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　(D)$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　(E)$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. (　　)使用反方陣解聯立方程式 $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$，則 $2x+y=$　(A)4　(B)6　(C)8　(D)10

5. (　　)設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$，若矩陣 X 滿足 $X+2A=3(X+B-A)$，則矩陣 X 中第一列所有元之和為　(A)5　(B)6　(C)7　(D)11

6. (　　)設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$，則 $A^{-1}=$(A)$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$　(C)$\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$　(D)$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

7. (　　)設 $A=\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，若 AB 為零矩陣，則 $x+y=$　(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

8. (　　)設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，則 $3AB=$　(A)$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -13 & -3 & -5 \\ 22 & 4 & 8 \end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -39 & -9 & -15 \\ 66 & 12 & 24 \end{bmatrix}$　(C)
$\begin{bmatrix} 6 & 24 & 12 \\ -39 & -9 & -15 \\ 66 & 12 & 24 \end{bmatrix}$　(D)$\begin{bmatrix} 6 & 24 & 12 \\ -13 & -3 & -5 \\ 66 & 12 & 24 \end{bmatrix}$

9. (　　)已知矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$，解方程組 $\begin{cases} ax+by=7 \\ cx+dy=-4 \end{cases}$，則 $x+y=$　(A)－18　(B)－8　(C)8　(D)28

10. (　　)已知二階方陣 $B=\begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 12 & k-3 \end{bmatrix}$**沒有**反方陣，則實數 k 的值為　(A)-21　(B)-15　(C)15　(D) 21

11. (　　)設 A、B、C 均為 n 階矩陣，若 t 為實數，則下列敘述何者**不成立**？　(A)$A+B=B+A$　(B)$AB=BA$　(C)$A+(B-C)=(A+B)-C$　(D)$A(B+C)=AB+AC$

12. (　　)若矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}$，且 $AB=A+B$，則 $c=$？　(A)-1　(B)$\frac{-1}{2}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)1

13. (　　)已知矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，解方程組 $\begin{cases} ax+by=8 \\ cx+dy=5 \end{cases}$，則 $x-y=$　(A)－16　(B)－6　(C)16　(D)26

14. (　　)已知 $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & z \\ 3y & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y & x \\ z & 3 \end{bmatrix}$，則下列何者為真？　(A)$x=1$　(B)$y=-1$　(C)$z=1$　(D)$z=-1$

15. (　　) 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$，則 $A^2=$(A)$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$　(C)$\begin{bmatrix}2&0\\0&-2\end{bmatrix}$　(D)$\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix}$

16. (　　) 若 $x=a$ ， $y=b$ 為聯立方程組 $\begin{cases}3x+4y=114\\4x+5y=2025\end{cases}$ 的解，則 $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=$？　(A)$\begin{bmatrix}5&-4\\-4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}-5&4\\4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$　(C)$\begin{bmatrix}5&4\\-4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$　(D)$\begin{bmatrix}-5&-4\\-4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\2025\end{bmatrix}$

17. (　　) 已知 $\begin{bmatrix}x-1&x+1\\y^2&y+x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&y-1\\b&-4\end{bmatrix}$，則 $a+b=$　(A) − 3　(B) − 6　(C) − 9　(D) − 12

18. (　　) 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}3&-2\\a&4\end{bmatrix}$，若其反方陣 A^{-1} 不存在，則 $a=$
(A)0　(B)6　(C)−6　(D)12

19. (　　) 設 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&4&5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&3&-1\\0&-2&1\end{bmatrix}$，若 $AB=\left[c_{ij}\right]_{3\times3}$，試求 $c_{11}+c_{22}+c_{33}=$
(A)3　(B)5　(C)7　(D)6

20. (　　) 設聯立方程式 $\begin{bmatrix}3a+1&4a+4\\3&a^2+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ 無解，則實數 $a=$　(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

21. (　　) 設 $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix}$，則 $(A+B)(A-B)=$
(A)$\begin{bmatrix}-3&0\\1&0\end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix}0&3\\-1&-3\end{bmatrix}$　(C)$\begin{bmatrix}1&0\\1&3\end{bmatrix}$　(D)$\begin{bmatrix}0&1\\0&3\end{bmatrix}$

22. (　　) 已知矩陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}3&2\\7&5\end{bmatrix}$，解方程組 $\begin{cases}ax+by=7\\cx+dy=-1\end{cases}$，則 $2x-y=$　(A) − 16　(B) − 6　(C)6　(D)16

23. (　　) 使用反方陣解聯立方程式 $\begin{cases}x-5y=8\\3x+4y=5\end{cases}$，則 $x+y=$　(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

24. (　　) 設 $\begin{bmatrix}x+2y&z+t\\2z+t&x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2\\4&-3\end{bmatrix}$，則　(A)$x>0$　(B)$y<0$　(C)$z>t$　(D)$t<0$

25. (　　) 已知矩陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}$，解方程組 $\begin{cases}ax+by=8\\cx+dy=5\end{cases}$，則 $x-y=$
(A)−16　(B)−6　(C)16　(D) 26

26. (　　) 設 $\begin{bmatrix}2a&b\\-c&3d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\7&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2\\1&1\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$　(A)5　(B)10　(C)15　(D)20

