

# 高一升高二 暑假作業



班級：

學號：

姓名：



# 1

## 坐標系與 函數圖形

坐標系與  
函數圖形

實數與  
絕對值

實數

根式——算幾不等式

P.7

絕對值

絕對值不等式

P.8

## 直角坐標系

距離公式

P.9

分點公式

中點公式

平行四邊形頂點

三角形重心

P.11

## 函數及其圖形

函數的意義

線型函數

P.13

二次函數

二次函數的配方

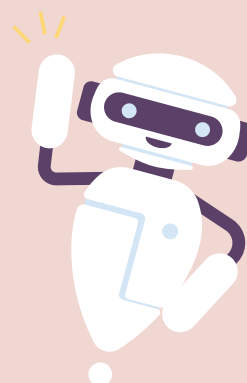
二次函數的極值

P.15

## 一元二次不等式

一元二次不等式

P.17



## 實數與絕對值



## 趨勢分析

本單元是坐標幾何的基礎，歷年的命題率都偏低，但是之後的單元都需要這些基本公式，不可輕忽，像是「二次函數的極值」、「一元二次不等式」就會常常出現。

## 焦點主題

1

## 實數（有理數、無理數）、根式

數線上的點坐標就是實數，而實數（ $\mathbb{R}$ ）可以分成有理數、無理數。

(1) 可以寫成整數比值的實數稱為「有理數」。像是整數（如： $4 = \frac{4}{1}$ ），有限小數（如： $0.5 = \frac{1}{2}$ ）、

循環小數（如： $6.\bar{7} = 6\frac{7}{9}$ ）可以寫成分數，都是有理數。



## 小提醒

有理數形如  $\frac{a}{b}$ ，其中  $a$ 、 $b$  為整數且  $b \neq 0$ 。

(2) 無法寫成整數比值的實數稱為「無理數」。像是不循環的無限小數（如： $\pi = 3.1415\cdots$ ）、開不盡的根號（如： $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ ）無法寫成分數，都是無理數。

(3) 若實數  $b$  滿足  $b^2 = a$ ，則  $b$  稱為「 $a$  的平方根（二次方根）」。每一正數  $a$  都有兩個平方根（一正一負），記作  $\pm\sqrt{a}$ 。**例** 9 的平方根是  $\pm 3$ ，而  $\sqrt{9} = 3$ 。

(4) 若  $a$ 、 $b \geq 0$ ，則  $\sqrt{a^2} = a$ ， $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ 。**例**  $\sqrt{10^2} = 10$ ， $\sqrt{10^2 \times 3} = 10\sqrt{3}$ 。



## 觀念是非題

( ) 1.  $\sqrt{5^2} + \sqrt{(-6)^2} + (\sqrt{7})^2 = 5 + (-6) + 7 = 6$ 。

## 範例 1

## 老師講解



## 學生練習

化簡根式：(1)  $\sqrt{36}$  (2)  $\sqrt{12}$ 。

化簡根式：(1)  $\sqrt{49}$  (2)  $\sqrt{45}$ 。

## 焦點主題

2

## 根式的運算（加、減）

同類根式可加減合併（如： $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3+5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ ），不同類則否。



## 小提醒

$\sqrt{3}$  與  $\sqrt{2}$  不同類，所以  $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$  無法合併。

## 範例 2

## 老師講解



## 學生練習

化簡  $5\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5}$ 。

化簡  $4\sqrt{6} + 9\sqrt{7} + 3\sqrt{6} - \sqrt{7}$ 。

## 焦點主題

3

## 根式的運算（乘、除）

若  $a, b > 0$ ，則  $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ 、 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 、 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

## 範例 3

## 老師講解



## 學生練習

試求下列的值：

(1)  $\sqrt{3} \times (2\sqrt{3} - \sqrt{5})$  (2)  $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$ 。

## ■ 解題小技巧

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

試求下列的值：

(1)  $\sqrt{5} \times (\sqrt{5} + 4\sqrt{3})$  (2)  $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$ 。

## ■ 解題小技巧

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

## 焦點主題

## 4

## 根式的運算（有理化）

當分數的分母有根式時，把分母化成有理數的過程稱為「有理化分母」。

**例**  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ,  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 。



小提醒

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



觀念是非題

( ) 2.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ 。

## 範例 4

## 老師講解



## 學生練習

化簡下列分數（有理化分母）：

(1)  $\frac{15}{\sqrt{3}}$  (2)  $\frac{8}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$  (3)  $\frac{4}{\sqrt{11} - 3}$ 。

化簡下列分數（有理化分母）：

(1)  $\frac{14}{\sqrt{7}}$  (2)  $\frac{30}{\sqrt{11} + \sqrt{6}}$  (3)  $\frac{3}{\sqrt{7} - 2}$ 。

## 焦點主題

5

## 算幾不等式

若  $a$ 、 $b$  均為正實數，則  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，即  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ，等號成立必須  $a=b$ 。



小提醒

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}。$$



觀念是非題

( ) 3. 對於任意實數  $a$ 、 $b$ ， $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  恆成立。

C

1

範例 5

老師講解



學生練習

設兩正數  $a$ 、 $b$  滿足  $2a+3b=12$ ，試求  $ab$  的最大值。

設  $a$ 、 $b > 0$ ，若  $a+2b=8$ ，試求  $ab$  的最大值。

## 焦點主題

6

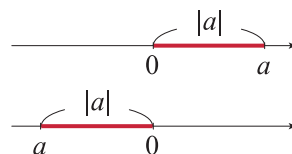
## 絕對值

(1) 數線上，點  $a$  到原點 (0) 的距離稱為「 $a$  的絕對值」，記作  $|a|$ 。

(2) 實數  $a$  的絕對值  $|a| = \begin{cases} a, & \text{當 } a \geq 0 \\ -a, & \text{當 } a < 0 \end{cases}$ 。例  $|2|=2$ ， $|-3|=3$ 。

(3) 數線上，兩點  $a$ 、 $b$  的距離為  $|a-b|=|b-a|$ 。

(4) 絕對值方程式：設  $k$  為正數，若  $|x|=k$ ，則  $x=\pm k$ 。



範例 6

老師講解



學生練習

已知絕對值  $|4x-1|=7$ ，試求  $x$  之值。

已知絕對值  $|2x+3|=5$ ，試求  $x$  之值。

焦點主題

7

# 絕對值不等式 (I)

設  $k$  為正數，若  $|x| < k$ ，則  $-k < x < k$ 。



小提醒

$$|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k。$$



觀念是非題

( ) 4. 若  $|x| < -2$ ，則  $-2 < x < 2$ 。

範例 7

老師講解



學生練習

解不等式  $|x - 7| < 3$ 。

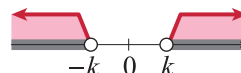
解不等式  $|x + 5| < 4$ 。

焦點主題

8

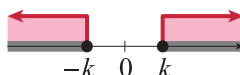
# 絕對值不等式 (II)

設  $k$  為正數，若  $|x| > k$ ，則  $x > k$  或  $x < -k$ 。



小提醒

$$|x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k \text{ 或 } x \leq -k。$$



觀念是非題

( ) 5. 不等式  $|x - 1| > 3$  與  $|1 - x| > 3$  的解是相同的。

範例 8

老師講解

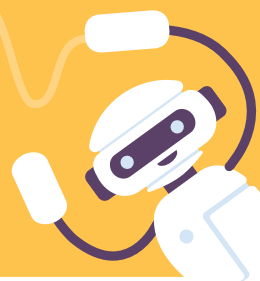


學生練習

解不等式  $|5x + 4| > 11$ 。

解不等式  $|2x - 5| > 13$ 。

## 直角坐標系



C

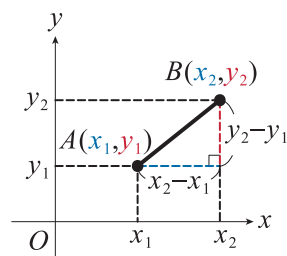
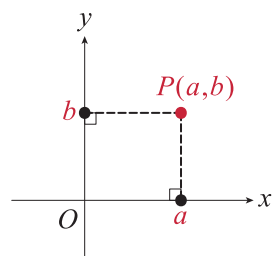
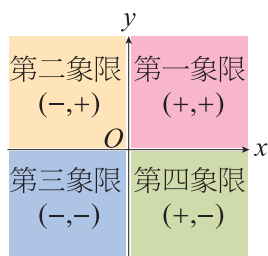
1

焦點主題

9

### 直角坐標距離公式

- (1) 直角坐標平面上的  $x$ 、 $y$  軸把平面分成四個區域，每一個區域稱為「象限」。
- (2) 當坐標平面上有一點  $P$ ，自  $P$  點分別對  $x$ 、 $y$  軸作垂線，且交  $x$ 、 $y$  軸的點所對應的數分別為  $a$ 、 $b$ ，則以  $(a, b)$  表示  $P$  點的坐標，記為  $P(a, b)$ ，其中  $a$  為  $P$  點的  $x$  坐標， $b$  為  $P$  點的  $y$  坐標。
- (3) 兩點  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_1, y_2)$  在同一鉛垂線上， $\overline{AB} = |y_2 - y_1|$ 。
- (4) 兩點  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_1)$  在同一水平線上， $\overline{AB} = |x_2 - x_1|$ 。
- (5) 兩點  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$  之間的距離為  $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。



觀念是非題

- ( ) 1. 兩點  $P(4, 2)$ 、 $Q(3, 3)$  到原點的距離相等。

範例 9

老師講解



學生練習

坐標平面上有一圓的圓心為  $Q(5, 1)$ ，而圓通過點  $P(17, 6)$ ，試求此圓的直徑長。

坐標平面上有兩點  $A(3, 2)$ 、 $B(11, 8)$ ，試求  $A$ 、 $B$  之間的距離。

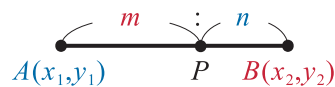
## 焦點主題

10

## 直角坐標（分點公式）

坐標平面上有兩點  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，若點  $P$  在線段  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$ ，

則  $P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$ ，即  $P = \frac{nA + mB}{m+n}$ 。



## 小提醒

分子為交叉相乘的和。

## 範例 10

## 老師講解



## 學生練習

坐標平面上有兩點  $A(1, 17)$ 、 $B(9, 1)$ ，  
且  $P$  點在  $\overline{AB}$  上，若  $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 5$ ，  
試求  $P$  點坐標。

坐標平面上有兩點  $A(3, 20)$ 、 $B(15, 2)$ ，  
且  $P$  點在  $\overline{AB}$  上，若  $\overline{AP} : \overline{PB} = 5 : 1$ ，  
試求  $P$  點坐標。

## 焦點主題

11

## 直角坐標（中點公式）

坐標平面上有兩點  $A$ 、 $B$ ，則線段  $\overline{AB}$  的中點  $M = \frac{A+B}{2}$ 。



## 範例 11

## 老師講解



## 學生練習

坐標平面上有一圓的直徑兩端點為  
 $A(7, 3)$ 、 $B(5, 13)$ ，試求此圓的圓心坐標。

坐標平面上有兩點  $A(1, 17)$ 、 $B(9, 1)$ ，  
試求線段  $\overline{AB}$  的中點坐標。

## 焦點主題

12

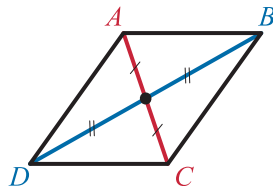
## 直角坐標（平行四邊形的頂點）

坐標平面上有平行四邊形  $ABCD$ ，頂點關係為  $A + C = B + D$ 。



小提醒

對角線互相平分，中點重合： $\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$ 。



範例 12

老師講解



學生練習

平行四邊形  $ABCD$  中，若  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點的坐標分別為  $(1, 13)$ 、 $(6, 4)$ 、 $(10, 1)$ ，試求  $D$  點坐標。

平行四邊形  $ABCD$  中，若  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點的坐標分別為  $(2, 1)$ 、 $(8, 5)$ 、 $(6, 15)$ ，試求  $D$  點坐標。

## 焦點主題

13

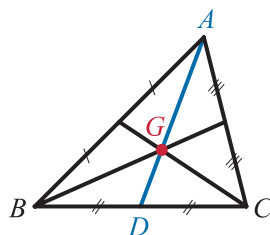
## 直角坐標（三角形的重心）

三角形的三條中線交點為重心，在坐標平面上的  $\triangle ABC$  之重心為  $G = \frac{A+B+C}{3}$ 。



小提醒

$\overline{AG} : \overline{GD} = 2 : 1$ 。



範例 13

老師講解



學生練習

三角形三頂點的坐標分別為  $A(2, 4)$ 、 $B(0, 2)$ 、 $C(7, 0)$ ，試求三角形的重心坐標。

坐標平面上有三點  $A(1, 13)$ 、 $B(6, 4)$ 、 $C(5, 1)$ ，試求  $\triangle ABC$  的重心坐標。

# 函數及其圖形



## 焦點主題

14

## 函數的意義

- (1) 設  $x$ 、 $y$  是兩個變數，當  $x$  的值給定時， $y$  的值依照某種規則而唯一確定，則此種對應關係稱為「 $y$  是  $x$  的函數」。如果將這個函數命名為  $f$ ，則可以記作  $y = f(x)$ ，而  $f(x)$  在  $x = a$  的函數值為  $f(a)$ 。



