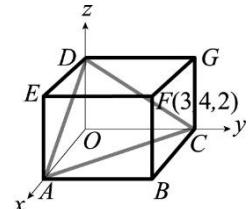


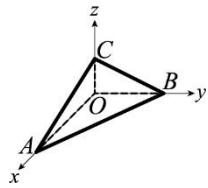
一、單選題(35 小題)

1. () 平面 E 過 $A(3,0,0)$ 、 $B(0,2,0)$ 、 $C(0,0,1)$ 三點，若平面 E 與 xy 平面所夾的銳角為 θ ，則
 $\cos\theta =$ (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{6}{7}$
2. () 已知一平面 $x - 3y + cz = d$ ，若 $O(0,0,0)$ 、 $A(2,0,-1)$ 、 $B(3,k,0)$ 三點皆在平面上，則
 $c + d + k =$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) -2
3. () 已知空間中一點 $A(5,-2,3)$ 對平面 E 的投影點為 $B(2,3,-1)$ ，則下列敘述何者正確？
(A) 平面 E 的法向量 \vec{n} 平行 $(3,5,4)$
(B) 點 $C(-3,0,1)$ 在平面 E 上
(C) A 點和平面 E 的距離為 5
(D) 過 A 點與平面 E 平行的平面 E_1 方程式為 $3x - 5y + 4z - 37 = 0$
4. () 若平面 $E: 2x + 4y - 4z + 5 = 0$ 和 yz 平面的鈍夾角為 θ ，則
 $\cos\theta =$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
5. () 設空間中三點 $A(-1,1,2)$ 、 $B(2,1,-1)$ 、 $C(3,0,1)$ ，若平面 $E \perp \overline{AB}$ 且 C 點到平面 E 的距離為 $2\sqrt{2}$ ，則 E 的方程式為
(A) $x - z + 2 = 0$ 或 $x - z - 6 = 0$ (B) $x - z - 2 = 0$ 或 $x - z + 6 = 0$ (C) $x + y + 2 = 0$ 或 $x + y - 6 = 0$
(D) $x - y - 2 = 0$ 或 $x - y + 6 = 0$
6. () 已知平面 π 的 y 截距為 -2，又過點 $A(1,0,1)$ 、 $B(-3,4,1)$ ，則 π 的 z 截距為
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{3}{5}$
7. () 設平面 $ax + by + cz = 1$ 通過 P 、 Q 兩點，且 $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, \sqrt{3})$ ，則 $\overrightarrow{PQ} \cdot (a, b, c) =$
(A) 6 (B) 12 (C) 0 (D) $\sqrt{3}$
8. () 三平面 $E_1: 2x + y - z = 1$ ， $E_2: x + ay + 3z = 7$ ， $E_3: bx + cy - 2z = 7$ ，若 $E_1 \perp E_2$ ， $E_1 \parallel E_3$ ，則
 $a + b + c =$ (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10
9. () 兩平行平面 $E_1: 2x - 3y + 6z + 1 = 0$ 與 $E_2: 4x - 6y + 12z - 5 = 0$ 的距離為
(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$
10. () 兩平面 $E_1: \sqrt{2}x + y + z - 2 = 0$ 和 $E_2: y - z + 5 = 0$ 的夾角為 (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°
11. () 若二平面 $E_1: x + 2y + 3z = 6$ 與 $E_2: 3x + 6y + 9z + k = 0$ 之距離為 $\sqrt{14}$ ，則滿足條件 k 之值有 2 個，其和為 (A) -36 (B) -37 (C) -38 (D) -39
12. () 設 a 、 b 為實數，如果空間中某一平面通過 $(a,0,0)$ 、 $(0,b,0)$ 、 $(0,0,3)$ 、 $(1,2,3)$ 這些點，則下列敘述何者正確？
(A) a 、 b 有可能都是正數 (B) a 、 b 有可能是一個正數一個負數 (C) a 、 b 有可能都是負數
(D) a 、 b 有可能只有一個等於 0
13. () 如圖，長方體 $OABC-DEFG$ 在空間坐標系中， O 為原點， A 、 C 、 D 三點分別在 x 、 y 、 z 軸正向，若點 $F(3,4,2)$ ，則過 A 、 C 、 D 三點的平面方程式為
(A) $3x + 4y + 2z - 12 = 0$ (B) $3x + 4y + 2z - 24 = 0$
(C) $4x + 3y + 6z - 12 = 0$ (D) $4x + 3y + 6z - 24 = 0$



14. () 四面體 $OABC$ 如圖所示，其三邊 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 兩兩互相垂直，且 $\overline{OA} = 3$ 、 $\overline{OB} = 2$ 、 $\overline{OC} = 1$ ，則平面 ABC 的方程式應為下列哪一個？

- (A) $3x + 2y + z - 6 = 0$ (B) $3x + 2y + 6z - 6 = 0$
 (C) $2x + 3y + z - 6 = 0$ (D) $2x + 3y + 6z - 6 = 0$



15. () 已知兩平面 $E_1 : 2x - 3y + z - 3 = 0$ 、 $E_2 : ax + 6y + bz - 4 = 0$ ， a 、 b 均為實數，若 $E_1 // E_2$ ，則 $a + b =$ (A) -14 (B) -10 (C) -6 (D) -2

16. () 下列何點與 $A(1,2,3)$ 、 $B(5,7, -3)$ 、 $C(1,1, -3)$ 三點共平面？
 (A) $(2,3,0)$ (B) $(3,2,1)$ (C) $(1,0,1)$ (D) $(1,5, -3)$