27. (　　) 若 $\begin{bmatrix}a+2c&b+2d\\-a+c&-b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$(A)$\frac{1}{3}$　(B)$\frac{2}{3}$　(C)$\frac{1}{4}$　(D)$\frac{2}{4}$

28. (　　) 已知矩陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}-5&2\\4&3\end{bmatrix}$，若方程組 $\begin{cases}ax+by=1\\cx+dy=-2\end{cases}$ 的解為 (x,y)，則 xy 的值為
(A)14　(B)16　(C)18　(D) 20

29. (　　) 考慮矩陣 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&-a\end{bmatrix}$，其中 a 、 b 、 c 為實數且行列式 $\det(A)=1$。試問行列式 $\det\left(A-A^{-1}\right)$ 之值為下列哪一個選項？　(A)0　(B)1　(C)2　(D)4　(E)16

30. (　　) 設$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}=[a_{ij}]_{2\times 3}$，則 $a_{22}=$　(A)6　(B)7　(C)-6　(D)-7

31. (　　) 已知矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$的反方陣為$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$，解方程組$\begin{cases} ax+by=3 \\ cx+dy=-3 \end{cases}$，則 $x+2y=$　(A)-12　(B)-8　(C)12　(D)24

32. (　　) 若$\begin{bmatrix} x-y & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} z & -y & 1 \\ -5 & 4 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y+z & x-z & -1 \\ -6 & x+y & -6 \end{bmatrix}$，則數對$(x,y,z)=$　(A)(1,2,3)　(B)(2,3,4)　(C)(3,4,5)　(D)(4,5,6)

33. (　　) 關於矩陣$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$，則下列敘述何者正確？　(A)矩陣 A 有 3 列 2 行　(B)矩陣 A 的第(2,1)元是 2　(C)矩陣的和$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$　(D)矩陣 $3B$ 的所有元的和為 -30

34. (　　) 地衣是藻類和菌類的共生體，藻類行光合作用提供養分給菌類，菌類則提供水分和無機質給藻類。下面是實驗室培育地衣的觀察資料，令$\langle a_n\rangle$和$\langle b_n\rangle$分別代表藻類和菌類在時間點 n 的數量，已知彼此符合下列關係，$a_{n+1}=2a_n+3b_n$，$b_{n+1}=3a_n+5b_n$，若二階方陣 A 滿足$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=A\times\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$（其中 n 為非負整數），則方陣 A^{-1} 之第 2 行的所有元之和為　(A)2　(B)5　(C)3　(D)-1

35. (　　) 設$\begin{bmatrix} \sin 2\theta & a \\ (\sin\theta-\cos\theta)^2 & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & (\sin\theta+\cos\theta)^2 \\ b & \tan\theta+\cot\theta \end{bmatrix}$，則 $a+b+c=$　(A)8　(B)-8　(C)7　(D)-7

36. (　　) 小騰在銀行設定的提款密碼為四位數 $abcd$，他將密碼的格式寫成二階方陣$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且此二階方陣滿足$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，試求此四位數密碼 $abcd=$
(A) 3297　(B) 7923　(C) 9237　(D) 2973

37. (　　) 設兩方陣 A，B 滿足 $A+2B=\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$，$A-2B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$X=A^2-4B^2$，則矩陣 X 之所有元素的和為　(A)26　(B)27　(C)-16　(D)-17

38. (　　) 設 A、B、C 均為 n 階矩陣（O 為 n 階零矩陣），則下列各性質何者必成立？　(A)$(A+B)C=AC+BC$　(B)$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$　(C)若 $A^2=O$，則 $A=O$　(D)若 $AB=AC$，$A\neq O$，則 $B=C$

39. (　　) 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$，若$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$成立，則 $k=$　(A)4　(B)5　(C)6　(D)7

二、填充題(48 小題)

1. 已知矩陣$A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 2}$，其中$a_{ij}=3i+2j$，則矩陣 A 的第 2 行各元之和為＿＿＿＿＿＿。

2. 已知二階方陣 A 滿足$A^2=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$且$A^3=\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$，請利用$A^2A=A^3$，求得二階方陣$A=$＿＿＿＿。

3. 若 $A=\begin{bmatrix} a-3 & 1 \\ 2 & a-2 \end{bmatrix}$，且 A^{-1} 不存在，則 $a=$ ____________ 。

4. 矩陣 $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣為____________ 。

5. 設 $A-3B=\begin{bmatrix} -1 & 6 & -9 \\ -5 & -5 & 17 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$，$2A+4B=\begin{bmatrix} 8 & 2 & 12 \\ 10 & 0 & -6 \\ -4 & 2 & 14 \end{bmatrix}$，則 $A=$ ____________ 。

6. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，則(1) $AB=$ ________ 。 (2) $BA=$ ________ 。

7. 小明透過魚菜共生的有機農法，經過設計規劃後不用澆水、換水，不添加農藥化肥、抗生素、生長激素等，靠著魚幫菜、菜幫魚的共生原理，即能在家採收到新鮮無毒的蔬菜。令 $\langle a_n\rangle$ 和 $\langle b_n\rangle$ 分別代表魚和菜在第 n 個月的數量，已知符合下列關係：$a_{n+1}=3a_n+4b_n$，$b_{n+1}=2a_n+b_n$，若二階方陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=A\times\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，其中 n 為非負整數。則方陣 A 的反方陣為____________ 。

8. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$，則 $AC+BC=$ ____________ 。

9. 若 $\begin{bmatrix} x+y & a+b \\ x-y & a-b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，則 x、y、a、b 中最大的數字為①______ ，最小的數字為②______ 。

10. 若 $A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$，且 $5X-A+B=2A+3X$，則 $X=$ ____________ 。

11. 若 A、B 都是 3×3 階矩陣且 $A=[a_{ij}]$、$B=[b_{ij}]$，已知 $a_{ij}=2i+j$，$b_{ij}=i-2j$，則 $A+B=$ _______ 。

12. 已知矩陣方程式滿足 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，則 $X=$ ____________ 。

13. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，若 $A-2B+X=2C+B-2X$，則 $X=$ _____ 。

14. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$，則 $AC+BC=$ ____________ 。

15. 已知矩陣 X 與 Y 滿足 $X-3Y=\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 12 & -10 \end{bmatrix}$，$X+3Y=\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -6 & 20 \end{bmatrix}$，則 $X=$ ①______ ，$Y=$ ②_______ 。

16. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，則

(1) $(A+B)\times(A-B)=$ ____________ 。 (2) $AB-BA=$ ____________ 。

17. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$，若矩陣 X 滿足 $AX=B$，求矩陣 $X=$ ________ 。

18. 利用乘法反方陣解方程組 $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 5x+3y=5 \end{cases}$ 得 $(x,y)=$ ____________ 。

19. 使用反方陣，解聯立方程式 $\begin{cases} 3x-4y=10 \\ x+5y=-3 \end{cases}$，則 $x=$ ①____________ 、$y=$ ②____________ 。

20. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，若 $2X-3A=2(B-3X)-3B$，而 $X=[a_{ij}]_{2\times3}$，則 $X=$ ______ 。

21. 設 $A=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-2&5\\1&1\end{bmatrix}$，則

(1) $AC+BC=$ ____________。　　(2) $BA+BC=$ ____________。

22. 設 $A=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-3\\6&4\end{bmatrix}$，若矩陣 X 滿足 $5(X+B)=7X+3A$，則矩陣 $X=$ ____________。

23. 設 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&0\\-2&0\\1&2\end{bmatrix}$，若矩陣 X 滿足 $-2X+3(A-B)=A+X$，則 $X=$ ____________。

24. 設聯立方程式 $\begin{bmatrix}a&8\\1&a-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 無解，則 a 的值為____________。

25. 設 $A=\begin{bmatrix}6&-7\\43&18\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-6&8\\-42&-17\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}41&-3\\9&17\end{bmatrix}$，試求 $AC+BC=$ ____________。

26. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&5\\3&4&-6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1&-5\\-2&-3&5\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$，則 $AC+BC$ 之值為____________。

27. 若矩陣 $\begin{bmatrix}a+b&a-b\\4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\x&y\end{bmatrix}$，則 $2a+b=$ ①____________，$x-2y=$ ②____________。

28. 設 $A=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}6&8\\1&5\end{bmatrix}$，若矩陣 C 滿足 $2(C+B)=5C+2A$，則矩陣 $C=$ ____________。

29. 設 a 為實數，若方陣 $A=\begin{bmatrix}2&3\\a+4&a+1\end{bmatrix}$ 的反方陣不存在，則 a 值 $=$ ____________。

30. 設 $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\3&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&3\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}3&0&4\\1&1&7\end{bmatrix}$

(1) 若 $A-B+2X=C+3A+X$，則 $X=$ ____________。

(2) 若 $3Y+A+B+C=A-2B+4C+Y$，則 $Y=$ ____________。

31. 已知 $A=\begin{bmatrix}-2&3\\0&-3\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1&1\\5&4\end{bmatrix}$，且矩陣 X、Y 滿足 $X-2Y=A$ 與 $2X+Y=B$，則矩陣 $X=$ _______。

32. 若矩陣 $A=\begin{bmatrix}x&2\\3&x-5\end{bmatrix}$，且 A 的反方陣不存在，則 $x=$ ____________。

33. 已知矩陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}3&5\\-5&8\end{bmatrix}$，解方程組 $\begin{cases}ax+by=8\\cx+dy=4\end{cases}$，則 $x=$ ①______、$y=$ ②______。

34. 使用反方陣，解聯立方程式 $\begin{cases}2x+y=8\\3x-2y=5\end{cases}$，則 $x=$ ①____________、$y=$ ②____________。

35. 使用反方陣解聯立方程式 $\begin{cases}2x+3y=-1\\x+4y=-3\end{cases}$，則 $x=$ ①____________、$y=$ ②____________。

36. 若 A、B 都是 3×2 階矩陣，且 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，已知 $a_{ij}=i+j$，$b_{ij}=3i-2j$，則 $A=$ ①____________，$B=$ ②____________。

37. 已知 $A+B=\begin{bmatrix}3&4\\-1&1\end{bmatrix}$、$A-B=\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}$，若 $A^2-B^2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$ ____________。

38. 設 $A=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\4&3&-5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2&5\\-2&1&-3\\4&0&1\end{bmatrix}$，若 $AB=C=\left[c_{ij}\right]_{2\times3}$，則 $c_{23}=$ ____________。

39. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\2 & -4 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\2 & 6 & 1\end{bmatrix}$，則方程式 $X+3A=3(X+B)-2A$ 之解 $X=$ ________。