### 小提醒

如果把對應的函數命名為  $g$ ，則記作  $y = g(x)$ 。

- (2) 設函數  $y = f(x)$ ，則  $x$  的有效範圍稱為「定義域」，函數值  $y$  的範圍稱為「值域」。



### 觀念是非題

- ( ) 1. 設  $f(x) = 2x^2 + ax + 5$ ，若  $f(1) = 9$ ，則  $a = 2$ 。

### 範例 14

#### 老師講解



#### 學生練習

若  $f(x) = \begin{cases} 4x + 1, & x \geq 0 \\ |x - 1|, & x < 0 \end{cases}$ ，試求  $f(3)$ 、 $f(-3)$  的值。

若  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \geq 2 \\ 7, & x < 2 \end{cases}$ ，試求  $f(4)$ 、 $f(0)$  的值。

## 線型函數（常數與一次函數）

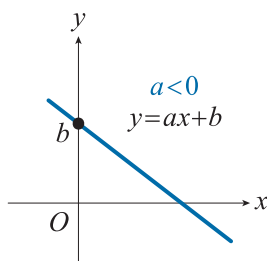
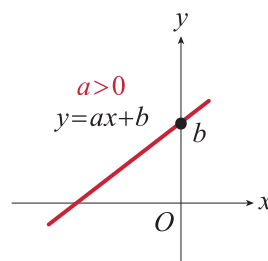
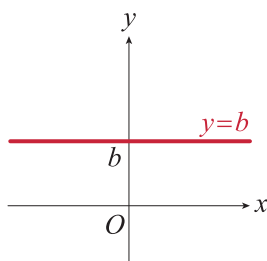
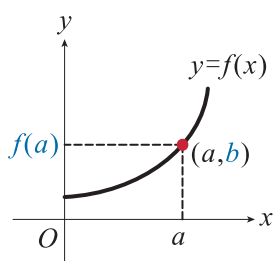
- (1) 坐標平面滿足函數  $y = f(x)$  的所有點坐標  $(x, y)$  所形成的圖形，就是函數  $f$  的圖形。
- (2) 若函數  $f$  的圖形通過點  $(a, b)$ ，則  $f(a) = b$ 。
- (3) 形如  $y = b$  或  $f(x) = b$ （常數）的函數稱為「常數函數」，圖形是水平直線。
- (4) 設  $a \neq 0$ ，形如  $y = ax + b$  或  $f(x) = ax + b$  的函數稱為「一次函數」，圖形是斜直線。當  $a > 0$  時，圖形由左往右上升；當  $a < 0$  時，圖形由左往右下降。



## 小提醒

函數  $y = ax + b$  就是直線的斜截式，其中  $a$  為斜率， $b$  為  $y$  截距。

- ① 當  $a > 0$ ，圖形由左往右上升；當  $a < 0$ ，圖形由左往右下降。
- ② 當  $b > 0$ ，圖形通過  $y$  軸的正向；當  $b < 0$ ，圖形通過  $y$  軸的負向。



## 觀念是非題

( ) 2. 若函數圖形為一直線，則此函數為一次函數。

## 範例 15

## 老師講解



## 學生練習

若  $y = f(x)$  的函數圖形是一通過  $(1, 1)$ 、 $(2, 3)$  兩點的直線，試求  $f(-1)$ 。

若  $f(x) = ax + b$  且  $f(0) = -2$ ， $f(2) = 4$ ，試求  $f(3)$ 。

- (1) 設  $a \neq 0$ ，形如  $y = ax^2 + bx + c$  或  $y = a(x-h)^2 + k$  的函數稱為「二次函數」，圖形為拋物線。  
當  $a > 0$  時，圖形開口向上，有最低點；當  $a < 0$  時，圖形開口向下，有最高點。



小提醒

二次函數圖形的最低點、最高點就是拋物線的頂點。且  $|a|$  的值愈大，開口愈小。

- (2) 二次函數  $y = ax^2$  的圖形頂點在原點  $(0, 0)$ ，其對稱軸為  $y$  軸。  
(3) 二次函數  $y = a(x-h)^2 + k$  的頂點坐標為  $(h, k)$ ，其對稱軸為  $x = h$ 。  
(4) 若  $h, k > 0$ ，二次函數  $y = ax^2$  與  $y = a(x-h)^2 + k$  的圖形關係如下：



小提醒

兩個二次函數的  $x^2$  項係數相等，則其圖形形狀相同，只是位置不同。

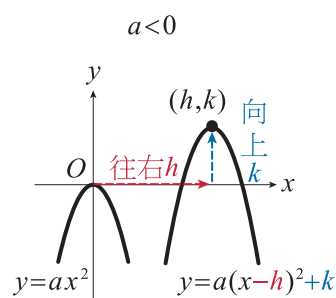
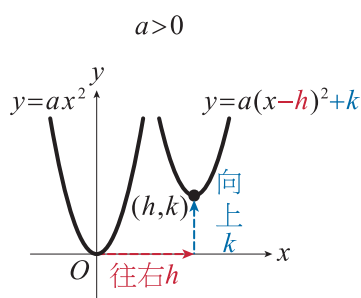
$y = ax^2$   
的圖形

往右平移  $h$  單位

$y = a(x-h)^2$   
的圖形

向上平移  $k$  單位

$y = a(x-h)^2 + k$   
的圖形



觀念是非題

- ( ) 3. 將  $y = 3x^2$  的圖形向右平移 1 單位，再向上平移 2 單位後，恰與  $y = 3(x+1)^2 + 2$  的圖形重合。

範例 16

老師講解



學生練習

試填寫下列表格：

|     | 二次函數                | 頂點坐標 |
|-----|---------------------|------|
| (1) | $y = 4x^2$          |      |
| (2) | $y = -6(x-1)^2 + 5$ |      |

試填寫下列表格：

|     | 二次函數               | 頂點坐標 |
|-----|--------------------|------|
| (1) | $y = -3x^2$        |      |
| (2) | $y = 2(x-3)^2 + 4$ |      |

## 焦點主題

17

## 二次函數的頂點與配方

二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  的頂點  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ 。



小提醒

$$\text{配方 } ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}。$$

範例 17

老師講解



學生練習

利用配方法，把  $y = 3x^2 + 24x + 50$  化成  $y = a(x - h)^2 + k$  的形式，並求其頂點坐標。

利用配方法，把  $y = 2x^2 - 4x + 5$  化成  $y = a(x - h)^2 + k$  的形式，並求其頂點坐標。

## 焦點主題

18

## 二次函數的極值

二次函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的極值（最大值或最小值）會發生在頂點處。

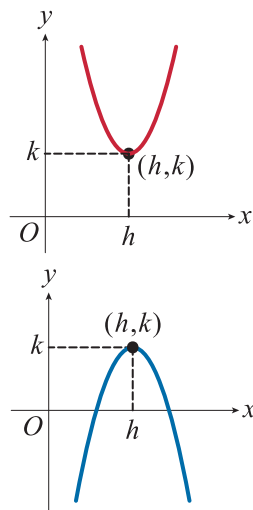
(1) 當  $a > 0$  時，函數  $f$  有最小值  $\frac{4ac - b^2}{4a}$ ，此時  $x = -\frac{b}{2a}$ 。

(2) 當  $a < 0$  時，函數  $f$  有最大值  $\frac{4ac - b^2}{4a}$ ，此時  $x = -\frac{b}{2a}$ 。



小提醒

極值就是頂點的  $y$  坐標，如果頂點是  $(h, k)$ ，則極值就是  $k$ 。



範例 18

老師講解



學生練習

試求函數  $y = -2x^2 + 3x + 4$  的最大值。

試求函數  $y = 5x^2 + 4x + 1$  的最小值。



### 1-3 邁向統測之路

二次函數的圖形判斷係數之正負

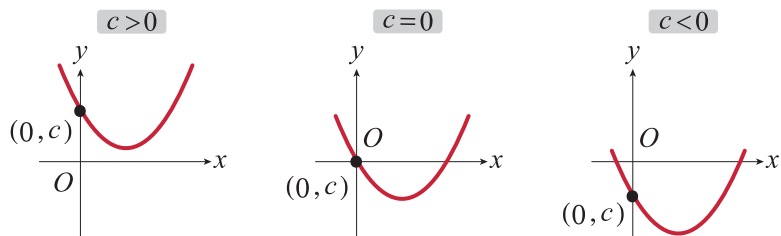
已知二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形為拋物線，

(1) 若圖形開口向上，則  $a > 0$ ；若開口向下，則  $a < 0$ 。

(2) 圖形頂點  $x$  坐標的位置，可知  $-\frac{b}{2a}$  的正負，進而判斷  $b$  的正負。

(3) 圖形與  $y$  軸的交點坐標為  $(0, c)$ ，則交點在

①  $y$  軸正向  $\Leftrightarrow c > 0$     ② 原點  $\Leftrightarrow c = 0$     ③  $y$  軸負向  $\Leftrightarrow c < 0$ 。



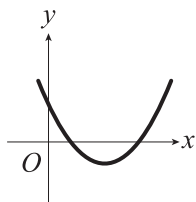
(4) 令  $D = b^2 - 4ac$ ，則  $D$  的正負、圖形與  $x$  軸的交點數之關係如下：

|              | $D = b^2 - 4ac > 0$ | $D = b^2 - 4ac = 0$ | $D = b^2 - 4ac < 0$ |
|--------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 與 $x$ 軸的交點個數 | 2 個                 | 1 個                 | 0 個                 |
| $a > 0$      |                     |                     |                     |
| $a < 0$      |                     |                     |                     |

#### 老師講解

若二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形如下，  
判斷下列各數的正負：

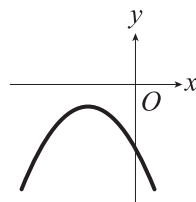
- (1)  $a$     (2)  $b$   
(3)  $c$     (4)  $b^2 - 4ac$ 。



#### 學生練習

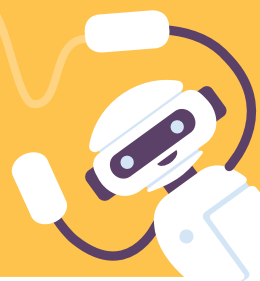
若二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形如下，  
判斷下列各數的正負：

- (1)  $a$     (2)  $b$   
(3)  $c$     (4)  $b^2 - 4ac$ 。



# 1-4

## 一元二次不等式



C

1

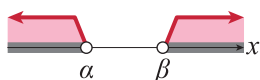
焦點主題

19

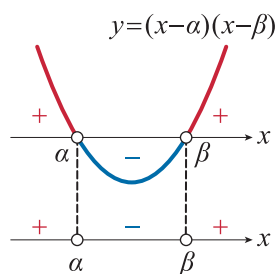
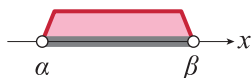
### 一元二次不等式 (I)

設  $\alpha$ 、 $\beta$  為相異實數，則方程式  $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$  有兩相異實根  $\alpha$ 、 $\beta$  ( $\alpha < \beta$ )。

(1) 不等式  $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$  的解： $x < \alpha$  或  $x > \beta$ 。



(2) 不等式  $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$  的解： $\alpha < x < \beta$ 。



小提醒

當不等式的不等號為  $\geq$  或  $\leq$  時，圖解的空心圓圈  $\bigcirc$  改成實心圓圈  $\bullet$ 。



觀念是非題

( ) 1. 不等式  $(x - 3)(x - 8) < 0$  的解為  $3 < x < 8$ 。

範例 19

老師講解



學生練習

試解下列的不等式：

(1)  $(x - 1)(x + 5) > 0$  (2)  $(x - 1)(x + 5) < 0$ 。

試解下列的不等式：

(1)  $(x + 2)(x - 7) > 0$  (2)  $(x + 2)(x - 7) < 0$ 。

焦點主題

20

### 一元二次不等式 (II)

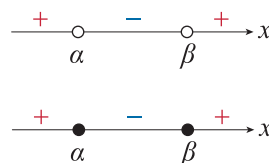
當  $A > 0$  時，若  $Ax^2 + Bx + C$  可因式分解成  $A(x - \alpha)(x - \beta)$  且  $\alpha < \beta$ ，則

(1)  $Ax^2 + Bx + C > 0 \Leftrightarrow A(x - \alpha)(x - \beta) > 0 \Leftrightarrow x < \alpha$  或  $x > \beta$ 。

(2)  $Ax^2 + Bx + C < 0 \Leftrightarrow A(x - \alpha)(x - \beta) < 0 \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$ 。

(3)  $Ax^2 + Bx + C \geq 0 \Leftrightarrow A(x - \alpha)(x - \beta) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \alpha$  或  $x \geq \beta$ 。

(4)  $Ax^2 + Bx + C \leq 0 \Leftrightarrow A(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq x \leq \beta$ 。



範例 20

老師講解



學生練習

試解下列的不等式：

(1)  $x^2 + 4x + 3 \geq 0$  (2)  $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ 。

試解下列的不等式：

(1)  $x^2 + 7x + 10 \geq 0$  (2)  $x^2 + 7x + 10 \leq 0$ 。

焦點主題

21

一元二次不等式 (III)