17. () 設空間中兩平面 $E_1 : 3x + 4y - 12z + 6 = 0$ 和 $E_2 : 3x + 4y - 12z - 7 = 0$ ，則此兩平面 E_1 、 E_2 的距離為 (A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{13}$ (D) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

18. () 若兩平行平面 $E_1 : x - y + z = k$ 與 $E_2 : x - y + z = 4$ 的距離為 $\sqrt{3}$ ，則 $k =$
 (A) 3 或 -3 (B) 5 或 -4 (C) 4 或 -5 (D) 7 或 1

19. () 已知 $A(3, -1,2)$ 、 $B(1,3, -6)$ ，若平面 $E : ax + by + cz = 1$ 為 \overline{AB} 的垂直平分面，則
 $a + b + c =$ (A) $\frac{7}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $-\frac{3}{8}$ (D) $\frac{5}{8}$

20. () 已知空間上有二平面 $E_1 : x - ky + z = 1$ 、 $E_2 : 2x + y + 2z - 1 = 0$ ，若 E_1 與 E_2 平行，則
 $k =$ (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) -2

21. () 在空間坐標系中，設 $A(1,2,3)$ 、 $B(3,0,5)$ ，下列哪一點在 \overline{AB} 的垂直平分面上？
 (A) $(1,0, -6)$ (B) $(4,2,8)$ (C) $(0,8,3)$ (D) $(3,1,3)$

22. () 設原點在平面 E 上的投影點為 $(1,2, -2)$ ，則 $A(3,2,1)$ 到平面 E 的距離為
 (A) 2 (B) $\frac{4}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{2}{3}$

23. () 已知兩平行平面 $E_1 : 2x - 2y - z = 1$ 和 $E_2 : 2x - 2y - z = k$ 的距離為 2 ，則 k 的值為
 (A) -5 (B) 7 (C) 7 或 -5 (D) -7 或 5

24. () 通過空間中三點 $A(-3,1,2)$ 、 $B(5,3, -7)$ 、 $C(1,7,0)$ 的平面方程式為
 (A) $5x - 2y + 4z + 9 = 0$ (B) $2x - 5y + 4z + 3 = 0$ (C) $4x + 2y - 5z + 20 = 0$
 (D) $5x - 4y - 2z + 23 = 0$

25. 在 3D 繪圖中，有一門課程「電腦（計算機）圖形學」它生成的圖像主要是數位計算後的產物。

3D 繪圖的應用包含建築與工業、3D 遊戲的影像、地質學的岩坡工程、醫療的數位攝影等，受到廣泛使用。在數學課程中，3D 繪圖最常見的免費軟體是 Geogebra。

小龍在學習使用 Geogebra 數學繪圖軟體時，他想畫兩面夾角 120° 的屋頂。他先輸入第一面屋頂的平面方程式 $E_1 : x - y + \sqrt{2}z = 12$ ，若他想完成第二面屋頂 E_2 ，試回答下列問題：

- () (1) 要求 E_1 與 E_2 兩面屋頂的夾角，需要先知道屋頂的法向量，下列何者是第一面屋頂 E_1 的法向量？ (A) $(1, -1, \sqrt{2})$ (B) $(1, 1, -\sqrt{2})$ (C) $(0, 1, 0)$ (D) $(3, 1, \sqrt{2})$
- () (2) 要找出符合條件的屋頂 E_2 ，我們可以使用向量內積來解決問題，下列何者為符合題意條件的屋頂 E_2 ？ (A) $x + y + z = 1$ (B) $2x + \sqrt{2}z = 1$ (C) $-\sqrt{2}x - y + z = 1$ (D) $y = 1$

26. () 已知兩平行平面 $E_1 : 2x - 2y - z = 1$ 和 $E_2 : 2x - 2y - z = k$ 的距離為 2 ，則 k 的值為
 (A) -5 (B) 7 (C) 7 或 -5 (D) -7 或 5