40. 設 $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 3 & 1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}$，則

(1) $A(B+C)=$ ________。 (2) $AB+AC=$ ________。

41. 已知矩陣 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}$，解方程組 $\begin{cases}ax+by=8\\cx+dy=10\end{cases}$，則 $x=$ ①______、$y=$ ②______。

42. 設 A、B 均為二階方陣，若 $A+B=\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}$，$A-B=\begin{bmatrix}0 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}$，則 $A^2-B^2=$ ________。

43. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}k & 2\\3 & 9\end{bmatrix}$，若 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 成立，則 $k=$ ________。

44. 小騰在銀行設定的提款密碼為四位數 $abcd$，他將密碼的格式寫成二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，且此二階方陣滿足：$\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}9 & 8\\26 & 20\end{bmatrix}$，試求此四位數密碼 $abcd=$ ________。

45. 設方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$、方陣 $B=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，滿足 $AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$，則 $a^2+b^2+c^2+d^2=$ ________。

46. 設 P、Q、R 為二階方陣，已知 $PQ=\begin{bmatrix}2 & 0\\12 & 0\end{bmatrix}$，$PR=\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 12\end{bmatrix}$ 且 $Q+R=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 3\end{bmatrix}$，則 $P=$ ________。

47. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & a\\b & 4\end{bmatrix}$ 滿足 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$，則實數 $a-b=$ ________。

48. 嘉鈞須傳送一組 4 個數字的密碼 $abcd$ 給馨宸。為了保密，嘉鈞事先跟馨宸約定：只會傳送兩個二階方陣 A 與 B 給馨宸，且 A 與 B 滿足關係式 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}A=B$。

(1) 已知嘉鈞傳送的密碼為 3344，且 $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\0 & 3\end{bmatrix}$，則 $B=$ ________。

(2) 已知馨宸收到嘉鈞傳來 $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\0 & 3\end{bmatrix}$ 與 $B=\begin{bmatrix}6 & 9\\4 & 8\end{bmatrix}$，則密碼 $abcd$ 為________。

三、計算題(74 小題)

1. 已知 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{bmatrix}$，試求 A^{-1}。

2. 設 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 3\\2 & 4 & 1\end{bmatrix}$，若矩陣 X 使得 $2X+5A=3B$，試求矩陣 X。

3. 某校舉辦園遊會，甲、乙兩班同學恰巧預計販賣相同的東西，已知甲乙兩班同學分別購置原物料如下：每支 8 元的熱狗甲班買 50 支、乙班買 40 支；每瓶 200 元的炸物用油甲班買了 3 瓶、乙班買 4 瓶；每包 80 元的冷凍花枝丸甲班買了 5 包、乙班買了 8 包；每杯 15 元的紅茶甲班買了 50 杯、乙班買了 40 杯。試利用矩陣乘法求出甲乙兩班的花費各為多少錢。

4. 設 $A=\begin{bmatrix}8 & -5\\31 & 29\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-6 & 5\\-31 & -28\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}4 & 2\\-3 & 7\end{bmatrix}$，試求 $AC+BC$。

5. 已知 A、B 都是 3×2 階矩陣，且 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，其中 $a_{ij}=3i+j$，$b_{ij}=i-2j$，試求矩陣 $A-B$。

6. 試求 $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -5 & -1\end{bmatrix}$ 的乘法反方陣。

7. 已知矩陣 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，試解方程組 $\begin{cases}ax+by=2\\ cx+dy=-1\end{cases}$。

8. 設 $B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 5 & 6\end{bmatrix}$，試求 B^2-10B。

9. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB　(2) BA

10. 設 $A=\begin{bmatrix}6 & -7\\ 43 & 18\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-6 & 8\\ -42 & -17\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}51 & -2\\ 7 & 18\end{bmatrix}$，試求 $AC+BC$。

11. 設 $A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 15\\ 3 & 6 & -9\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 4 & -8\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}$，若矩陣 C 滿足 $3(2C+B)=2A$，試求矩陣 C。

12. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & -3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & -1 & 9\\ 6 & -8 & 0\end{bmatrix}$，試求 $2(A+3B)-5(2B-A)$。

13. 設 $A=\begin{bmatrix}6 & -7\\ 43 & 18\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-6 & 8\\ -43 & -18\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}51 & 2\\ -7 & 18\end{bmatrix}$，試求 $AC+BC$。

14. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB　(2) BA

15. 已知矩陣方程式滿足 $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，試求 X。

16. 判斷下列各二階方陣的反方陣是否存在？若存在，求出它們的反方陣。

(1) $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 11 & -4\end{bmatrix}$　(2) $B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 6\end{bmatrix}$

17. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB　(2) BA

18. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -6\end{bmatrix}$，若矩陣 C 滿足 $2(C+4A)=3(B+2A)$，試求矩陣 C。

19. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB　(2) BA

20. 判斷下列各二階方陣的反方陣是否存在？若存在，求出它們的反方陣。

(1) $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{bmatrix}$　(2) $B=\begin{bmatrix}12 & 3\\ 8 & 2\end{bmatrix}$

21. 已知矩陣 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$，試解方程組 $\begin{cases}ax+by=2\\ cx+dy=-1\end{cases}$。