當  $A > 0$  時，若  $Ax^2 + Bx + C$  可因式分解成  $A(x - \alpha)^2$ ，而  $A(x - \alpha)^2$  恆正或零，則

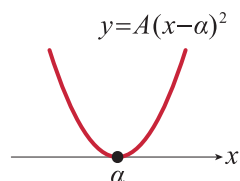
(1)  $Ax^2 + Bx + C \geq 0 \Leftrightarrow A(x - \alpha)^2 \geq 0$ ：解為任意實數。

(2)  $Ax^2 + Bx + C > 0 \Leftrightarrow A(x - \alpha)^2 > 0$ ：解為  $x \neq \alpha$  的任意實數。



觀念是非題

( ) 2. 不等式  $5x^2 \geq 0$  與  $5(x - 1)^2 \geq 0$  的解並不相同。



範例 21

老師講解



學生練習

試解下列的不等式：

(1)  $x^2 - 14x + 49 \geq 0$

(2)  $x^2 - 14x + 49 > 0$ 。

試解下列的不等式：

(1)  $x^2 - 10x + 25 \geq 0$

(2)  $x^2 - 10x + 25 > 0$ 。

## 焦點主題

22

## 一元二次不等式 (IV)

當  $A > 0$  時，若  $Ax^2 + Bx + C$  可因式分解成  $A(x - \alpha)^2$ ，而  $A(x - \alpha)^2$  恆正或零，則

(1)  $Ax^2 + Bx + C \leq 0 \Leftrightarrow A(x - \alpha)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = 0$ ：解為  $x = \alpha$ 。

(2)  $Ax^2 + Bx + C < 0 \Leftrightarrow A(x - \alpha)^2 < 0$ ：無實數解。

## 範例 22

老師講解



學生練習

試解下列的不等式：

(1)  $x^2 + 12x + 36 \leq 0$

(2)  $x^2 + 12x + 36 < 0$ 。

試解下列的不等式：

(1)  $x^2 + 16x + 64 \leq 0$

(2)  $x^2 + 16x + 64 < 0$ 。

## 焦點主題

23

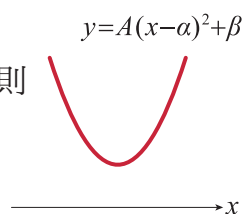
## 一元二次不等式 (V)

當  $A > 0$  時，若  $Ax^2 + Bx + C$  無法因式分解（此時  $B^2 - 4AC < 0$ ），

則可將  $Ax^2 + Bx + C$  配方成  $A(x - \alpha)^2 + \beta$ （ $\beta$  為正數），而  $A(x - \alpha)^2 + \beta$  恆正，則

(1)  $Ax^2 + Bx + C > 0$  或  $Ax^2 + Bx + C \geq 0$  的解：任意實數。

(2)  $Ax^2 + Bx + C < 0$  或  $Ax^2 + Bx + C \leq 0$  的解：無實數解。



## 範例 23

老師講解



學生練習

試解下列的不等式：

(1)  $x^2 - 4x + 7 > 0$  (2)  $x^2 - 4x + 7 < 0$ 。

試解下列的不等式：

(1)  $x^2 - 6x + 11 > 0$  (2)  $x^2 - 6x + 11 < 0$ 。



## 統測常考題

### 範例 1 反求一元二次不等式

設  $a$ 、 $b$  均為實數，若不等式  $ax^2 + 3x + b \geq 0$  的解為  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 5$ ，則  $3a + 6b =$   
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。 [統測]

#### ■ 解題小技巧

(1) 設  $\alpha < \beta$ ，則

①  $(x - \alpha)(x - \beta) < 0 \Rightarrow \alpha < x < \beta$ 。

②  $(x - \alpha)(x - \beta) > 0 \Rightarrow x < \alpha$  或  $x > \beta$ 。

(2) 設  $A > 0$ 、 $B < 0$ ，則

①  $f(x) > 0 \Rightarrow Af(x) > 0$ ， $Bf(x) < 0$ 。

②  $f(x) < 0 \Rightarrow Af(x) < 0$ ， $Bf(x) > 0$ 。

$$\text{解：} -\frac{1}{2} \leq x \leq 5 \Rightarrow \left[ x - \left( -\frac{1}{2} \right) \right] (x - 5) \leq 0 \xrightarrow{\times 2} (2x + 1)(x - 5) \leq 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x - 5 \leq 0 \xrightarrow{\div (-3)} -\frac{2}{3}x^2 + 3x + \frac{5}{3} \geq 0$$

$$\text{與 } ax^2 + 3x + b \geq 0 \text{ 比較係數，得 } a = -\frac{2}{3}, b = \frac{5}{3}$$

$$\text{因此 } 3a + 6b = 3 \times \left( -\frac{2}{3} \right) + 6 \times \frac{5}{3} = 8$$

**類題 1** 設  $a$  和  $b$  均為實數，若不等式  $ax^2 + bx - 5 < 0$  的解為  $-\frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$ ，則

$$a + b = ?$$

(A)  $\frac{5}{3}$  (B)  $\frac{7}{3}$  (C) 5 (D) 7。

[統測]

**類題 2** 若一元二次不等式  $ax^2 + bx - 6 \geq 0$  的解為  $2 \leq x \leq 3$ ，則數對  $(a, b)$  為下列何者？

(A)  $(-1, -5)$  (B)  $(-1, 5)$  (C)  $(1, -5)$  (D)  $(1, 5)$ 。

[107 (B)]



### 素養題 生活素養之算幾不等式

若想要利用一條繩子圍出一個面積至少為 25 平方公尺的矩形花園，則所需要的繩子總長度至少須為多少公尺？ (A)12 (B)16 (C)20 (D)24。 [統測]

#### 解題小技巧

算幾不等式：

若  $a$ 、 $b$  均為正數，則  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

解：設矩形花園長  $x$  公尺，寬  $y$  公尺 ( $x > 0$ ,  $y > 0$ )

繩子總長 = 矩形周長 =  $2x + 2y$

$\because$  面積至少為 25 平方公尺  $\therefore$  面積  $xy \geq 25$

由算幾不等式： $\frac{2x+2y}{2} \geq \sqrt{(2x) \times (2y)}$

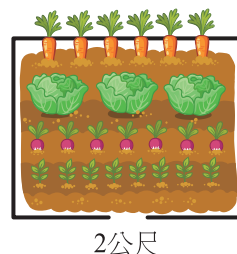
$\Rightarrow x + y \geq \sqrt{4xy} \geq \sqrt{4 \times 25} = 10$

$\Rightarrow 2x + 2y \geq 2 \times 10 = 20$

因此繩子總長度至少須為 20 公尺

**類題 1** 一農夫想用 66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如圖所示。試求此農夫所能圍成的最大面積。\_\_\_\_\_

(A)280 (B)285 (C)288 (D)289 平方公尺。





## 基礎題

### ● 實數與絕對值

- \_\_\_\_\_ 1. 公益文教基金會調查技術型高中三年級學生每天手機使用時間介於 3.1 小時至 4.9 小時之間（含）。若  $x$ （單位：小時）為其中一位參與調查的技術型高中學生每天手機使用時間，且將上述使用時間範圍用  $|x - a| \leq b$  來表示，則  $ab = ?$  (A) 3.2 (B) 3.6 (C) 3.8 (D) 4.2。 [111 (C)]
- \_\_\_\_\_ 2. 已知  $A$ 、 $B$  為實數，若不等式  $|Ax + 6| \geq B$  的解為  $x \leq -2$  或  $x \geq 6$ ，則  $2A + B = ?$  (A)  $-12$  (B)  $-6$  (C)  $6$  (D)  $12$ 。 [112 (C)]
- \_\_\_\_\_ 3. 若點  $(a, b)$  落在第一象限且滿足  $b = -a^2 + 10$ ，則  $a^2b$  的最大值為何？  
(A) 10 (B) 21 (C) 23 (D) 25。 [113 (C)]

### ● 直角坐標系

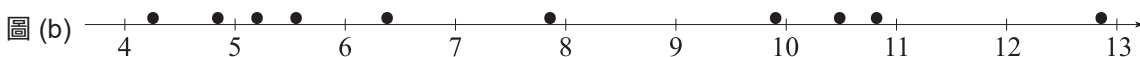
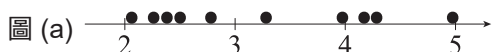
- \_\_\_\_\_ 4. 已知點  $A$  為  $x + 2 = 0$  與  $x + y = 0$  兩直線的交點，點  $B$  為  $(1, 6)$ ，則  $\overline{AB}$  線段長為 (A) 3 (B) 5 (C) 7 (D)  $\sqrt{65}$ 。 [105 (S)]
- \_\_\_\_\_ 5. 將火車站與甲、乙、丙三家標示於坐標平面上，設火車站與甲、乙兩家的坐標分別為  $(0, 0)$ 、 $(-2, -5)$ 、 $(4, 7)$ ，且甲、乙、丙三家共線。若丙家介於甲、乙兩家之間，且丙家到甲家距離為丙家到乙家距離的兩倍，則丙家到火車站的距離為 (A)  $\sqrt{7}$  (B)  $\sqrt{11}$  (C)  $\sqrt{13}$  (D)  $\sqrt{15}$ 。 [109 (A)]

### ● 函數及其圖形

- \_\_\_\_\_ 6. 若函數  $f(x) = x^2 + 3x - 1$  的圖形和  $x$  軸交於  $(x_1, 0)$ 、 $(x_2, 0)$  兩點，則  $|x_1 - x_2|$  之值為 (A) 3 (B)  $\sqrt{11}$  (C)  $\sqrt{13}$  (D)  $\sqrt{14}$ 。 [統測]
- \_\_\_\_\_ 7. 設二次函數  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  圖形的頂點為  $(1, 3)$  且交  $y$  軸於點  $(0, 1)$ ，則  $a$ 、 $b$  之值，何者正確？ (A)  $a = -2$ ， $b = 4$  (B)  $a = -1$ ， $b = 2$   
(C)  $a = 1$ ， $b = -2$  (D)  $a = 2$ ， $b = 4$ 。 [統測]
- \_\_\_\_\_ 8. 若拋物線  $y = ax^2 + b$  之開口向上且與  $x$  軸沒有交點，則下列敘述何者正確？  
(A)  $a > 0$ ， $b > 0$  (B)  $a > 0$ ， $b < 0$  (C)  $a < 0$ ， $b > 0$  (D)  $a < 0$ ， $b < 0$ 。 [108 (B)]



9. 在生成式人工智慧技術中，利用函數變換的概念可將資料的分布狀態作轉換。若有十筆原始資料  $x$ （以  $\bullet$  表示）分布在區間  $[2, 5]$ ，如圖 (a)，現將此十筆資料經線型函數  $f(x)$  變換後，其分布區間為  $[4, 13]$ ，如圖 (b)，則下列何者可為達成任務的  $f(x)$ ？ (A)  $f(x) = 2x + 4$  (B)  $f(x) = 4x - 4$   
(C)  $f(x) = 3x - 2$  (D)  $f(x) = 2x - 3$ 。 [113 (C)]



## ● 一元二次不等式

10. 已知  $a$ 、 $b$  為實數，若不等式  $x^2 + ax \leq b$  之解為  $-5 \leq x \leq 3$ ，則  $a + b =$   
(A)  $-17$  (B)  $-13$  (C)  $13$  (D)  $17$ 。 [104 (C)]

11. 已知  $ax^2 + 2x + c > 0$  的解為  $-1 < x < 3$ ，則  $a + c$  之值為 (A)  $-4$  (B)  $-2$   
(C)  $2$  (D)  $4$ 。 [105 (B)]

12. 滿足不等式  $\frac{2x+5}{4} \leq \frac{x-7}{3}$  的最大整數  $x =$  (A)  $-19$  (B)  $-20$  (C)  $-21$   
(D)  $-22$ 。 [107 (A)]

13. 若  $b$ 、 $c$  為實數，且  $x^2 + bx + c \geq 0$  的解為  $x \leq 1$  或  $x \geq 3$ ，則  $2b + 3c =$   
(A)  $-2$  (B)  $-1$  (C)  $0$  (D)  $1$ 。 [107 (A)]

14. 若點  $A$  與點  $B$  在數線上的坐標分別是  $-1$  與  $5$ ，則線段  $\overline{AB}$ （包含兩端點，如圖所示）是下列哪一個不等式之解的圖形？ (A)  $|x - 1| \leq 4$  (B)  $|x + 1| \leq 5$  (C)  $x^2 - 4x - 5 \leq 0$  (D)  $x^2 + 6x + 5 \leq 0$ 。 [109 (B)]



15. 不等式  $5x - 4 < x^2 < x + 2$  的解為何？ (A)  $-1 < x < 1$  (B)  $-1 < x < 2$   
(C)  $-2 < x < 1$  (D)  $0 < x < 4$ 。 [111 (C)]

## 進階題

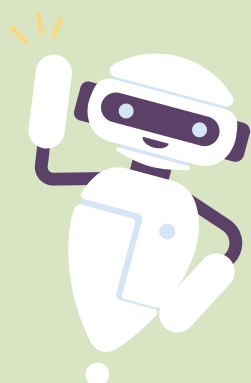
16. 設  $a$ 、 $b$  為實數，且不等式  $-x^2 + 6x + b > 0$  與不等式  $|x + a| < 5$  的解完全相同，則  $a + b =$  (A)  $-13$  (B)  $-7$  (C)  $7$  (D)  $13$ 。 [106 (C)]