27. () (i)若 $\vec{n} = (1, 2, 3)$ 是平面 E 的一個法向量時，則 $-2\vec{n} = (-2, -4, -6)$ 也是平面 E 的一個法向量
(ii)當直線 L 垂直於平面 E 時，直線 L 的一個方向向量就是平面 E 的一個法向量
(iii)平面 $x + 2y + 3z = 4$ 上任意一點 $P(x, y, z)$ 與原點 O 所決定的向量 \vec{OP} 必與平面的法向量垂直
以上敘述有幾個正確？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)0
28. () 若通過 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(2, 4, 6)$ 、 $C(3, 5, 4)$ 三點之平面 E_1 ，與另一平面 $E_2 : x + ky - 2z = 1$ 互相垂直，則 $k = ?$ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4
29. () 已知平面 E 過 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 2, 0)$ 、 $C(0, 0, -2)$ 三點，則原點到平面 E 的距離為
(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
30. () 若 $\vec{OA} = \vec{OB} = \vec{OC}$ ，滿足 \vec{OA} 、 \vec{OB} 、 \vec{OC} 兩兩互相垂直，且 D 為 \vec{OC} 的中點，則 O 點到平面 ABC 與 O 點到平面 ABD 的距離之比為 (A)2 : 1 (B)3 : 1 (C)4 : 1 (D) $\sqrt{2} : 1$
31. () 空間中一點 $P(1, 2, -1)$ 對 xy 、 yz 、 xz 平面的投影點為 A 、 B 、 C ，則過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式為
(A) $2x + y - 2z + 4 = 0$ (B) $2x + y - 2z - 4 = 0$ (C) $x + 2y - 2z + 4 = 0$ (D) $x - 2y + 2z + 4 = 0$
32. () 已知平面 $E_1 : 3x + y + 2kz = \pi$ 、 $E_2 : 3x - 2ky + z = \sqrt{101}$ ，若 E_1 與 E_2 的銳夾角為 60° ，則 $|k|$ 值為 (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$
33. () 求過點 $A(1, 2, 3)$ 且和兩平面 $E_1 : x + 4y + 4z - 1 = 0$ 、 $E_2 : x - 2y - 1 = 0$ 均垂直的平面 E 之方程式為
(A) $8x + 4y - 6z - 1 = 0$ (B) $8x + 4y - 6z + 1 = 0$ (C) $4x + 2y - 3z - 1 = 0$ (D) $4x + 2y - 3z + 1 = 0$
34. () 空間中有一平面 $E : 2x - y + 3z - 7 = 0$ 與 $A(-2, 3, 2)$ 、 $B(-4, 0, 7)$ 兩點，若 \vec{AB} 交平面 E 於 C 點，則 $\vec{AC} : \vec{BC}$ 為 (A) 2 : 3 (B) 3 : 2 (C) 3 : 4 (D) 4 : 3
35. () 空間中兩點 $A(2, 1, -2)$ 和 $B(1, 1, 5)$ 在平面 $E : 2x + y - 2z + 3 = 0$ 兩側，若 \vec{AB} 交平面 E 於 P 點，則 $\vec{AP} : \vec{BP} =$ (A) 12 : 13 (B) 12 : 7 (C) 4 : 1 (D) 3 : 1

二、填充題(57 小題)

- 假設地球為一正球體，北極與南極分別為地球上直徑之兩端點，赤道所在平面通過地球中心且與南北極連線垂直。小美為練習繪製地球模型，設定北極為 $(0, 2, 6)$ 、南極為 $(-6, 8, 0)$ ，求赤道所在之平面方程式為_____。
- 已知平面 E 的 3 個截距均相等且不等於 0，又 E 通過點 $(2, 3, 6)$ ，則平面 E 的方程式為_____。
- 通過 $P(-1, 2, 3)$ 、 $Q(2, 1, 1)$ 、 $R(1, 0, 1)$ 三點的平面方程式為_____。
- 設 $A(-2, 4, 5)$ 、 $B(-1, 2, 3)$ 、 $C(2, 6, 3)$ 為空間中的相異三點， E 為 $\triangle ABC$ 所在的平面，則 E 的平面方程式為_____。
- 若平面 E 與平面 $F : 2x - 3y + z = 7$ 平行，且其 x 截距、 y 截距、 z 截距之和為 7，則平面 E 的方程式為_____。
- 設 $A(0, 1, 0)$ 、 $B(2, 3, 4)$ 、 $C(-1, -1, 2)$ 、 $D(-1, 0, 3)$ 為空間中四點，求：過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式為_____。

7. 已知點(1,1,1)到平面 $ax + 2y - z - 7 = 0$ 的距離為 2，則 a 之值為 _____ 。

8. 若 θ 為平面 $x - y + 2z - 3 = 0$ 與 $x + y + \sqrt{6}z + 2 = 0$ 的夾角，則 $\sin\theta$ 的值為 _____ 。

9. 若空間中四點 $A(0, -1, -2)$ 、 $B(0,0,t)$ 、 $C(2,2,2)$ 、 $D(3,3,t)$ 共平面，則 $t =$ _____ 。

10. 與平面 $x + y - 3z + 1 = 0$ 平行，且與三軸之截距和為 20 的平面方程式為 _____ 。

11. 空間中點 $P(1,0,4)$ 在平面 $E_1 : 2x - 3y + cz = 10$ 上，則過點 $Q(-2,1,-1)$ 且與 E_1 平行的平面 E 方程式為 _____ 。

12. 已知空間中 $A(3,4,5)$ 、 $B(-1,0,1)$ 、 $C(1,-1,1)$ 、 $D(2,-1,0)$ 四點，則 A 點到平面 BCD 之距離為 _____ 。

13. 試求兩平面 $E_1 : 2x + 3y + z = 7$ 與 $E_2 : 3x + y - 2z = 7$ 的鈍角夾角為 _____ 度。

14. 已知平面 E 通過 $A(2,0,0)$ 、 $B(0,6,0)$ 、 $C(0,0,3)$ 三點，且 $D(4,2,k)$ 也在平面 E 上，則 k 值為 _____ 。

15. 已知空間中三點 $A(2,1,4)$ 、 $B(3,3,5)$ 、 $C(5,5,8)$ ，則過 A 、 B 、 C 三點之平面為 _____ 。

16. 已知空間中三點 $A(1,-1,2)$ 、 $B(5,4,4)$ 、 $C(2,1,1)$ ，試求過 A 、 B 、 C 三點的平面 E 方程式為 _____ 。

17. 設三平面 $E_1 : x - y + az = 1$ ， $E_2 : bx + y + z = 4$ ， $E_3 : x + cy + z = 2$ ，若 $E_1 \perp E_2$ 且 $E_1 \parallel E_3$ ，則 a ， b ， c 的值分別為 _____ 。