22. 密碼學研究加密、解密的歷史中，有一段與反方陣有關的運用。萊斯特．希爾（Lester S. Hill）在1929 年發明了希爾密碼，將英文字母以 26 進制表示，如圖所示

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

有一個加密矩陣 A（又稱密匙）我們想要傳遞的訊息是 B，加密後的 C 即是 $C=AB$ ，但為了將 C 轉換成英文字母，我們會將求出的數同除 26 取其餘數。例如，所求的 $C=\begin{bmatrix}51\\122\end{bmatrix}$ ，我們會取各元素同除 26 的餘數，因此改寫成 $\begin{bmatrix}25\\18\end{bmatrix}$，字母轉換即為 $\begin{bmatrix}Z\\S\end{bmatrix}$。

若加密矩陣為 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&7\end{bmatrix}$，試著回答下列問題：（請留意矩陣與字母，勿混淆）

(1) 我們想要傳遞的訊息為 $B=\begin{bmatrix}O\\F\end{bmatrix}$，則經過 A 加密後，得到的字母轉換為？（請寫出用字母表示的矩陣）

(2) 當我們拿到加密後的訊息 C，欲反推 B，我們必須使用 A 的反方陣 A^{-1} ，求 $A^{-1}=$？

23. 判斷下列各二階方陣的反方陣是否存在？若存在，求出它們的反方陣。

(1) $A=\begin{bmatrix}10&-5\\-2&1\end{bmatrix}$　(2) $B=\begin{bmatrix}-6&-4\\-5&-3\end{bmatrix}$。

24. 矩陣乘法通常應用於數據轉換、圖像處理、機器學習等領域，用於組合、轉換和分析數據。最有名的一種矩陣分解技巧——奇異值分解（SVD），其可將一個矩陣 M 分解成三個矩陣的乘積，即 $M=ABC$ 。而其中 A 為正交矩陣，C 為轉置矩陣。

正交矩陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 的特性包括：

1.行向量為單位向量，即 $a^2+c^2=1$ 、$b^2+d^2=1$ 。

2.行向量的內積為 0（正交），即 $ac+bd=0$ 。

如果矩陣為 $M=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，我們定義轉置矩陣 $M^T=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$。

有了這兩個矩陣的認識後，我們就可以實際試驗正交矩陣乘法的特性了，試問：

(1) 下列何者非正交矩陣？(A) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$。

(2) 若 $A=\begin{bmatrix}-1&3\\5&2\end{bmatrix}$，則 A 的轉置矩陣 $A^T=$？(A) $\begin{bmatrix}1&-3\\-5&-2\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}2&5\\3&-1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}2&3\\5&-1\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}-1&5\\3&2\end{bmatrix}$。

(3) 若正交矩陣 $M=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$，求 $M\times M^T=$？

25. 試用乘法反方陣解方程組$\begin{cases}4x+5y=3\\3x+4y=2\end{cases}$。

26. 已知矩陣$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$的反方陣為$\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}$，解方程組$\begin{cases}ax+by=15\\cx+dy=-5\end{cases}$，試求 x、y 的值。

27. 若矩陣 X 與 Y 滿足 $X+2Y=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}$，$Y-3X=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$，試求 X、Y。

28. 設 $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & 6\\5 & 7\end{bmatrix}$，試求 $AB-BA$。

29. 試求矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & -1\end{bmatrix}$的反方陣 A^{-1}。

30. 試用乘法反方陣解方程組$\begin{cases}2x-3y=8\\9x+4y=1\end{cases}$。

31. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\1 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & 2\\0 & 6\end{bmatrix}$，若矩陣 C 滿足 $2(C+4A)=3(B+2A)$，試求矩陣 C。

32. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}6 & 5\\2 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\4 & 5 & 7\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB　　(2) BA

33. 設 $A=\begin{bmatrix}9 & -4\\5 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}47 & -11\\-6 & 23\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-46 & 10\\5 & -23\end{bmatrix}$，試求 $AB+AC$。

34. 使用反方陣解聯立方程式$\begin{cases}x-5y=-4\\x-2y=-7\end{cases}$。

35. 已知矩陣$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$的反方陣為$\begin{bmatrix}-3 & 6\\1 & 2\end{bmatrix}$，試解方程組$\begin{cases}ax+by=4\\cx+dy=3\end{cases}$。

36. 判斷下列各二階方陣的反方陣是否存在？若存在，求出它們的反方陣。

(1) $A=\begin{bmatrix}5 & 7\\3 & 4\end{bmatrix}$　　(2) $B=\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 6\end{bmatrix}$

37. 試用乘法反方陣解方程組$\begin{cases}5x+2y=-8\\3x+8y=2\end{cases}$。

38. 試求 $A=\begin{bmatrix}9 & -7\\5 & -4\end{bmatrix}$的乘法反方陣。

39. 設 $A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\-4 & 6\end{bmatrix}$，若矩陣 C 滿足 $2(C+2A)=3(B-2A)$，試求矩陣 C。

40. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\-2 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB　　(2) BA

41. 試用乘法反方陣解方程組$\begin{cases}4x-5y=3\\3x+4y=10\end{cases}$。

42. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 4\\2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB　　(2) BA

43. 設矩陣$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB　　(2) BA

44. 設$\begin{bmatrix}x+1 & y^2\\ x-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y-1 & 1\\ 4y & 2\end{bmatrix}$，試求 x、y 之值。