17. 若  $x$  為實數，則  $x^2 - 2 + \frac{9}{x^2 + 2}$  的最小值為何？ (A)  $2$  (B)  $\frac{5}{2}$  (C)  $\frac{13}{2}$   
(D)  $6$ 。 [110 (C)]



# 2

## 三角函數



### 三角函數

#### 有向角及其度量

標準位置角

同界角

P.27

角的度量

扇形

P.28

## 三角函數 的定義 與性質

### 三角函數定義

特別角三角函數值  
三角恆等式

P.30

P.31

## 任意角的 三角函數

### 任意角三角 函數的定義

三角函數的正負  
三角函數的轉換

P.35

P.36

## 三角函數 的圖形 與週期

### 三角函數圖形

三角函數圖形的變化  
三角函數週期

P.40

P.40

## 正弦定理 與 餘弦定理

### 正弦定理

P.42

### 餘弦定理

三角形面積

P.44

## 有向角及其度量



## 趨勢分析

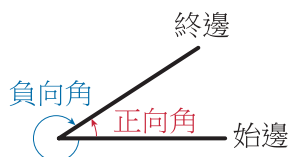
本單元的公式眾多，宜反覆演練才容易熟記，而命題以「任意角三角函數」、「正、餘弦定理」為主。另外請務必牢記  $\sin x$ 、 $\cos x$  的圖形，才能處理週期、函數值的變化。

## 焦點主題

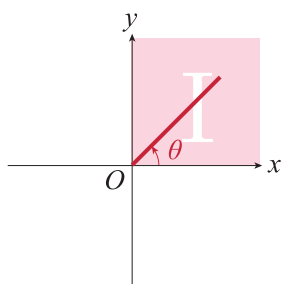
1

## 標準位置角

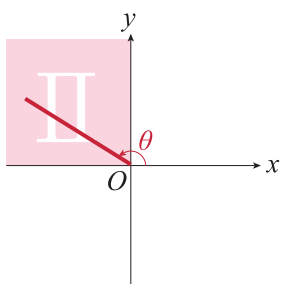
- (1) 規定角的一邊為始邊，另一邊為終邊，由始邊轉到終邊的角稱為「有向角」，而逆時針旋轉的角為「正向角」，順時針旋轉的角為「負向角」。



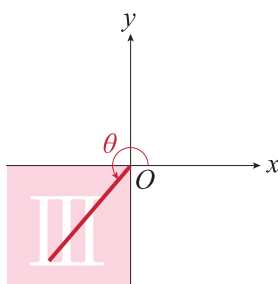
- (2) 坐標平面上，有向角頂點在原點且始邊在  $x$  軸正向，此角稱為「標準位置角」。
- (3) 標準位置角的終邊在  $x$  軸或  $y$  軸稱為「象限角」。例  $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 。
- (4) 標準位置角的終邊在第  $n$  象限內稱為「第  $n$  象限角」。如： $150^\circ$  為第二象限角。
- (5) 當  $\theta$  為第一象限角，記作  $\theta \in \text{I}$ ，而  $\theta + 360^\circ \times n$  ( $n$  為整數) 也是第一象限角。
- ① 當  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ， $\theta \in \text{I}$ 。      ② 當  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ， $\theta \in \text{II}$ 。
- ③ 當  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ， $\theta \in \text{III}$ 。      ④ 當  $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ， $\theta \in \text{IV}$ 。



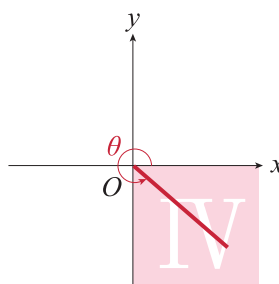
$\theta$  終邊在第一象限  
稱  $\theta$  為第一象限角



$\theta$  終邊在第二象限  
稱  $\theta$  為第二象限角



$\theta$  終邊在第三象限  
稱  $\theta$  為第三象限角



$\theta$  終邊在第四象限  
稱  $\theta$  為第四象限角

## 範例 1

## 老師講解



## 學生練習

下列敘述，對的答○，錯的答×。

- ( ) (1) 標準位置角  $300^\circ$  是第一象限角。
- ( ) (2) 標準位置角  $460^\circ$  是第二象限角。

下列敘述，對的答○，錯的答×。

- ( ) (1) 標準位置角  $225^\circ$  是第三象限角。
- ( ) (2) 標準位置角  $700^\circ$  是第一象限角。

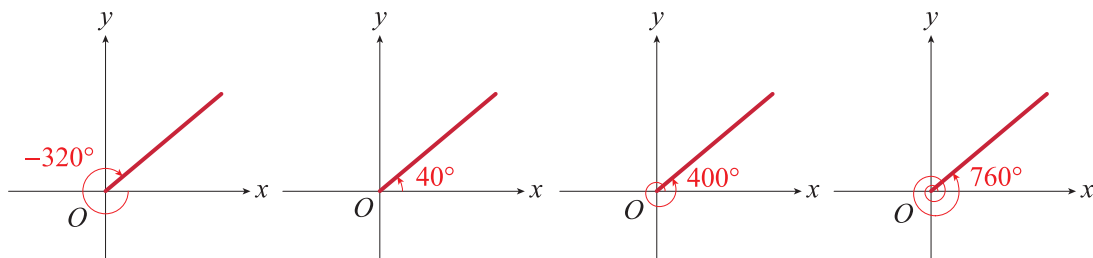
## 焦點主題

## 2

## 同界角

- (1) 若兩個有向角具有相同的始邊、終邊，則此兩角互為「同界角」。而兩個同界角相差  $360^\circ$  的整數倍，其差別在所繞的圈數可能不同。
- (2) 若標準位置角  $\theta = \alpha + 360^\circ \times n$ ，其中  $0^\circ < \alpha < 360^\circ$  且  $n$  為整數，則  $\theta$  的最小正同界角為  $\alpha$ ，最大負同界角為  $(\alpha - 360^\circ)$ 。

**例** 標準位置角  $400^\circ$  的同界角有  $-680^\circ$ 、 $-320^\circ$ 、 $40^\circ$ 、 $400^\circ$ 、 $760^\circ$ 、 $\dots$ ，而  $400^\circ$  的最小正同界角為  $40^\circ$ ，最大負同界角為  $-320^\circ$ ，兩者相差  $360^\circ$ 。



## 觀念是非題

- ( ) 1. 任意角的最小正同界角與最大負同界角一定相差  $360^\circ$ 。

## 範例 2

## 老師講解



## 學生練習

下列敘述，對的答○，錯的答×。

- ( ) (1)  $460^\circ$  與  $100^\circ$  是同界角。  
 ( ) (2)  $200^\circ$  與  $160^\circ$  是同界角。  
 ( ) (3)  $520^\circ$  與  $-200^\circ$  是同界角。

下列敘述，對的答○，錯的答×。

- ( ) (1)  $570^\circ$  與  $310^\circ$  是同界角。  
 ( ) (2)  $280^\circ$  與  $-80^\circ$  是同界角。  
 ( ) (3)  $1110^\circ$  與  $20^\circ$  是同界角。

## 焦點主題

## 3

## 角的單位

- (1) 度度量（六十分制）：圓分成 360 等分，每等分的圓心角為「1 度」，記作  $1^\circ$ ，而一周角  $= 360^\circ$ 。
- (2) 弧度度量（弧度制）：圓上取一段圓弧，使弧長等於半徑，則此弧的圓心角為「1 弧度」或「1 弧度」，其單位可省略不寫，可以記作 1，而一周角  $= 2\pi$ （弧度）。
- (3) 度轉換弧度： $360^\circ = 2\pi$ （弧度）  $\Leftrightarrow 180^\circ = \pi$ （弧度）  $\Leftrightarrow 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ （弧度）。
- (4) 弧度轉換度： $\pi$ （弧度） $= 180^\circ$   $\Leftrightarrow 1$ （弧度） $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$ 。

| 度  | $0^\circ$ | $30^\circ$      | $45^\circ$      | $60^\circ$      | $90^\circ$      | $120^\circ$      | $135^\circ$      | $150^\circ$      | $180^\circ$ | $270^\circ$      | $360^\circ$ |
|----|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------------|------------------|-------------|
| 弧度 | 0         | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$       | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$      |

範例 3

老師講解



學生練習

(1)  $240^\circ$  等於多少弧度？

(2)  $\frac{5\pi}{12}$  (弧度) 等於多少度？

(1)  $300^\circ$  等於多少弧度？

(2)  $\frac{7\pi}{3}$  (弧度) 等於多少度？

焦點主題

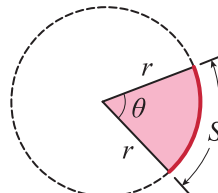
4

## 扇形的弧長、面積

(1) 由圓的兩個半徑與一圓弧所圍成的圖形稱為「扇形」。

(2) 若扇形的半徑為  $r$ ，圓心角為  $\theta$  (弧度)，

則其弧長  $S = r\theta$ 、面積為  $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rS$ 。



觀念是非題

( ) 2. 半徑為 1，圓心角為 3 (弧度) 的扇形周長為 5。

範例 4

老師講解



學生練習

半徑為 3 的扇形，圓心角為  $150^\circ$ ，試求此扇形所對應的弧長、扇形面積。

設圓之半徑為 6，試求以  $40^\circ$  為圓心角對應的弧長、扇形面積。 [103(A)]

## 三角函數的定義與性質

C

2

焦點主題

5

## 銳角三角函數的定義

- (1)  $\triangle ABC$  的內角  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ ，其對邊常以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  表示， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AB} = c$ 。  
 (2) 直角  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ，則  $\angle A$  的三角函數定義如下：

$$\text{正弦函數 } \sin A = \frac{a}{c} \left( \frac{\angle A \text{ 對邊}}{\text{斜邊}} \right) \xleftrightarrow{\text{倒數}} \text{餘割函數 } \csc A = \frac{c}{a} \left( \frac{\text{斜邊}}{\angle A \text{ 對邊}} \right)$$

$$\text{餘弦函數 } \cos A = \frac{b}{c} \left( \frac{\angle A \text{ 鄰邊}}{\text{斜邊}} \right) \xleftrightarrow{\text{倒數}} \text{正割函數 } \sec A = \frac{c}{b} \left( \frac{\text{斜邊}}{\angle A \text{ 鄰邊}} \right)$$

$$\text{正切函數 } \tan A = \frac{a}{b} \left( \frac{\angle A \text{ 對邊}}{\angle A \text{ 鄰邊}} \right) \xleftrightarrow{\text{倒數}} \text{餘切函數 } \cot A = \frac{b}{a} \left( \frac{\angle A \text{ 鄰邊}}{\angle A \text{ 對邊}} \right)$$



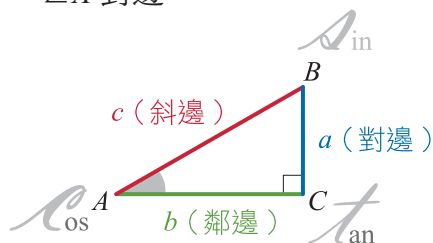
小提醒

常見直角三角形的邊長比有  $(3, 4, 5)$ 、 $(5, 12, 13)$ 、 $(7, 24, 25)$ 、 $(8, 15, 17)$ 。



觀念是非題

- ( ) 1. 以銳角  $\angle A$  來作 2 個直角三角形，因為邊長可能不同，所以  $\sin A$  的值也會不同。



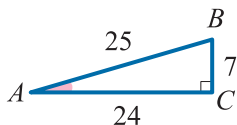
範例 5

老師講解

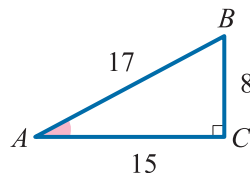


學生練習

如圖，求  $\angle A$  的六個三角函數值。



如圖，求  $\angle A$  的六個三角函數值。



- (1) 當  $\angle A = \theta$  時，則  $\sin A$  可以寫成  $\sin \theta$ 。如： $\angle A = 30^\circ$ ，則  $\sin A = \sin 30^\circ$ 。
- (2) 習慣把  $\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2$  簡寫成  $\sin^2 \theta$ ，而  $\sin(\theta)^2 = \sin \theta^2$ ，故  $\sin^2 \theta \neq \sin \theta^2$ 。
- (3)  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  的三角函數值如下表：

| 函數<br>角度 $\theta$ | $30^\circ = \frac{\pi}{6}$                 | $45^\circ = \frac{\pi}{4}$                | $60^\circ = \frac{\pi}{3}$                 |
|-------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 圖示                |                                            |                                           |                                            |
| $\sin \theta$     | $\frac{1}{2}$                              | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       |
| $\cos \theta$     | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$                              |
| $\tan \theta$     | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  | 1                                         | $\sqrt{3}$                                 |
| $\cot \theta$     | $\sqrt{3}$                                 | 1                                         | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  |
| $\sec \theta$     | $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$                                | 2                                          |
| $\csc \theta$     | 2                                          | $\sqrt{2}$                                | $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ |

## 範例 6

老師講解



學生練習

試求  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \tan^2 45^\circ$ 。試求  $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin^2 45^\circ$ 。

## 焦點主題

7

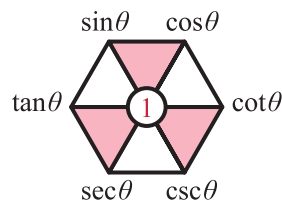
## 三角恆等式（倒數、平方關係）

(1) 倒數關係（對角線兩端點互為倒數）

$$\sin \theta \times \csc \theta = 1, \cos \theta \times \sec \theta = 1, \tan \theta \times \cot \theta = 1。$$

(2) 平方關係（鋪色三角形中，上方兩點的平方和等於下方點的平方）

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta, \cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta。$$



小提醒

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta, \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta, \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1, \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1。$$

C

## 範例 7

老師講解



學生練習

下列敘述，對的答○，錯的答×。

( ) (1)  $\sin 2^\circ \times \csc 2^\circ = 1。$

( ) (2)  $\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ = 3。$

( ) (3)  $\sin^2 4^\circ = 1 - \cos^2 4^\circ。$

下列敘述，對的答○，錯的答×。

( ) (1)  $\cos 5^\circ \times \tan 5^\circ = 1。$

( ) (2)  $\cos^2 6^\circ + \sin^2 6^\circ = 1。$

( ) (3)  $\cos^2 7^\circ = 1 - \sin^2 7^\circ。$

2

## 焦點主題

8

## 三角恆等式（商數、餘角關係）

(1) 商數關係： $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}。$ 

(2) 餘角關係： $\begin{cases} \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \\ \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \end{cases}, \begin{cases} \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta \\ \cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta \end{cases}, \begin{cases} \sec(90^\circ - \theta) = \csc \theta \\ \csc(90^\circ - \theta) = \sec \theta \end{cases}。$

**例**  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \tan 45^\circ = \cot 45^\circ, \sec 60^\circ = \csc 30^\circ。$

## 範例 8

老師講解



學生練習

下列敘述，對的答○，錯的答×。

( ) (1)  $\tan 10^\circ = \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}。$

( ) (2)  $\cot 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}。$

( ) (3)  $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ。$

下列敘述，對的答○，錯的答×。

( ) (1)  $\tan 70^\circ = \frac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}。$

( ) (2)  $\cot 50^\circ = \frac{\cos 50^\circ}{\sin 50^\circ}。$

( ) (3)  $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ。$

焦點主題

9

# 由某個銳角三角函數值來求其他三角函數值

由某個銳角三角函數值，可畫出對應的直角三角形，再求出其他三角函數值。

範例 9

老師講解



學生練習

設  $\theta$  為銳角，若  $\sin \theta = \frac{3}{4}$ ，試求  $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ 。

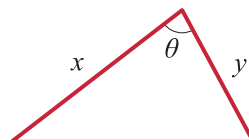
設  $\theta$  為銳角，若  $\cos \theta = \frac{5}{6}$ ，試求  $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ 。

焦點主題

10

# 三角形的面積公式：兩邊夾一角求面積

已知三角形的兩邊長  $x$ 、 $y$  與其夾角  $\theta$ ，則面積為  $\frac{1}{2}xy \sin \theta$ 。



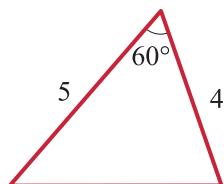
範例 10

老師講解



學生練習

如圖，試求三角形的面積。



如圖，試求三角形的面積。





## 2-2 邁向統測之路

三角平方關係之應用

(1) 正餘弦的和（差）平方： $(\sin \theta \pm \cos \theta)^2 = 1 \pm 2 \sin \theta \cos \theta$ 。

小提醒

$$(\sin \theta \pm \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta \pm 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 \pm 2 \sin \theta \cos \theta。$$

(2) 正餘切的和： $\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$ 。

小提醒

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}。$$

C

2

老師講解

學生練習

設  $\theta$  為銳角，若  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3}$ ，試求：

(1)  $\sin \theta \cos \theta = ?$

(2)  $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = ?$

(3)  $\tan \theta + \cot \theta = ?$

(4)  $\sec \theta + \csc \theta = ?$

設  $\theta$  為銳角，若  $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{5}$ ，試求：

(1)  $\sin \theta \cos \theta = ?$

(2)  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = ?$

(3)  $\tan \theta + \cot \theta = ?$

(4)  $\sec \theta - \csc \theta = ?$

# 2-3

## 任意角的三角函數



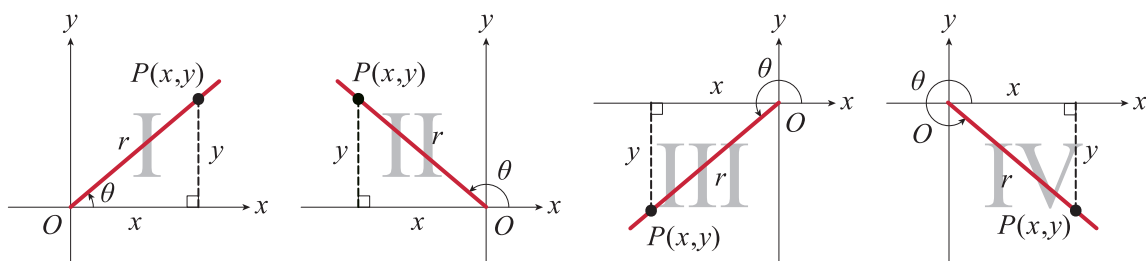
焦點主題

11

### 任意角三角函數的定義

在標準位置角  $\theta$  的終邊上，任取異於原點的一點  $P(x, y)$ ，令  $\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ ，

則  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ， $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ， $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ， $\cot \theta = \frac{x}{y}$ ， $\sec \theta = \frac{r}{x}$ ， $\csc \theta = \frac{r}{y}$ 。



範例 11

老師講解



學生練習

設點  $P(-12, 5)$  在標準位置角  $\theta$  的終邊上，試求  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$  與  $\tan \theta$  的值。

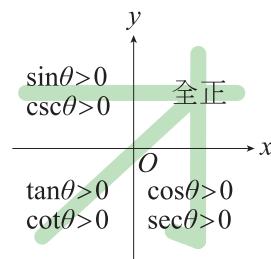
設點  $P(-4, -3)$  在標準位置角  $\theta$  的終邊上，試求  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$  與  $\tan \theta$  的值。

## 焦點主題

12

## 三角函數在各象限的正負

| 象限<br>函數                      | I | II | III | IV |
|-------------------------------|---|----|-----|----|
| $\sin \theta$ 、 $\csc \theta$ | + | +  | -   | -  |
| $\cos \theta$ 、 $\sec \theta$ | + | -  | -   | +  |
| $\tan \theta$ 、 $\cot \theta$ | + | -  | +   | -  |



## 範例 12

老師講解



學生練習

點  $(\cos 600^\circ, \tan 600^\circ)$  在第幾象限？點  $(\sin 700^\circ, \cos 700^\circ)$  在第幾象限？

## 焦點主題

13

## 由任意角的三角函數值來求其他三角函數值

由某個象限的任意角三角函數值，可畫出對應的直角三角形，再求出其他三角函數值。

## 範例 13

老師講解



學生練習

已知  $\theta$  為第三象限角，且  $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ，  
試求  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 。  
[102(C)]

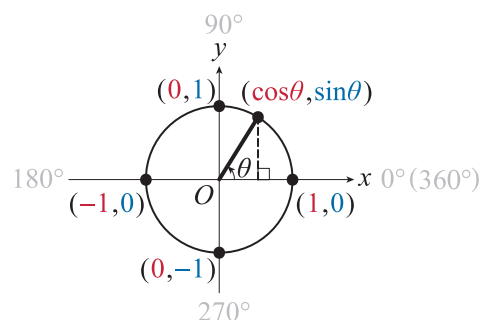
假設  $\theta$  為第二象限角，且  $\tan \theta = -\frac{5}{12}$ ，  
試求  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 。

## 焦點主題

14

## 象限角的三角函數值

| $\theta \backslash$ 函數 | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ | $\cot \theta$ | $\sec \theta$ | $\csc \theta$ |
|------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $0^\circ (360^\circ)$  | 0             | 1             | 0             | 無意義           | 1             | 無意義           |
| $90^\circ$             | 1             | 0             | 無意義           | 0             | 無意義           | 1             |
| $180^\circ$            | 0             | -1            | 0             | 無意義           | -1            | 無意義           |
| $270^\circ$            | -1            | 0             | 無意義           | 0             | 無意義           | -1            |



小提醒

$\cos \theta$  看  $x$  坐標， $\sin \theta$  看  $y$  坐標，而  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 。

範例 14

老師講解



學生練習

求  $\sin 0^\circ + 2 \sin 90^\circ + 3 \cos 0^\circ + 4 \cos 90^\circ$ 。

求  $\sin 90^\circ + 3 \sin 180^\circ + 5 \cos 90^\circ + 7 \cos 180^\circ$ 。

## 焦點主題

15

## 任意角三角函數的轉換（同界角公式）

$\sin(360^\circ \times n + \theta) = \sin \theta$ ， $\cos(360^\circ \times n + \theta) = \cos \theta$ ， $\tan(360^\circ \times n + \theta) = \tan \theta$ ，  
 $\cot(360^\circ \times n + \theta) = \cot \theta$ ， $\sec(360^\circ \times n + \theta) = \sec \theta$ ， $\csc(360^\circ \times n + \theta) = \csc \theta$ ， $n$  為整數。

範例 15

老師講解



學生練習

試求下列三角函數的值：

(1)  $\sin 390^\circ$  (2)  $\cos 765^\circ$

試求下列三角函數的值：

(1)  $\sin 405^\circ$  (2)  $\cos 780^\circ$

## 焦點主題

16

## 任意角三角函數的轉換（負角公式）

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta, \tan(-\theta) = -\tan\theta,$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta, \sec(-\theta) = \sec\theta, \csc(-\theta) = -\csc\theta.$$

## 範例 16

老師講解



學生練習

試求下列三角函數的值：

$$(1)\sin(-30^\circ) \quad (2)\cos(-30^\circ)$$

試求下列三角函數的值：

$$(1)\sin(-60^\circ) \quad (2)\cos(-60^\circ)$$

C

2

## 焦點主題

17

任意角三角函數的轉換（ $180^\circ - \theta$ ）若  $f$  為六種三角函數之一，則  $f(180^\circ - \theta) = \pm f(\theta)$ 。

| 函數<br>角度                        | sin          | cos           | tan           | cot           | sec           | csc          |
|---------------------------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| $180^\circ - \theta(\text{II})$ | $\sin\theta$ | $-\cos\theta$ | $-\tan\theta$ | $-\cot\theta$ | $-\sec\theta$ | $\csc\theta$ |

## 範例 17

老師講解



學生練習

試求下列三角函數的值：

$$(1)\sin 135^\circ \quad (2)\cos 135^\circ \quad (3)\tan 135^\circ$$

試求下列三角函數的值：

$$(1)\sin 150^\circ \quad (2)\cos 150^\circ \quad (3)\tan 150^\circ$$

## 焦點主題

18

任意角三角函數的轉換 ( $180^\circ + \theta$ )

若  $f$  為六種三角函數之一，則  $f(180^\circ + \theta) = \pm f(\theta)$ 。

| 角度 \ 函數                    | sin            | cos            | tan           | cot           | sec            | csc            |
|----------------------------|----------------|----------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| $180^\circ + \theta$ (III) | $-\sin \theta$ | $-\cos \theta$ | $\tan \theta$ | $\cot \theta$ | $-\sec \theta$ | $-\csc \theta$ |

## 範例 18

老師講解



學生練習

試求下列三角函數的值：

(1)  $\sin 240^\circ$  (2)  $\cos 240^\circ$  (3)  $\tan 240^\circ$

試求下列三角函數的值：

(1)  $\sin 225^\circ$  (2)  $\cos 225^\circ$  (3)  $\tan 225^\circ$

## 焦點主題

19

任意角三角函數的轉換 ( $360^\circ - \theta$ )

若  $f$  為六種三角函數之一，則  $f(360^\circ - \theta) = \pm f(\theta)$ 。

| 角度 \ 函數                   | sin            | cos           | tan            | cot            | sec           | csc            |
|---------------------------|----------------|---------------|----------------|----------------|---------------|----------------|
| $360^\circ - \theta$ (IV) | $-\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $-\tan \theta$ | $-\cot \theta$ | $\sec \theta$ | $-\csc \theta$ |