18. 若 $A(1,1,-5)$ 、 $B(2,-1,3)$ 、 $C(3,2,-4)$ 、 $D(k,k-1,-8)$ 四點共平面，則
(1) 此平面方程式為 _____ (2) $k =$ _____ 。

19. 空間中過三點 $A(2,0,1)$ 、 $B(3,2,2)$ 、 $C(0,1,0)$ 的平面 E 方程式為 _____ 。

20. 二平行平面 $E_1 : 2x - y + 2z + 3 = 0$ ， $E_2 : 4x - 2y + 4z = k$ ，其中已知 E_1 與 E_2 的距離為 $\frac{5}{2}$ ，則 $k =$ _____ 。

21. 如圖，長方體 $OABC - DEFG$ ， $O(0,0,0)$ ， $\overline{OA} = 2$ ， $\overline{OC} = 4$ ， $\overline{OD} = 2$ ， A 、 C 、 D 分別在 x 、 y 、 z 軸正向上，求
(1) 通過 A 、 C 、 D 三點之平面 E 方程式為 _____
(2) F 點到平面 E 的距離為 _____ 。

22. 已知空間坐標系中三點 $A(-1,2,1)$ 、 $B(1,1,3)$ 、 $C(0,-1,4)$ ，則 $\triangle ABC$ 所在的平面方程式為 _____ 。

23. 通過 $P(-1,2,3)$ 、 $Q(2,1,1)$ 、 $R(1,0,1)$ 三點的平面方程式為 _____ 。

24. 求兩平面 $E_1 : x - y + z - 3 = 0$ 和 $E_2 : x + y + \sqrt{6}z + 2 = 0$ 的銳夾角為 _____ 。

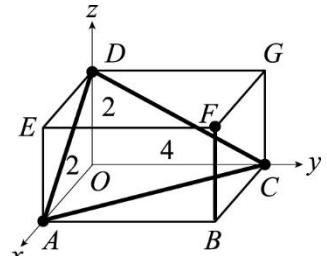
25. 若平面 $x + y - \sqrt{2}z + 1 = 0$ 和 xz 平面的銳夾角為 θ ，則 $\cos\theta =$ _____ 。

26. 假設地球為一正球體，北極與南極分別為地球上直徑之兩端點，赤道所在平面通過地球中心且與南北極連線垂直。小美為練習繪製地球模型，設定北極為 $(0,2,6)$ 、南極為 $(-6,8,0)$ ，則赤道所在之平面方程式為 _____ 。

27. 過原點作平面 E 之垂線，其垂足點為 $P(-1,2,-3)$ ，則平面 E 之方程式為 _____ 。

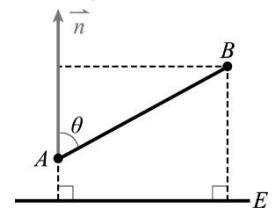
28. 設原點 O 在平面 E 上的投影點為 $Q(1,2,-2)$ ，則
(1) E 的方程式為 _____ 。 (2) $A(3,2,1)$ 到平面 E 的距離為 _____ 。

29. 空間中兩平面 $E_1 : x + z = 5$ 與 $E_2 : z = -2$ 之夾角為 _____ 。



30. 已知兩平面 $E_1 : x - y + 4z = 8$ 與 $E_2 : x + az = 9$ 所夾的銳角為 60° ，且 a 為整數，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
31. 設平面 $E_1 : 3x - 2y + z + 1 = 0$ ， $E_2 : x + y + cz - 8 = 0$ ， $E_3 : ax + by - z + 5 = 0$ ，若 $E_1 \perp E_2$ 且 $E_1 \parallel E_3$ ，則 $a + b + c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
32. 兩平面 $E_1 : x - y + 2z - 4 = 0$ 和 $E_2 : x + y + \sqrt{6}z - 1 = 0$ 之夾角為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
33. 設一平面平行 $E : 3x - 2y + 6z - 2 = 0$ 且與 E 之距離為 5，則此平面之方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
34. 聖誕節即將到來，晴雯做了一個銳角屋頂的薑餅屋。假設兩面斜屋頂的方程式分別為 $x - 2y - 3z - 12 = 0$ 與 $2x + 3y + z - 6 = 0$ ，則薑餅屋屋頂形成的夾角為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 度。
35. 設 $A(1,2,3)$ 、 $B(-1,0,1)$ 、 $C(2,-1,0)$ 為不共線三點，則平面 ABC 的方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
36. 已知坐標空間中，若通過點 $A(-1,2,1)$ 且與 yz 平面平行之平面方程式為 $x + by + cz = d$ ，則序組 $(b,c,d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
37. 求點 $P(1,2,3)$ 對平面 $E : x + 2y - z + 4 = 0$ 的投影點 Q 坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
38. 已知平面 $E : x - 2y + z - 3 = 0$ ，求滿足下列條件的平面方程式：
- (1) $E_1 \parallel E$ 且 E_1 過點 $(0,1,0)$ ，則 E_1 方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$
 - (2) $E_2 \parallel E$ 且 E_2 的截距和為 9，則 E_2 方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
39. 已知平面 $E : 2x + y + 2z = 0$ ，
- (1) 若 $P(a,6,6)$ 和 E 的距離為 6，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$
 - (2) 若平面 E_1 平行 E ，且和 E 的距離為 9，則 E_1 方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
40. 已知平面 E 的 3 個截距均大於 0 並相等，且通過點 $(3,6,2)$ ，則 E 的方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
41. 已知平面 E 與平面 $F : 2x + y + 4z - 6 = 0$ 平行，且與三個坐標軸之截距和為 14，則平面 E 與三個坐標軸之截距乘積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
42. 已知平面 $E_1 : 3x + y + 2kz = \pi$ 、 $E_2 : 3x - 2ky + z = \sqrt{101}$ ，若 E_1 與 E_2 的銳夾角為 60° ，則 k 值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
43. 若平面 E 過點 $(1,2,-1)$ ，且與兩平面 $E_1 : x + y - z + 4 = 0$ 和 $E_2 : 3x + y + 2z - 3 = 0$ 均垂直，則平面 E 之方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
44. 設 P 為第一卦限上的一點，若點 P 到三個坐標平面及平面 $x + y + z = 6$ 的距離皆相同，則點 P 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
45. 設 $x + ky + z - 2 = 0$ 與 $x + \sqrt{2}y - z + 1 = 0$ 之夾角為 60° ，則 k 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
46. 已知平面 $E : 3x + 2y - z - 5 = 0$ 及兩點 $A(1,3,-1)$ 、 $B(-1,5,5)$ ，若 \overline{AB} 和平面 E 交於 P 點，求 $\overline{AP} : \overline{PB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
47. 通過 $A(2,1,-1)$ 、 $B(1,1,2)$ 且與平面 $7x + 4y - 4z = 0$ 垂直的平面方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
48. 若平面 E 和平面 $x - y + 3z + 2 = 0$ 平行，且 x 、 y 、 z 之截距和為 2，則平面 E 的方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
49. 在空間中， E 為過 $A(2,1,-1)$ 、 $B(1,2,-1)$ 、 $C(1,1,3)$ 之平面， E' 為過 $P(1,0,1)$ 、 $Q(0,-2,1)$ 且與 E 垂直之平面，則 E' 之方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
50. 設兩平面 $E_1 : ax - \sqrt{2}y + z + 1 = 0$ 和 $E_2 : x - 2 = 0$ 夾角為 60° ，則實數 a 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