45. 若$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix}$，試求$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$。

46. 試求$A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$的乘法反方陣。

47. 設$A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，若矩陣 C 滿足$3(C+B)=2A$，試求矩陣 C。

48. 設$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，若 $A+2B+2X=C-A+3X$，試求矩陣 X。

49. 已知矩陣$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$的反方陣為$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -5\end{bmatrix}$，試解方程組$\begin{cases}ax+by=4\\ cx+dy=1\end{cases}$。

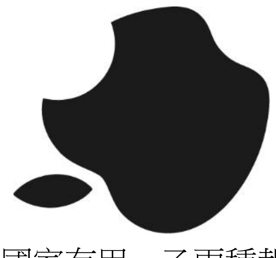
50. 若$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$是一個可以以原點為中心、將圖片逆時針旋轉 45°的矩陣，試求下列問題：

(1) 若$P(-2,5)$，將 P 以原點為中心、逆時針旋轉 45°得到 Q，即$Q=AP$。則 Q 坐標為何？

(2) 若想找一個以原點為中心、將圖片順時針旋轉 45°的矩陣 B（即 A 的反矩陣）則 B 矩陣為何？

(3) 圖片為蘋果的商標，但照的角度不對，它和原商標的圖形差了 135°（原商標逆時針 135°後會得到此圖）若想讓此圖片變成原來的商標，則圖片的每一個坐標 P_i（像素）應如何運算才會得到原來商標的結果？

(A) A^3P_i　(B) A^5P_i　(C) A^6P_i　(D) A^8P_i



51. 某國家有甲、乙兩種報紙販售，民眾經過長期觀察得知，原本購買甲報紙的人，下個月會有 60%的比例繼續購買甲報紙，40%會換購買乙報紙；而原本購買乙報紙的人，下個月會有 45%繼續購買乙報紙，55%會換購買甲報紙。已知現有 1000 人購買甲報紙、1200 人購買乙報紙，請問民眾可以預估 2 個月後購買甲報及乙報的人數何者較多？

52. 設$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 11 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$，若矩陣 X 滿足 $AX=B$，試求矩陣 X。

53. 設$A=\begin{bmatrix}20 & -5\\ 5 & 35\\ -15 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 0 & -8\end{bmatrix}$，試求$\frac{1}{10}AB$。（提示：$A=5\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 7\\ -3 & 0\end{bmatrix}$，$B=2\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -4\end{bmatrix}$）

54. 設 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\0 & 1 & 2\\4 & -5 & -4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\3 & 4 & 0\\-6 & 5 & 2\end{bmatrix}$，試判別 $A+B$ 是否與 $B+A$ 相等。

55. 已知矩陣 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix}2 & -1\\5 & 3\end{bmatrix}$，試解方程組 $\begin{cases}ax+by=-4\\cx+dy=5\end{cases}$。

56. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\2 & -1 & 0\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB　　(2) BA

57. 程式設計的課程中，有一個主題是寫出數學課程所學公式的程式，只要輸入條件，就能用程式將答案算出，其中一道經典的程式設計練習題正是解二元一次聯立方程式。網路上最常見的寫法，是使用克拉瑪公式，其次則為加減消去法。

小騰在學完乘法反方陣後，發現可以使用乘法反方陣的公式，只要輸入聯立方程式的係數，先讓程式求出係數矩陣的反方陣後，再作列運算，即可求解。詳細的流程說明如下：

目標是二元一次聯立方程式 $\begin{cases}ax+by=m\\cx+dy=n\end{cases}$，$a$、$b$、$c$、$d$、$m$、$n$ 為已知，求解 x、y=？

步驟 1：輸入 $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，則程式計算並顯示 det($A$)。

步驟 2：若 det(A)≠0，顯示 A 的乘法反方陣 A^{-1}。（若 A^{-1} 存在）

步驟 3：輸入 $B=\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$，則程式計算並顯示 $A^{-1}B=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$。

若小騰順利完成了這個程式，且程式是沒有問題的，試回答下列問題：

(1) 下列何者並不會跑出 A^{-1}？

(A) $\begin{bmatrix}2 & 1\\-5 & 3\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}-3 & 4\\-6 & 8\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 1\end{bmatrix}$。

(2) 若輸入 $A=\begin{bmatrix}3 & -5\\-3 & 6\end{bmatrix}$，程式跑出的 $A^{-1}=$？

(3) 承(2)，繼續輸入 $B=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$，程式跑出的 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$=？

58. 試求 $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\7 & 3\end{bmatrix}$ 的乘法反方陣。

59. 某家電賣場今年 6 月和 7 月的冷氣銷售量、售價及安裝費用如下列兩個表格所示，假設消費者購買冷氣時必定同時安裝，試求 6 月和 7 月販售冷氣機的總收入分別為何？

銷售量（單位為台）

	型號甲	型號乙
6 月	40	52
7 月	50	60

價格表（單位為千元）

	售價	安裝費
型號甲	24	1
型號乙	30	2

60. 判斷下列各二階方陣的反方陣是否存在？若存在，求出它們的反方陣。

(1) $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\11 & 4\end{bmatrix}$　　(2) $B=\begin{bmatrix}3 & 1\\6 & 2\end{bmatrix}$