## 範例 19

老師講解



學生練習

試求下列三角函數的值：

(1)  $\sin 330^\circ$  (2)  $\cos 330^\circ$  (3)  $\tan 330^\circ$

試求下列三角函數的值：

(1)  $\sin 300^\circ$  (2)  $\cos 300^\circ$  (3)  $\tan 300^\circ$

C

2

焦點主題

20

任意角三角函數的轉換 ( $90^\circ \pm \theta$ 、 $270^\circ \pm \theta$ )(1)  $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$  互為餘函數， $\tan \theta$ 、 $\cot \theta$  互為餘函數， $\sec \theta$ 、 $\csc \theta$  互為餘函數。(2) 若  $f$ 、 $g$  是互餘的三角函數，則  $f(90^\circ \pm \theta) = \pm g(\theta)$ ， $f(270^\circ \pm \theta) = \pm g(\theta)$ 。

| 角度 \ 函數                    | $\sin$         | $\cos$         | $\tan$         | $\cot$         | $\sec$         | $\csc$         |
|----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $90^\circ - \theta$ (I)    | $\cos \theta$  | $\sin \theta$  | $\cot \theta$  | $\tan \theta$  | $\csc \theta$  | $\sec \theta$  |
| $90^\circ + \theta$ (II)   | $\cos \theta$  | $-\sin \theta$ | $-\cot \theta$ | $-\tan \theta$ | $-\csc \theta$ | $\sec \theta$  |
| $270^\circ - \theta$ (III) | $-\cos \theta$ | $-\sin \theta$ | $\cot \theta$  | $\tan \theta$  | $-\csc \theta$ | $-\sec \theta$ |
| $270^\circ + \theta$ (IV)  | $-\cos \theta$ | $\sin \theta$  | $-\cot \theta$ | $-\tan \theta$ | $\csc \theta$  | $-\sec \theta$ |

## 範例 20

老師講解



學生練習

設  $\theta$  為銳角，求

$$\frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ + \theta)} + \frac{\cos(270^\circ - \theta)}{\sin(180^\circ + \theta)}。$$

設  $\theta$  為銳角，求

$$\frac{\cos(90^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ + \theta)} + \frac{\sin(270^\circ + \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)}。$$

## 三角函數的圖形與週期



## 焦點主題

21

## 三角函數的圖形與週期

## (1) 函數的週期

若函數  $f(x)$  的圖形每隔固定段落就會重複出現，則  $f$  為週期函數，此時存在的最小正數  $T$  使得  $f(x+T) = f(x)$ ，則稱此函數的週期為  $T$ 。

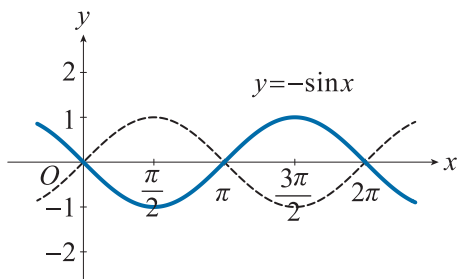
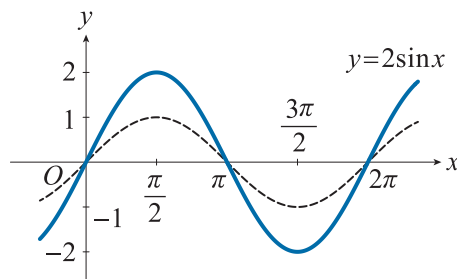
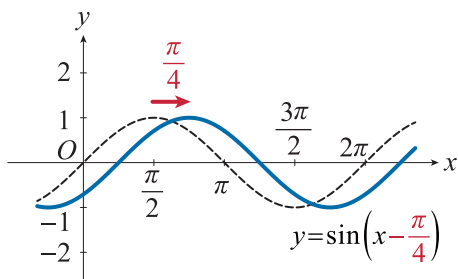
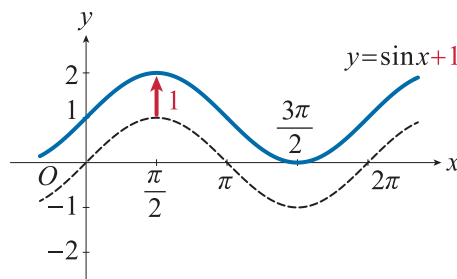
## (2) 三角函數的圖形

|                                                                                                                               |                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><math>y = \sin x</math></p> <p>① 週期 <math>2\pi</math>。<br/>② <math>-1 \leq \sin x \leq 1</math>。</p>                       | <p><math>y = \cos x</math></p> <p>① 週期 <math>2\pi</math>。<br/>② <math>-1 \leq \cos x \leq 1</math>。</p>                       |
| <p><math>y = \tan x</math></p> <p>① 週期 <math>\pi</math>。<br/>② <math>\tan x</math> 可為任意實數。</p>                                | <p><math>y = \cot x</math></p> <p>① 週期 <math>\pi</math>。<br/>② <math>\cot x</math> 可為任意實數。</p>                                |
| <p><math>y = \sec x</math></p> <p>① 週期 <math>2\pi</math>。<br/>② <math>\sec x \geq 1</math> 或 <math>\sec x \leq -1</math>。</p> | <p><math>y = \csc x</math></p> <p>① 週期 <math>2\pi</math>。<br/>② <math>\csc x \geq 1</math> 或 <math>\csc x \leq -1</math>。</p> |



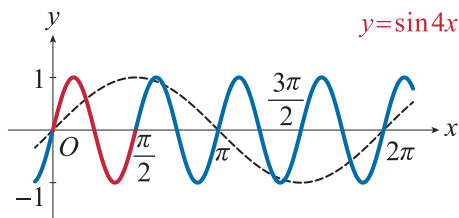
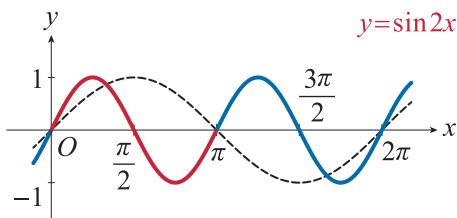
## 小提醒

$\sin x$  的圖形向左平移  $\frac{\pi}{2}$  就是  $\cos x$  的圖形。

(3) 三角函數圖形的變化 (以虛線  $\sin x$  圖形為例) $y = -\sin x$  : 虛線以  $x$  軸為基準上下顛倒 $y = 2\sin x$  : 虛線以  $x$  軸為基準拉伸 2 倍 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  : 虛線向右平移  $\frac{\pi}{4}$  單位 $y = \sin x + 1$  : 虛線向上平移 1 單位

## (4) 三角函數的週期變化

- ①  $\sin x$  的週期是  $2\pi$ ，而  $\sin 2x$  的週期為  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 、 $\sin 4x$  的週期為  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 。



- ② 若  $f(x)$  的週期為  $T$ ，則  $a \times f(kx + b) + c$  的週期為  $\frac{T}{|k|}$ ，其中  $a, k \neq 0$ 。



觀念是非題

- ( ) 1. 函數  $y = 2\sin 3x$  的最大值為 3。

範例 21

老師講解



學生練習

試求  $y = 3 \tan 5x + 1$  的週期。試求  $y = 2 \cos 3x$  的週期。

# 2-5

## 正弦定理與餘弦定理



### 焦點主題

22

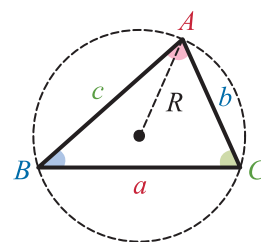
### 正弦定理(I)

若 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $R$ ，則 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 。



#### 小提醒

三組邊長與對角的正弦比值恆相等。



| $\theta$      | $0^\circ$ | $30^\circ$    | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ | $120^\circ$          | $135^\circ$          | $150^\circ$   | $180^\circ$ |
|---------------|-----------|---------------|----------------------|----------------------|------------|----------------------|----------------------|---------------|-------------|
| $\sin \theta$ | 0         | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0           |



#### 觀念是非題

( ) 1. 當 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為5， $\angle A = 30^\circ$ 時，則 $\overline{BC} = 5$ 。

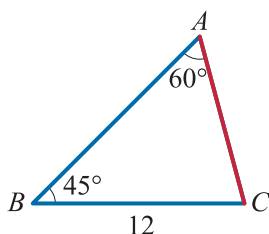
### 範例 22

#### 老師講解

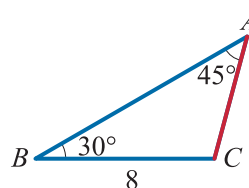


#### 學生練習

如圖，試求 $\overline{AC}$ 長，即 $b$ 之值。



如圖，試求 $\overline{AC}$ 長，即 $b$ 之值。



## 焦點主題

23

## 正弦定理(II)

$\triangle ABC$  中,  $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 。(各邊的長度比 = 對角的正弦比)

## 範例 23

老師講解



學生練習

$\triangle ABC$  中,  $\angle A = 105^\circ$ 、 $\angle B = 30^\circ$ ,  
試求  $b : c$ 。

$\triangle ABC$  中,  $\angle A = 45^\circ$ 、 $\angle C = 75^\circ$ ,  
試求  $a : b$ 。

C

2

## 焦點主題

24

## 餘弦定理(I)

$\triangle ABC$  的任意兩邊長與其夾角 (SAS) 可以表示第三邊:

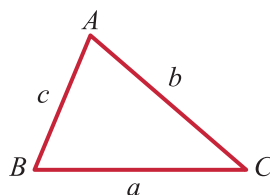
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$



小提醒

畢氏定理是餘弦定理的特例。

| $\theta$      | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$    | $90^\circ$ | $120^\circ$    | $135^\circ$           | $150^\circ$           | $180^\circ$ |
|---------------|-----------|----------------------|----------------------|---------------|------------|----------------|-----------------------|-----------------------|-------------|
| $\cos \theta$ | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0          | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1          |



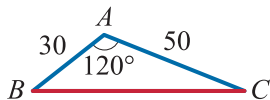
## 範例 24

老師講解

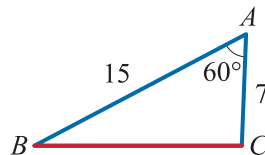


學生練習

如圖, 試求  $\overline{BC}$  長, 即  $a$  之值。



如圖, 試求  $\overline{BC}$  長, 即  $a$  之值。



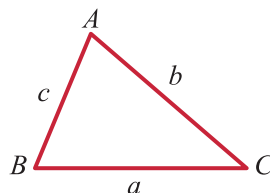
焦點主題

25

# 餘弦定理(II)

$\triangle ABC$  的三邊長 (SSS) 可以表示任一角的餘弦值，再求出其角度。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}。$$



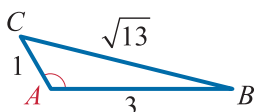
範例 25

老師講解

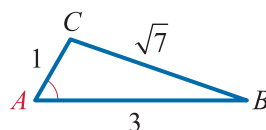


學生練習

如圖，試求：(1)  $\cos A$  (2)  $\angle A$



如圖，試求：(1)  $\cos A$  (2)  $\angle A$



焦點主題

26

# 海龍公式：三邊長求面積

$\triangle ABC$  中，令  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ，則面積為  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

範例 26

老師講解



學生練習

若三角形的三邊長為 5、6、7，則面積為何？

若三角形的三邊長為 5、7、8，則面積為何？



## 2-5 邁向統測之路

正弦定理求三內角的正弦比

由正弦定理知， $\triangle ABC$  的三內角正弦比  $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ 。

## 老師講解

(1)  $\triangle ABC$  中，若  $(a+b):(b+c):(c+a) = 7:8:9$ ，試求  $\sin A : \sin B : \sin C = ?$

(2)  $\triangle ABC$  中，若  $a+2b-2c=0$  與  $a-2b+c=0$ ，試求  $\sin A : \sin B : \sin C = ?$

## 學生練習

(1)  $\triangle ABC$  中，若  $(a+b):(b+c):(c+a) = 5:6:7$ ，試求  $\sin A : \sin B : \sin C = ?$

(2)  $\triangle ABC$  中，若  $a-2b+2c=0$  與  $a+2b-3c=0$ ，試求  $\sin A : \sin B : \sin C = ?$

C

2



## 統測常考題

### 範例 1 三角恆等式

已知  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ，則  $\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} =$  (A)  $2(\sqrt{3}-1)$  (B)  $4(\sqrt{3}-1)$   
(C)  $2(\sqrt{3}+1)$  (D)  $4(\sqrt{3}+1)$ 。

[統測]

#### ■ 解題小技巧

平方關係：

$$(1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta, \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta。$$

$$(2) \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta。$$

$$(3) 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta。$$

$$\begin{aligned} \text{解：} & \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} \\ &= \sin \theta \times \left( \frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{1-\cos \theta} \right) \\ &= \sin \theta \times \frac{(1-\cos \theta) + (1+\cos \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)} = \sin \theta \times \frac{2}{1-\cos^2 \theta} \\ &= \sin \theta \times \frac{2}{\sin^2 \theta} = \frac{2}{\sin \theta} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{4(\sqrt{3}+1)}{2} = 2(\sqrt{3}+1)，故選 (C) \end{aligned}$$

類題 1 若  $\tan \theta = \frac{8}{15}$ ，則  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sec^2 \theta = ?$  \_\_\_\_\_

(A)  $\frac{514}{225}$  (B)  $\frac{38}{15}$  (C)  $\frac{64}{225}$  (D)  $\frac{49}{625}$ 。

[107(B)]

類題 2 已知  $\theta$  為一銳角，且  $\tan \theta = \frac{7}{19}$ ，則  $\left( \frac{1+\sin \theta}{1+\cos \theta} \right) \left( \frac{1+\sec \theta}{1+\csc \theta} \right)$  之值為何？

\_\_\_\_\_

(A)  $\frac{25}{17}$  (B)  $\frac{7}{19}$  (C)  $\frac{19}{267}$  (D)  $\frac{277}{319}$ 。

[統測]