51. 在一個抽象藝術展間中，天花板懸吊一木棍 \overline{AB} ，兩端坐標為 $A(0,1,\sqrt{2})$ 、 $B(\sqrt{3},2,3\sqrt{2})$ ，欲將木棍投影到平面 $E: x + \sqrt{3}y = 0$ 上，則



- (1) 木棍 \overline{AB} 和平面 E 的法向量 \vec{n} 的銳夾角為_____。
- (2) 木棍 \overline{AB} 在平面 E 上投影長為_____。

52. 設 $x - 2y + 2z - 5 = 0$ ，則 $\sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2}$ 的最小值為_____。

53. 與平面 $x + y + z = 1$ 平行，且與 $(3, -5, 1)$ 、 $(-1, 3, 7)$ 二點等距離的平面方程式為_____。

54. 設一平面過 $(0, -1, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ 且與 xy 平面之夾角為 60° ，則其方程式為_____。

55. 已知平面 E 通過 $A(1,3,4)$ 、 $B(2, -1, 7)$ 二點且與 $E_1: 3x - 2y + z = 8$ 垂直，試求平面 E 的方程式為_____。

56. 空間中，已知平面 E 通過 $(3,0,0)$ 、 $(0,4,0)$ 二點及正 z 軸上一點 $(0,0,a)$ ，若平面 E 與 xy 平面的夾角成 45° ，則 $a =$ _____。

57. 設 $A(1,2,3)$ 、 $B(-2,1,4)$ ，直線 AB 與 $E: 2x + y - 2z + 8 = 0$ 交於 C 點，則 $\overline{AC} : \overline{BC} =$ _____。

三、計算題(46 小題)

1. 設三平面 $E_1: x - y + az = 1$ 、 $E_2: bx + y + z = 4$ 、 $E_3: x + cy + z = 2$ ，若 $E_1 \perp E_2$ 且 $E_1 \parallel E_3$ ，試求 a 、 b 、 c 的值。

2. 如圖，已知正立方體的兩對角線 \overline{AG} 與 \overline{BH} 夾角為 θ ，試求 $\cos\theta$ 。

3. 已知空間中三點 $A(1,2,3)$ 、 $B(5,7,-3)$ 、 $C(1,1,-3)$ ，試求：

- (1) $\overline{AB} \times \overline{AC}$ (2) 過 A 、 B 、 C 三點的平面 E 方程式

4. 求兩平面 $E_1: 2x + y - z - 15 = 0$ 和 $E_2: x - y - 2z - 8 = 0$ 之夾角。

5. 已知空間中三平面 $E_1: 3x - 3y + az + 1 = 0$ ， $E_2: bx + y + z - 2 = 0$ ， $E_3: 3x + cy + z - 7 = 0$ ，若 $E_1 \perp E_2$ 且 $E_1 \parallel E_3$ ，求 $a + b + c$ 之值。

6. 已知空間中三點 $A(2, -1, -1)$ 、 $B(4, 3, -1)$ 、 $C(5, 2, 0)$ ，試求：

- (1) $\overline{AB} \times \overline{AC}$ (2) 過 A 、 B 、 C 三點的平面 E 方程式

7. 試求兩平面 $E_1: x - \sqrt{2}y + z - 2 = 0$ 與 $E_2: x + \sqrt{2}y - z + 1 = 0$ 之夾角。

8. 求通過 $A(2, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $C(0, 0, 5)$ 三點的平面 E 方程式。