61. 判斷下列各二階方陣的反方陣是否存在？若存在，求出它們的反方陣。

(1) $A=\begin{bmatrix}4&5\\6&8\end{bmatrix}$　　(2) $B=\begin{bmatrix}6&9\\2&3\end{bmatrix}$

62. 設 $A=\begin{bmatrix}12&0\\-3&21\\6&-15\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-7&35\\0&-28\end{bmatrix}$，試求 $\dfrac{1}{21}AB$。

63. 試用乘法反方陣解方程組 $\begin{cases}9x-2y=3\\2x+3y=11\end{cases}$。

64. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&3\\-1&3&4\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB　　(2) BA

65. 若 $\begin{bmatrix}x+3y&2z-t\\z+3t&x+4y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\15&9\end{bmatrix}$，試求 $\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$。

66. 使用反方陣解方程組 $\begin{cases}x-5y=8\\3x+4y=5\end{cases}$。

67. 設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-4&2\\2&-1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}10&-4\\-5&2\end{bmatrix}$，試求

(1) AB、AC。

(2) 若 $AB=AC$，則 B 是否一定等於 C？

68. 試求 $A=\begin{bmatrix}3&5\\-2&-3\end{bmatrix}$ 的乘法反方陣。

69. 設 $A=\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&4&0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-3&2\\1&-1\end{bmatrix}$，試求 $(A+2C)B$。

70. 設 $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&-4&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&-2&1\\2&6&1\end{bmatrix}$，若矩陣 X 滿足 $X+5A=3X+3B$，試求 X。

71. 設 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 滿足 $a_{ij}=\begin{cases}i, & i>j\\j, & i\le j\end{cases}$，試求

(1) a_{23}。

(2) 矩陣 A 的所有元素總和。

提示：$\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$；$\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

72. 小米想借哥哥的平板使用，但被四位數密碼鎖住無法執行，哥哥故意刁難，僅告訴小米平板密碼 $abcd$ 符合以下二階方陣的等式：

$\begin{bmatrix}1&-3\\-2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$，請試著幫小米找出此四位數密碼。

73. 設 A 為二階方陣，已知 $A\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-5\end{bmatrix}$，試求 A。

74. 設 $A=\begin{bmatrix}2&-3\\4&-5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}$，

(1) 若 $3(X+2A)=X-2(B-A)$，試求 X。

(2) 若 $XB=A$，試求 X。

答案：

一 、 單選題(39 小題)

1.B 2.A 3.E 4.A 5.C 6.C 7.C 8.C 9.C 10.B 11.B 12.C 13.A 14.C 15.D
16.B 17.A 18.C 19.A 20.A 21.A 22.B 23.B 24.C 25.A 26.B 27.A 28.C 29.D 30.D
31.A 32.A 33.D 34.D 35.A 36.B 37.A 38.A 39.C

二 、 填充題(48 小題)

1. 30 2. $\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 3. 4 或 1 4. $\begin{bmatrix}5 & 1\\ -6 & -1\end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 5\\ -2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ 6.(1)$\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ -12 & 8 & 0\\ -1 & 19 & 10\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}11 & 15\\ -3 & 11\end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix}3 & 3\\ 11 & -4\end{bmatrix}$ 9. ①3 ②-1 10. $\begin{bmatrix}1 & -5 & 9\\ 7 & 5 & -3\end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & 4 & 3\\ 8 & 7 & 6\end{bmatrix}$ 12.$\begin{bmatrix}-47 & -29\\ 34 & 21\end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}\\ 4 & 0 & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix}10 & 88\\ -3 & 39\end{bmatrix}$ 15. ①$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ ②$\begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ 16. (1)$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix}\frac{8}{13} & -\frac{8}{13}\\ -\frac{12}{13} & -\frac{1}{13}\end{bmatrix}$ 18. $(7,-10)$ 19. ①2 ②-1 20. $\begin{bmatrix}\frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8}\\ \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8}\end{bmatrix}$ 21. (1)$\begin{bmatrix}-9 & 26\\ -5 & 30\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}0 & 18\\ 10 & 14\end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 9 & 7\end{bmatrix}$ 23. $\begin{bmatrix}-\frac{7}{3} & 0\\ 2 & \frac{2}{3}\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ 24. 4 或 -2 25. $\begin{bmatrix}9 & 17\\ 50 & 14\end{bmatrix}$ 26. $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ 27. ①13 ②-2

28. $\begin{bmatrix}2 & 6\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ 29. -10 30. (1)$\begin{bmatrix}6 & 7 & 9\\ 9 & 6 & 12\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}3 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2}\\ -\frac{3}{2} & -3 & 6\end{bmatrix}$ 31. $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ 32. 6 或 -1

33. ①44 ②-8 34. ①3 ②2 35. ①1 ②-1 36. ①$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ ②$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ 37. 23

38. 6 39. $\begin{bmatrix}-2 & 3 & 6\\ 2 & -19 & 1\end{bmatrix}$ 40. (1)$\begin{bmatrix}6 & 27 & 16\\ 3 & 1 & 8\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}6 & 27 & 16\\ 3 & 1 & 8\end{bmatrix}$ 41. ①26 ②58

42. $\begin{bmatrix}6 & 10\\ 17 & 21\end{bmatrix}$ 43. 6 44. 1470 45. 30 46. $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 4\end{bmatrix}$ 47. 5 48. (1)$\begin{bmatrix}6 & 3\\ 8 & 4\end{bmatrix}$ (2)3524