### 範例 2 三角函數的象限問題

若  $\tan \theta = -\frac{3}{4}$  且  $\sin \theta < 0$ ，則  $5 \sin \theta + 10 \cos \theta =$  (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8。

[統測]

解：若  $\tan \theta < 0$ ，則  $\theta$  為第二象限角或第四象限角

若  $\sin \theta < 0$ ，則  $\theta$  為第三象限角或第四象限角

$$\therefore \tan \theta = -\frac{3}{4} < 0 \text{ 且 } \sin \theta < 0$$

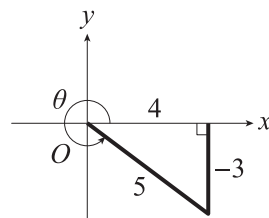
$\therefore \theta$  為第四象限角

以  $\tan \theta = -\frac{3}{4}$  來作圖，

$$\text{則 } \sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{故 } 5 \sin \theta + 10 \cos \theta = 5 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 10 \times \frac{4}{5} = 5$$

故選 (A)



類題 1 若  $\sin \theta = \frac{33}{65}$ ，且  $\tan \theta = \frac{-33}{56}$ ，則  $\theta$  為哪一象限角？\_\_\_\_\_

(A) 第一象限角 (B) 第二象限角 (C) 第三象限角 (D) 第四象限角。[107(B)]

類題 2 設  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$  且  $\tan \theta = \frac{4}{3}$ ，則  $\sin \theta + \cos \theta = ?$  \_\_\_\_\_

(A)  $-\frac{8}{5}$  (B)  $-\frac{7}{5}$  (C)  $-1$  (D)  $0$ 。

[統測]



## 基礎題

### ● 有向角及其度量

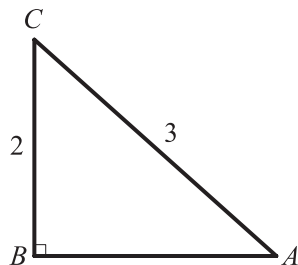
- \_\_\_\_\_ 1. 若一扇形的面積為  $\frac{27\pi}{2}$ ，弧長為  $\frac{9\pi}{2}$ ，則此扇形的圓心角為何？ (A)  $\frac{\pi}{4}$   
 (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{2\pi}{3}$  (D)  $\frac{3\pi}{4}$ 。 [108 (A)]

### ● 三角函數的定義與性質

- \_\_\_\_\_ 2. 若  $\tan \theta + \sec \theta = 5$ ，則  $\tan \theta - \sec \theta = ?$  (A)  $-\frac{3}{5}$  (B)  $-\frac{1}{5}$  (C)  $\frac{1}{5}$  (D)  $\frac{3}{5}$ 。  
 [110 (C)]

- \_\_\_\_\_ 3. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 90^\circ$ ，如圖所示，且  $\overline{AC} = 3$ ，  
 $\overline{BC} = 2$ ，則  $\tan A = ?$

(A)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$  (B)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$  (C)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  (D)  $\frac{1}{3\sqrt{5}}$ 。 [112 (C)]



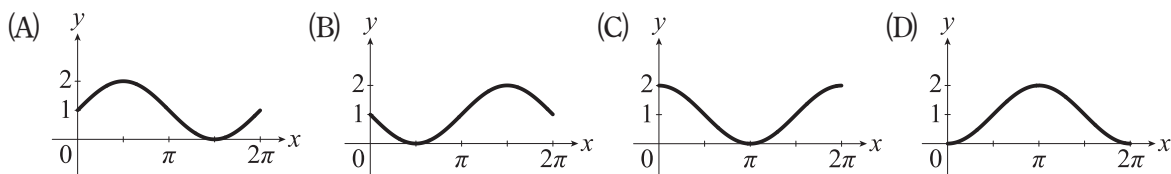
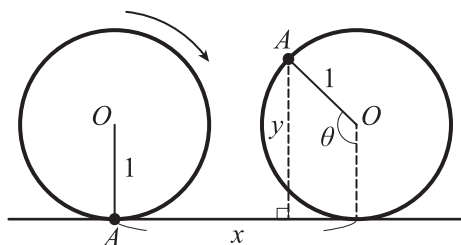
### ● 任意角的三角函數

- \_\_\_\_\_ 4. 若  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  且  $\sin \theta = \sin 2024^\circ$ ，則  $\theta = ?$  (A)  $204^\circ$  (B)  $214^\circ$   
 (C)  $224^\circ$  (D)  $234^\circ$ 。 [113 (C)]
- \_\_\_\_\_ 5. 已知  $\sin \theta \tan \theta < 0$  且  $\cos \theta \cot \theta > 0$ ，則  $\theta$  為第幾象限角？ (A) 一 (B) 二  
 (C) 三 (D) 四。 [113 (C)]

### ● 三角函數的圖形與週期

- \_\_\_\_\_ 6. 下列何者錯誤？ (A)  $y = |\sin 2x|$  之週期為  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $y = 3 \sin x$  之週期為  $2\pi$   
 (C)  $y = \cos 2x$  之週期為  $\frac{\pi}{2}$  (D)  $y = 4 \cos x$  之週期為  $2\pi$ 。 [111 (C)]

- \_\_\_\_\_ 7. 有一個在水平地面上的圓形輪子，其半徑為 1 單位長。輪子上 A 點與地面接觸，如圖所示，當輪子向右滾動，相對於圓心 O 而言，A 點以順時針轉動  $\theta$  角，且輪子中心 O 前進  $x$  單位長的時候，A 點距離地面的高度為  $y$  單位長。在坐標平面上，若在  $0 \leq x \leq 2\pi$  的範圍中， $y$  可以表示為  $x$  的函數  $f(x)$ ，則下列圖形何者為  $y = f(x)$  的圖形？ [113 (C)]





# ● 正弦定理與餘弦定理

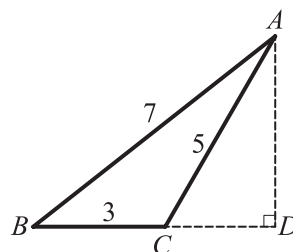
- \_\_\_\_\_ 8. 已知 $\triangle ABC$ 中， $a$ 、 $b$ 、 $c$ 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對邊長。若 $ab:bc:ca=3:4:6$ ，則 $\sin A:\sin B:\sin C=?$  (A)  $4:3:2$  (B)  $4:2:3$  (C)  $2:3:4$  (D)  $3:2:4$ 。 [110 (C)]

- \_\_\_\_\_ 9. 若 $\triangle ABC$ 三邊長為4、5、6，則其外接圓直徑為何？ (A)  $\frac{8}{\sqrt{7}}$  (B)  $\frac{12}{\sqrt{7}}$  (C)  $\frac{16}{\sqrt{7}}$  (D)  $\frac{20}{\sqrt{7}}$ 。 [111 (C)]

- \_\_\_\_\_ 10. 已知 $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，其中 $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{AC}=2$ ，且 $\angle BAC$ 為鈍角。若 $\overline{BC}$ 的長度為 $a$ ，則 $a^2=?$  (A)  $13-6\sqrt{2}$  (B)  $13-2\sqrt{6}$  (C)  $13+2\sqrt{6}$  (D)  $13+6\sqrt{2}$ 。 [111 (C)]

- \_\_\_\_\_ 11. 已知 $\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{AB}=7$ ， $\overline{BC}=3$ ， $\overline{CA}=5$ ，如圖所示，試求 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}=?$

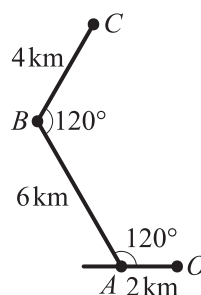
- (A)  $\frac{5\sqrt{3}}{4}$  (B)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 。 [112 (C)]



## 進階題

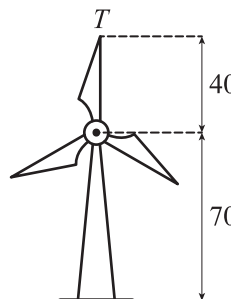
- \_\_\_\_\_ 12. 一公路依水平地形迂迴而建，如圖所示。從 $O$ 地到 $A$ 地、 $A$ 地到 $B$ 地、 $B$ 地到 $C$ 地的距離分別是2、6、4公里(km)，而 $\overline{OA}$ 與 $\overline{AB}$ 的夾角及 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的夾角均為 $120^\circ$ ，則 $C$ 地到 $O$ 地的直線距離為多少公里？

- (A)  $2\sqrt{11}$  (B)  $2\sqrt{21}$  (C)  $2\sqrt{31}$  (D)  $2\sqrt{41}$ 。 [112 (C)]



- \_\_\_\_\_ 13. 假設風力發電的風車旋轉軸平行於地面，且有三葉片， $T$ 點為某葉片的頂端，如圖所示，我們想了解 $T$ 點在風車旋轉過程中距離地面的高度變化。已知風車逆時針方向等速旋轉一圈需時4秒，且每個葉片長度皆為40公尺，其旋轉中心離地面70公尺。若風車開始運轉時， $T$ 點恰在離地面最高的位置上，且 $x$ 秒後可用 $f(x)=40\sin\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)+70$ （其中常數 $a>0$ 且 $0\leq x\leq 4$ ）來描述 $T$ 點離地面的高度（單位：公尺），則 $a$ 可為下列何者？

- (A)  $\frac{\pi}{3}$  (B)  $\frac{\pi}{2}$  (C)  $\pi$  (D)  $\frac{4\pi}{3}$ 。 [112 (C)]





# 3 平面向量

平面向量

向量及其  
基本運算

向量

向量的圖示

向量的運算

單位向量

向量的平行

P.54

P.56

P.56

## 向量的 內積

### 內積的定義

內積的運算 — 內積的正定性 P.59

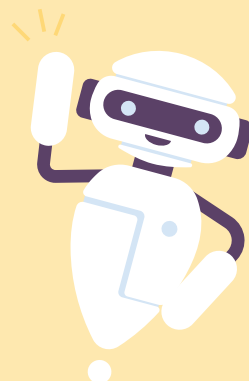
內積的坐標計算 — 向量的垂直 P.60

## 內積的 應用

二階行列式 — 三角形面積 P.62

柯西不等式 P.63

向量的正射影 P.63



# 向量及其基本運算



## 趨勢分析

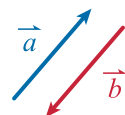
本單元的「向量加減」、「係數積」與代數運算雷同，而命題以向量的「內積」、「正定性」為主，如遇到向量的合成，宜藉助圖形來輔助，並聯想可能的公式。

### 焦點主題

1

## 向量的定義

- (1) 具有大小和方向的量就稱為「向量」。**例** 汽車以時速 50 公里向東移動。
- (2) 帶有箭頭的線段稱為「從  $A$  點到  $B$  點的有向線段」，以  $\overrightarrow{AB}$  表示，而  $A$  為起點， $B$  為終點， $\overrightarrow{AB}$  的長度以  $|\overrightarrow{AB}|$  來表示，即  $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|$ 。
- (3) 有向線段可代表向量，有向線段的方向、長度代表向量的方向、大小。
- (4) 若有兩個向量的大小（長度）相等，方向也相同，則這兩個向量相等。
- (5) 向量由大小和方向來決定，不在意其位置，為了方便，常以  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  來表示。
- (6) 起點與終點重合的向量稱為「零向量」，記作  $\vec{0}$ 。**例**  $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ 。
- (7) 若  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的長度相等但方向相反，則互為「相反向量」，記作  $\vec{a} = -\vec{b}$  或  $\vec{b} = -\vec{a}$ 。



**例** 兩向量  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BA}$  互為相反向量，記作  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$  與  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ 。



### 觀念是非題

- ( ) 1. 若  $M$  是  $\overrightarrow{AB}$  的中點，則  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ 。

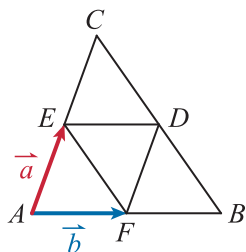
### 範例 1

#### 老師講解

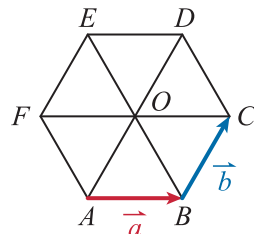


#### 學生練習

如圖， $D$ 、 $E$ 、 $F$  為  $\triangle ABC$  三邊的中點，若  $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ ，則還有哪些向量等於  $\vec{a}$ ？哪些等於  $-\vec{b}$ ？



如圖為正六邊形，若  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，則還有哪些向量等於  $\vec{a}$ ？哪些等於  $-\vec{b}$ ？



## 焦點主題

2

## 向量的坐標表示

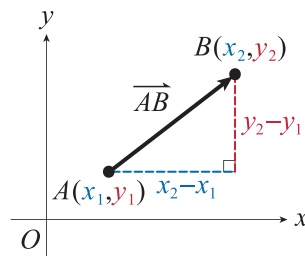
(1) 設兩點  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，則向量  $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 。 $(\overrightarrow{AB} = B - A)$

而  $x_2 - x_1$  為向量  $\overrightarrow{AB}$  的  $x$  分量， $y_2 - y_1$  為向量  $\overrightarrow{AB}$  的  $y$  分量。