9. 試求通過 $A(4, 0, 0)$ 、 $B(0, 2, 0)$ 、 $C(0, 0, 3)$ 三點的平面 E 方程式。

10. 已知空間中三點 $A(2, 0, 2)$ 、 $B(4, -3, 3)$ 、 $C(3, -1, 4)$ ，試求：

- (1) $\overline{AB} \times \overline{AC}$ 。 (2) 過 A 、 B 、 C 三點的平面 E 方程式。

11. 已知空間中三點 $A(1, 0, 1)$ 、 $B(3, 2, -1)$ 、 $C(2, -1, 3)$ ，試求：

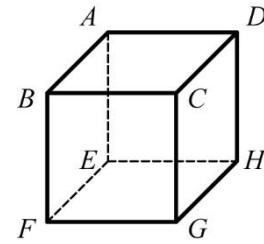
- (1) $\overline{AB} \times \overline{AC}$ (2) 過 A 、 B 、 C 三點的平面 E 方程式

12. 求兩平面 $E_1: 2x + y + 2z - 2 = 0$ 和 $E_2: x + y - 1 = 0$ 之夾角。

13. 試求通過 $A(-1, 0, 0)$ 、 $B(0, 3, 0)$ 、 $C(0, 0, 6)$ 三點的平面 E 方程式。

14. 已知 $A(1, -1, -2)$ 、 $B(2, 1, 1)$ 、 $C(5, 4, 4)$ 三點，試求

- (1) $\overline{AB} \times \overline{AC}$ 。 (2) 過 A 、 B 、 C 三點之平面 E 方程式。



15. 設 A 、 B 、 C 為空間坐標中的三點，且分別在 x 軸、 y 軸與 z 軸的正向上， O 為原點，且 $\overline{OA} = 1$ 、 $\overline{OB} = 2$ 、 $\overline{OC} = 3$ ，試求

(1) 通過 A 、 B 、 C 三點之平面 E 的方程式。

(2) 滿足 $D(3,2,c)$ 為平面 E 上一點的 c 值。

16. 若平面 E 過 $A(3,0,0)$ 、 $B(0,-2,0)$ 、 $C(0,0,4)$ 三點，求 E 的方程式。

17. 試求通過 $A(3,0,0)$ 、 $B(0,-2,0)$ 、 $C(0,0,5)$ 三點的平面 E 方程式。

18. 若平面 E 過 $P(3,0,-1)$ 、 $Q(1,-1,2)$ 、 $R(4,3,3)$ 三點，求 E 的方程式。

19. 已知平面 $E_1 : x + 2y + z + 1 = 0$ 與 $E_2 : ax - y + z - 5 = 0$ 互相垂直，試求 a 值。

20. 試求通過 $A(2,0,0)$ 、 $B(0,-4,0)$ 、 $C(0,0,5)$ 三點的平面 E 方程式。

21. 登高可以望遠。有天，明勇在自家頂樓曬太陽與欣賞風景時，不慎將手機掉到旁邊緊密相鄰的斜屋頂廠房上，如圖所示。假設 $A(2,0,5)$ 、 $B(x,y,3)$ 、 $C(1,1,1)$ 、 $D(3,4,5)$ 、 $E(5,3,5)$ ，則

(1) 若 C 、 D 、 E 為斜屋頂所在平面上三點，試求此平面方程式。

(2) 若明勇想請廠房管理員從 A 點架一個梯子到斜屋頂上，以便能下去撿回手機，試求梯子的最短長度。

(3) 承(2)，假設 \overline{AB} 為梯子架設的位置，試求 $x + y$ 之值。

(4) 承(3)，若手機落在 D 點處，試求 \overline{BD} 之值。

22. 試求兩平面 $E_1 : x + 3y - 2z = 1$ 與 $E_2 : 2x - y + 3z = 6$ 之夾角。

23. 試求兩平面 $E_1 : 2x - y - z - 11 = 0$ 與 $E_2 : x + y - 2z - 19 = 0$ 之夾角。

24. 試求兩平面 $E_1 : 2x + y - 2z = 4$ 與 $E_2 : x + y = 5$ 之夾角。

25. 空間中有一 $\triangle ABC$ ，其三頂點為 $A(-1,1,2)$ 、 $B(2,0,-3)$ 、 $C(5,1,-2)$ ，試求包含 $\triangle ABC$ 的平面方程式。

26. 已知平面 E 與平面 $F : 3x + 2y + z - 8 = 0$ 平行，且其與三個坐標軸之截距和為 11，試求平面 E 的方程式。

27. 已知 $A(1,2,-1)$ 、 $B(3,0,-1)$ 兩點，試求 \overline{AB} 的垂直平分面方程式。

28. 假設一台砂石車的卸貨車斗利用油泵頂桿來控制升降，當車斗底面緩升至與平面 $x + y + \sqrt{2}z = 1$ 平行時發生故障，試求此時車斗底面與地面 (xy 平面) 的夾角。

29. 某次聖誕節，老師要求學生繪製立體薑餅屋設計圖。已知某同學於自己的設計圖中，設定薑餅屋屋頂為兩片長餅乾相互交接而成，已知薑餅屋屋頂夾角為鈍角，且兩片長餅乾所在位置的平面方程式分別為 $x + y + 2z = 10$ 與 $2x - y + z = 7$ ，試求此薑餅屋屋頂的夾角。