三 、 計算題(74 小題)

1. $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix}6 & -1 & -3\\ 8 & 6 & -1\end{bmatrix}$ 3. 甲班 2150 元、乙班 2360 元 4. $\begin{bmatrix}8 & 4\\ -3 & 7\end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix}5 & 8\\ 7 & 10\\ 9 & 12\end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ 7. $x=5$，$y=0$ 8. $\begin{bmatrix}-19 & 0\\ 0 & -19\end{bmatrix}$ 9. (1)$\begin{bmatrix}6 & 11 & 6\\ 4 & 6 & 12\end{bmatrix}$ (2)不存在 10. $\begin{bmatrix}7 & 18\\ 58 & 16\end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix}-1 & -1 & 9\\ -2 & 1 & -8\end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix}-9 & 18 & -15\\ 11 & 81 & -21\end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix}-7 & 18\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 14. (1)$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 14\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}5 & 5 & 4\\ 6 & 9 & 3\\ 1 & 4 & -1\end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix}3 & -4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ 16. (1)$\begin{bmatrix}4 & -1\\ 11 & -3\end{bmatrix}$ (2)不存在 17. (1)$\begin{bmatrix}2 & 13\\ 1 & 10\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}9 & 4 & 8\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ 18. $\begin{bmatrix}2 & 9\\ -1 & -11\end{bmatrix}$

19. (1)$\begin{bmatrix}3 & -3\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}-3 & -7 & 0\\ 6 & 9 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix}$ 20. (1) $A^{-1}=\begin{bmatrix}-7 & 5\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ (2) B^{-1}不存在 21. $x=-1$，$y=-8$

22. (1)$\begin{bmatrix}Y\\ Z\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ 23. (1)不存在 (2)存在，$\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -2\\ -\frac{5}{2} & 3\end{bmatrix}$ 24. (1)B (2)D (3)$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

25. $x=2$，$y=-1$ 26. $x=20$，$y=5$ 27. $X=\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{4}{7}\\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}$，$Y=\begin{bmatrix}\frac{3}{7} & \frac{5}{7}\\ \frac{10}{7} & -\frac{3}{7}\end{bmatrix}$ 28. $\begin{bmatrix}4 & -12\\ 12 & -4\end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}$ 30. $x=1$，$y=-2$ 31. $\begin{bmatrix}5 & 6\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ 32. (1)$\begin{bmatrix}26 & 19 & 47\\ -2 & -7 & -3\end{bmatrix}$ (2)不存在

33. $\begin{bmatrix}13 & -9\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ 34. $x=-9$，$y=-1$ 35. $x=6$，$y=10$ 36. (1)存在，$\begin{bmatrix}-4 & 7\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ (2)不存在

37. $x=-2$，$y=1$ 38. $\begin{bmatrix}4 & -7\\ 5 & -9\end{bmatrix}$ 39. $\begin{bmatrix}18 & -5\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 40. (1)$\begin{bmatrix}7 & 11 & 15\\ 6 & 6 & 6\end{bmatrix}$ (2)BA 不存在

41. $x=2$，$y=1$ 42. (1)$\begin{bmatrix}1 & 15\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}4 & 8 & 4\\ 3 & -4 & 5\\ 4 & 3 & 5\end{bmatrix}$ 43. (1)$\begin{bmatrix}5 & -5\\ 6 & -8\\ 9 & 23\end{bmatrix}$ (2)不存在 44. $x=-3$，$y=-1$

45. $\begin{bmatrix}7 & 6\\ -3 & -2\end{bmatrix}$ 46. $\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ 47. $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ 48. $\begin{bmatrix}5 & 5 & 10\\ 2 & 6 & 1\end{bmatrix}$ 49. $x=9$，$y=7$

50. (1)$\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ (2)$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ (3)B 51. 甲報 52. $\begin{bmatrix}5 & 4\\ -13 & -11\end{bmatrix}$ 53. $\begin{bmatrix}12 & 8\\ 3 & -27\\ -9 & -3\end{bmatrix}$

54. 是 55. $x=-13$，$y=-5$ 56. (1)$\begin{bmatrix}9 & -4 & 1\\ 12 & -5 & 2\\ 15 & -6 & 3\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}4 & 10\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ 57. (1)B (2)$\begin{bmatrix}2 & \frac{5}{3}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$

58. $\begin{bmatrix}3 & -2\\ -7 & 5\end{bmatrix}$ 59. 6 月 2664000 元，7 月 3170000 元 60. (1)$\begin{bmatrix}4 & -1\\ -11 & 3\end{bmatrix}$ (2)不存在

61. (1)存在，$\begin{bmatrix}4 & -\frac{5}{2}\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ (2)不存在 62. $\begin{bmatrix}-4 & 20\\ 1 & -33\\ -2 & 30\end{bmatrix}$ 63. $x=1$，$y=3$

64. (1)$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ (2)不存在 65. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 66. $x=3$，$y=-1$

67. (1) $AB=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$AC=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2)否 68. $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 69. $\begin{bmatrix} -1 & 16 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 70. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 2 & -19 & 1 \end{bmatrix}$

71. (1)3 (2)$\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ 72. 7923 73. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 74. (1)$\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$