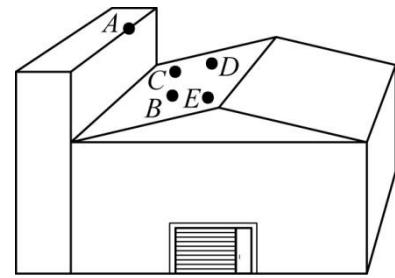
30. 假設地球為一正球體，北極與南極分別為地球上直徑之兩端點，假設赤道所在平面通過地球中心且與南北極連線之地球直徑垂直。某生練習繪製空間中之地球模型，初步設定北極位置為 $(2,4,8)$ 、南極位置為 $(-4,8,2)$ ，試求赤道所在之平面方程式。

31. 設空間中三平面 $E_1 : x + by + z + 5 = 0$ ， $E_2 : 2x + y - z + 1 = 0$ ， $E_3 : ax + y + 2z - 3 = 0$ ，

(1) 若 $E_1 \perp E_2$ ，求 b 之值 (2) 若 $E_1 \parallel E_3$ ，求 a 和 b 之值

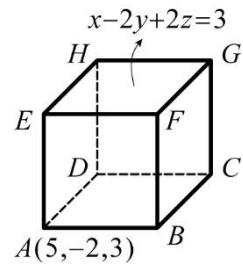
32. 已知空間中三點 $A(2,4,0)$ 、 $B(3,5,1)$ 、 $C(3,3,-2)$ ，試求：

(1) $\overline{AB} \times \overline{AC}$ 。 (2) 過 A 、 B 、 C 三點的平面 E 方程式。



33. 如圖， $ABCD-EFGH$ 是一個正立方體，它的面 $EFGH$ 所在的平面方程式為 $x - 2y + 2z = 3$ ，且 A 點坐標為 $(5, -2, 3)$ ，試求

- (1) 正立方體的面 $ABCD$ 所在的平面方程式。
(2) 正立方體的邊長。



34. 設 $A(-1, 1, 2)$ 、 $B(2, 0, -3)$ 、 $C(5, 1, -2)$ 為空間中三點，求過 A 、 B 、 C 三點之平面 E 方程式。

35. 阿志擅長木工，從簡單的小玩具到生活用品都喜歡自己動手做。今為實現童年夢想，阿志嘗試自己蓋樹屋，其中屋頂的部分是利用兩片長木板相互交接而成，已知樹屋為鈍角屋頂，且兩片木板的平面方程式分別為 $2x + y + z = 15$ 與 $x - y + 2z = 30$ ，試求樹屋屋頂所形成的夾角。

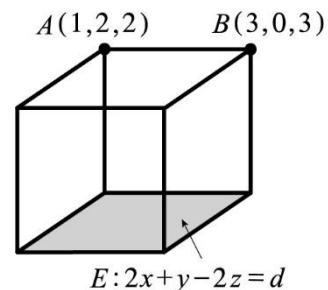
36. 試求通過 $A(4, 0, 0)$ 、 $B(0, 3, 0)$ 、 $C(0, 0, 2)$ 三點的平面 E 方程式。

37. 由建築大師貝聿銘所設計的玻璃金字塔位於羅浮宮中央廣場，是一座用玻璃和金屬鋼架建造的金字塔形結構。假設其入口斜面的方程式為 $3x + y + z - 18 = 0$ ，若在上方鋼架安裝一盞吊燈，吊燈坐標為 $(2, -5, 6)$ ，試求從吊燈散射到斜面之光線傳播的最短距離。

38. 設平面 E 過點 $A(2, 1, -1)$ ，且同時和兩平面 $E_1: x - y + 2z - 5 = 0$ 和 $E_2: x + y + z + 1 = 0$ 垂直，求平面 E 的方程式。

39. 空間中有一平面 $E: x + y - 2z + 3 = 0$ 與 $A(1, 2, -3)$ 、 $B(-5, -1, 0)$ 兩點，若 \overrightarrow{AB} 交平面 E 於 C 點，試求 $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC}$ 。

40. 附圖是一個正立方體，其中 $A(1, 2, 2)$ 、 $B(3, 0, 3)$ 為兩個頂點，已知底面 $E: 2x + y - 2z = d$ 平行 \overrightarrow{AB} ，若 $d > 0$ ，試求 d 值。



41. 試求過點 $A(1, -1, 2)$ 與 $B(6, 0, -1)$ ，且與平面 $2x + 2y - z - 1 = 0$ 垂直的平面方程式。

42. 若平面 E 和兩平行平面 $E_1: 3x + 2y - z + 8 = 0$ 、 $E_2: 3x + 2y - z - 6 = 0$ 均平行，且 E 和 E_1 、 E_2 距離相等，求平面 E 的方程式。

43. 在空間中已知平面 $E: x + 2y - 3z = 7$ 和 $A(2, 0, 1)$ 、 $B(4, 2, 1)$ 兩點，試求

- (1) 若直線 \overleftrightarrow{AB} 與平面 E 交於點 P ，則 $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{BP}$ 。
(2) 若平面 E_1 過 A 、 B 兩點且與 E 垂直，則 E_1 的方程式。

44. 設 x 、 y 、 z 皆為實數，且 $x - 2y + 2z = 5$ ，試求 $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2$ 之最小值。

45. 設平面 E 與平面 $E_1: x - 2y + 2z + 1 = 0$ 平行且距離為 1，求 E 之方程式。

46. 設平面 E 過 $A(-1, 2, 1)$ 、 $B(2, 1, 3)$ 兩點，且與平面 $E_1: 2x + 3y - 4z - 5 = 0$ 垂直，求平面 E 的方程式。

解答

一、單選題(35 小題)

- 1.D 2.C 3.D 4.B 5.A 6.A 7.C 8.A 9.B 10.D 11.A 12.B 13.C 14.D 15.C
16.A 17.A 18.D 19.C 20.B 21.D 22.B 23.C 24.A 25.(1)A (2)D
26.C 27.B 28.A 29.D 30.D 31.B 32.D 33.D 34.D 35.D

二、填充題(57 小題)

1. $x - y + z + 5 = 0$ 2. $\frac{x}{11} + \frac{y}{11} + \frac{z}{11} = 1$ 3. $x - y + 2z = 3$ 4. $4x - 3y + 5z - 5 = 0$
5. $2x - 3y + z = 6$ 6. $6x - 4y - z + 4 = 0$ 7. $\frac{-6 \pm 2\sqrt{21}}{3}$ 8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 9. 2 10. $x + y - 3z - 12 = 0$
11. $2x - 3y + 2z + 9 = 0$ 12. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ 13. 120 14. -4 15. $4x - y - 2z + 1 = 0$
16. $3x - 2y - z - 3 = 0$ 17. $a = 1, b = 0, c = -1$ 18. (1) $2x - 3y - z - 4 = 0$ (2) 7
19. $3x + y - 5z - 1 = 0$ 20. 9 或 -21 21. (1) $2x + y + 2z - 4 = 0$ (2) $\frac{8}{3}$ 22. $3x - 4y - 5z + 16 = 0$
23. $x - y + 2z - 3 = 0$ 24. 60° 25. $\frac{1}{2}$ 26. $x - y + z + 5 = 0$ 27. $x - 2y + 3z + 14 = 0$
28. (1) $x + 2y - 2z - 9 = 0$ (2) $\frac{4}{3}$ 29. 45° 和 135° 30. -1 31. -2 32. 45° 與 135°
33. $3x - 2y + 6z + 33 = 0$ 或 $3x - 2y + 6z - 37 = 0$ 34. 60 35. $y - z + 1 = 0$ 36. (0,0,-1)
37. (0,0,4) 38. (1) $x - 2y + z + 2 = 0$ (2) $x - 2y + z = 6$ 39. (1) 0 或 -18 (2) $2x + y + 2z \pm 27 = 0$
40. $x + y + z - 11 = 0$ 41. 64 42. $\sqrt{2}$ 43. $3x - 5y - 2z + 5 = 0$
44. $(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ 或 $(3 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3})$ 45. $\pm\sqrt{2}$ 46. 5:3 47. $12x - 17y + 4z - 3 = 0$
48. $x - y + 3z - 6 = 0$ 49. $2x - y - 4z + 2 = 0$ 50. ± 1 51. (1) 60° (2) 3 52. 6
53. $x + y + z - 4 = 0$ 54. $\pm\sqrt{2}x + y - z + 1 = 0$ 55. $x + 4y + 5z - 33 = 0$ 56. $\frac{12}{5}$ 57. 2:1

三、計算題(46 小題)

1. $a = 1, b = 0, c = -1$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. (1) $(-36, 24, -4)$ (2) $9x - 6y + z = 0$ 4. 60° 或 120° 5. $-\frac{4}{3}$
6. (1) (4, -2, -6) (2) $2x - y - 3z - 8 = 0$ 7. 60° 和 120° 8. $5x + 10y + 2z = 10$
9. $3x + 6y + 4z - 12 = 0$ 10. (1) $(-5, -3, 1)$ (2) $5x + 3y - z - 8 = 0$
11. (1) (2, -6, -4) (2) $x - 3y - 2z + 1 = 0$ 12. 45° 或 135° 13. $6x - 2y - z + 6 = 0$
14. (1) $(-3, 6, -3)$ (2) $x - 2y + z = 1$ 15. (1) $6x + 3y + 2z = 6$ (2) -9 16. $4x - 6y + 3z = 12$
17. $10x - 15y + 6z - 30 = 0$ 18. $13x - 11y + 5z - 34 = 0$ 19. 1 20. $10x - 5y + 4z - 20 = 0$
21. (1) $x + 2y - 2z - 1 = 0$ (2) 3 (3) 5 (4) $2\sqrt{2}$ 22. 120° 與 60° 23. 60° 與 120°
24. 45° 與 135° 25. $2x - 9y + 3z + 5 = 0$ 26. $3x + 2y + z - 6 = 0$ 27. $x - y - 1 = 0$
28. 45° 與 135° 29. 120° 30. $3x - 2y + 3z = 0$ 31. (1) -1 (2) $a = 2, b = \frac{1}{2}$
32. (1) $(-1, 3, -2)$ (2) $x - 3y + 2z + 10 = 0$ 33. (1) $x - 2y + 2z = 15$ (2) 4 34. $2x - 9y + 3z + 5 = 0$
35. 120° 36. $3x + 4y + 6z - 12 = 0$ 37. $\sqrt{11}$ 38. $3x - y - 2z - 7 = 0$ 39. 4:1 40. 9
41. $5x - y + 8z - 22 = 0$ 42. $3x + 2y - z + 1 = 0$ 43. (1) 4:1 (2) $3x - 3y - z - 5 = 0$
44. 25 45. $x - 2y + 2z + 4 = 0$ 或 $x - 2y + 2z - 2 = 0$ 46. $2x - 16y - 11z + 45 = 0$