小提醒

零向量  $\vec{0} = (0, 0)$  不討論其方向。



(2) 若向量  $\vec{a} = (x, y)$ ，則其長度  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

## 範例 2

老師講解



學生練習

已知  $A(8, 2)$ 、 $B(20, 7)$  兩點，試求  $\overrightarrow{AB}$  與  $|\overrightarrow{AB}|$ 。

已知  $P(1, 2)$ 、 $Q(9, 8)$  兩點，試求  $\overrightarrow{PQ}$  與  $|\overrightarrow{PQ}|$ 。

## 焦點主題

3

## 向量的相等

若兩向量  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2)$  相等，則  $x_1 = x_2$  且  $y_1 = y_2$ 。



觀念是非題

( ) 2. 設兩向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，若  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，則  $\vec{a} = \vec{b}$ 。

## 範例 3

老師講解



學生練習

已知兩向量  $\vec{a} = (x - 5, y + 3)$ 、 $\vec{b} = (7, 4)$ ，若  $\vec{a} = \vec{b}$ ，試求  $x$ 、 $y$ 。

已知兩向量  $\overrightarrow{AB} = (2x, 3y - 1)$ 、 $\overrightarrow{CD} = (8, 5)$ ，若  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ，試求  $x$ 、 $y$ 。

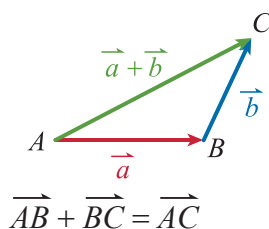
## 焦點主題

## 4

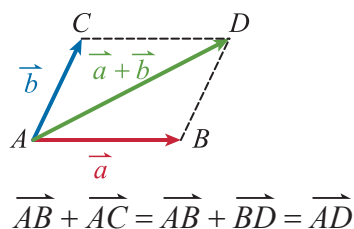
## 向量的加減法及其圖示

(1) 向量加法的圖示：

① 三角形法（尾首重合）



② 平行四邊形法（起點重合）


 (2) 向量的減法：規定  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ，即  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的相反向量之合成。


觀念是非題

 ( ) 3. 若  $\vec{AB} = (1, 2)$ ， $\vec{BC} = (1, 1)$ ， $\vec{CD} = (-2, 4)$ ，則  $\vec{AD} = (0, 7)$ 。

## 範例 4

老師講解



學生練習

 已知  $A(1, 3)$ 、 $B(2, 6)$ 、 $C(9, 8)$  三點，試求：

 (1)  $\vec{AB} + \vec{BC}$  (2)  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$ 。

 已知  $P(0, 1)$ 、 $Q(5, 4)$ 、 $R(6, 5)$  三點，試求：

 (1)  $\vec{PQ} + \vec{QR}$  (2)  $\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RP}$ 。

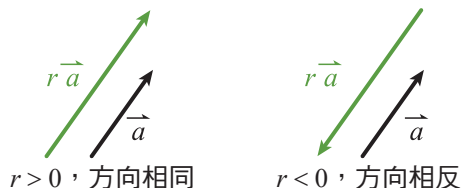
## 焦點主題

## 5

## 向量的實數積

 若向量  $\vec{a}$  不是零向量，且  $r$  為實數，則  $r\vec{a}$  與  $\vec{a}$  的關係如下：

 (1) 當  $r = 0$  時： $r\vec{a} = \vec{0}$ ，是零向量。

 (2) 當  $r \neq 0$  時：方向相同或相反， $r\vec{a}$  的長度是  $\vec{a}$  的  $|r|$  倍。


觀念是非題

 ( ) 4. 設  $\vec{AB}$  的中點為  $M$ ，則  $\vec{AB} = 2\vec{BM}$ 。

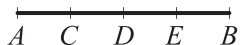
## 範例 5

老師講解



學生練習

如圖， $C$ 、 $D$ 、 $E$  分別為線段  $\overrightarrow{AB}$  的等分點，若  $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{BC} = n\overrightarrow{AC}$ ，試求  $m$ 、 $n$ 。



如圖， $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  分別為線段  $\overrightarrow{AB}$  的等分點，若  $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{BE} = n\overrightarrow{AC}$ ，試求  $m$ 、 $n$ 。



C

3

焦點主題

6

## 向量加減、實數積的坐標表示

若向量  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，且  $r$  為實數，則：

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \quad (2) \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \quad (3) r\vec{a} = (ra_1, ra_2)。$$



觀念是非題

( ) 5. 若  $\vec{a} = (1, 3)$ 、 $\vec{b} = (2, 6)$ ，則  $\vec{b}$  的長度是  $\vec{a}$  的 2 倍。

## 範例 6

老師講解



學生練習

已知  $\vec{a} = (1, 3)$ 、 $\vec{b} = (4, 5)$ 、 $\vec{c} = (2, 6)$ ，試求：

$$(1) \vec{a} + \vec{b} \quad (2) 3\vec{b} - 2\vec{c}。$$

已知  $\vec{a} = (6, 4)$ 、 $\vec{b} = (2, 3)$ 、 $\vec{c} = (3, 1)$ ，試求：

$$(1) \vec{a} - \vec{b} \quad (2) 2\vec{b} + 3\vec{c}。$$

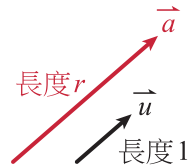
## 焦點主題

7

## 單位向量

(1) 長度為 1 的向量稱為「單位向量」，**例**  $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  就是單位向量。

(2) 若向量  $\vec{a}$  的長度是  $r$  ( $\neq 0$ )，則其單位向量  $\vec{u} = \pm \frac{1}{r} \vec{a}$ 。



## 小提醒

同向：+，反向：-。

## 範例 7

老師講解



學生練習

已知  $\vec{a} = (5, 12)$ ，若  $\vec{u}$  與  $\vec{a}$  方向相同  
且  $|\vec{u}| = 1$ ，試求  $\vec{u}$ 。

已知  $\vec{AB} = (8, 6)$ ，若  $\vec{u}$  是單位向量且與  
 $\vec{AB}$  方向相同，試求  $\vec{u}$ 。

## 焦點主題

8

## 向量的平行

兩個非零向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的方向相同或相反都稱為「向量平行」，記作  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 。

(1) 若  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  平行，則存在一實數  $r$ ，使得  $\vec{a} = r \vec{b}$ 。

(2) 若  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$  平行，則  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ，其中  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_1$ 、 $b_2 \neq 0$ 。

## 範例 8

老師講解



學生練習

若  $\vec{a} = (6, -8)$ 、 $\vec{b} = (-3, k)$ ，且  $\vec{a}$  與  
 $\vec{b}$  平行，試求  $k$ 。

設  $\vec{AB} = (k-1, 9)$ 、 $\vec{CD} = (2, 3)$ ，若  $\vec{AB}$   
與  $\vec{CD}$  平行，試求  $k$ 。



3-1 邁向統測之路

三角形上的向量合成  
已知三角形任意兩邊的對應向量，利用向量合成可以求出第三邊的對應向量。

| 老師講解                                                                                                                                                                                                                                                                               | 學生練習                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><math>\triangle ABC</math> 中，若向量 <math>\overrightarrow{AB} = (3, -4)</math>，<br/><math>\overrightarrow{BC} = (1, 1)</math>，試求：</p> <p>(1) 向量 <math>\overrightarrow{AC} = ?</math><br/>(2) 向量 <math>\overrightarrow{CA} = ?</math><br/>(3) <math>\triangle ABC</math> 之周長為何？</p> | <p><math>\triangle ABC</math> 中，向量 <math>\overrightarrow{AB} = (-3, 4)</math>，<br/><math>\overrightarrow{AC} = (4, 3)</math>，試求：</p> <p>(1) 向量 <math>\overrightarrow{BA} = ?</math><br/>(2) 向量 <math>\overrightarrow{BC} = ?</math><br/>(3) <math>\triangle ABC</math> 之周長為何？</p> |

C

3

# 3-2

## 向量的內積



### 焦點主題

9

### 向量內積的定義

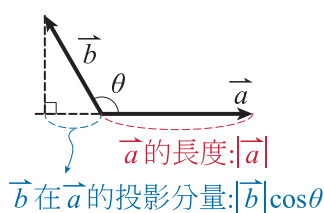
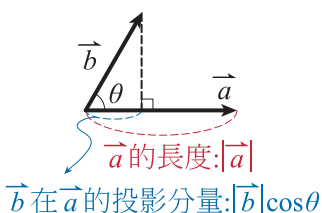
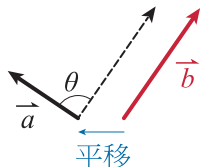
已知兩個非零向量  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  在平面上，則：

- (1) 藉由平移讓兩向量的起點重合，此時角  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) 稱為兩向量的夾角。
- (2) 當兩向量同向時，其夾角為  $0^\circ$ ；當兩向量反向時，其夾角為  $180^\circ$ 。
- (3) 若向量  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的夾角為  $\theta$ ，則規定  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的內積： $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 。其幾何意義： $(\vec{a} \text{ 的長度}) \times (\vec{b} \text{ 在 } \vec{a} \text{ 的投影分量})$ 。



#### 小提醒

- ① 夾角是銳角，內積為正值。
- ② 夾角是直角，內積為零。
- ③ 夾角是鈍角，內積為負值。



| $\theta$      | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$    | $90^\circ$ | $120^\circ$    | $135^\circ$           | $150^\circ$           | $180^\circ$ |
|---------------|-----------|----------------------|----------------------|---------------|------------|----------------|-----------------------|-----------------------|-------------|
| $\cos \theta$ | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0          | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1          |

#### 範例 9

#### 老師講解



#### 學生練習

已知  $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 3$ ，且  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的夾角為  $30^\circ$ ，試求  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的內積。

已知  $|\vec{a}| = 5$ ， $|\vec{b}| = 4$ ，且  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的夾角為  $45^\circ$ ，試求  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 。

## 焦點主題

10

## 內積的運算性質

- (1) 分配律： $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ 。
- (2) 交換律： $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ 。
- (3) 結合律： $r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b})$ ，其中  $r$  為實數。
- (4) 正定性： $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \geq 0$ 。



## 小提醒

 $\vec{a}$  與  $\vec{a}$  的內積 =  $\vec{a}$  的長度平方。

## 範例 10

## 老師講解



## 學生練習

已知  $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 5$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$ ，

試求：

(1)  $\vec{b} \cdot \vec{b}$  (2)  $\vec{b} \cdot (\vec{a} - 4\vec{b})$ 。

已知  $|\vec{a}| = 3$ ， $|\vec{b}| = 4$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ ，

試求：

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  (2)  $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$ 。

## 焦點主題

11

## 內積正定性的應用

$$|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = (\vec{a} \pm \vec{b}) \cdot (\vec{a} \pm \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \pm 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2。$$

## 範例 11

## 老師講解



## 學生練習

若  $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 3$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ ，試求  $|\vec{a} + \vec{b}|$ 。若  $|\vec{a}| = 3$ ， $|\vec{b}| = 5$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ ，試求  $|\vec{a} - \vec{b}|$ 。

## 焦點主題

12

## 內積的坐標計算

已知兩向量  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，則其內積  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ 。



## 觀念是非題

( ) 1. 設  $\vec{a} = (1, 3)$ ， $\vec{b} = (2, 1)$ ，則內積  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 3)$ 。

## 範例 12

## 老師講解



## 學生練習

已知  $A(1, 2)$ 、 $B(2, 5)$ 、 $C(3, 7)$  為坐標平面上三點，試求內積  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 。

已知  $A(4, 5)$ 、 $B(6, 9)$ 、 $C(7, 6)$  為坐標平面上三點，試求內積  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 。

## 焦點主題

13

## 向量的垂直

若兩非零向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  互相垂直（夾角  $90^\circ$ ），則其內積  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。



## 觀念是非題

( ) 2. 向量  $\vec{a} = (3, 2)$  與  $\vec{b} = (-2, 3)$  互相垂直。

## 範例 13

## 老師講解



## 學生練習

已知兩向量  $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (3, 2k)$  的夾角為  $90^\circ$ ，試求  $k$ 。

若  $\vec{a} = (3, 5)$  與  $\vec{b} = (k, 6)$  互相垂直，試求  $k$ 。



## 3-2 邁向統測之路

內積正定性的延伸應用

$$|m \vec{a} + n \vec{b}|^2 = (m \vec{a} + n \vec{b}) \cdot (m \vec{a} + n \vec{b}) = m^2 |\vec{a}|^2 + 2mn(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n^2 |\vec{b}|^2。$$

老師講解

已知  $|\vec{AB}| = 4$ 、 $|\vec{AC}| = 3$ ，又  $\vec{AB}$  與  $\vec{AC}$  的夾角為  $\frac{\pi}{3}$ ，則  $|\vec{AB} + 2\vec{AC}| = ?$

學生練習

已知  $\vec{u}$  的長度為 2， $\vec{v}$  的長度為 5，且  $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$  夾角為  $\frac{2\pi}{3}$ ，則  $3\vec{u} + \vec{v}$  的長度為何？

C

3

# 3-3

## 內積的應用



### 焦點主題

14

### 二階行列式

符號  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  稱為「二階行列式」，定義  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 。例  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$ 。

#### 範例 14

#### 老師講解



#### 學生練習

試求行列式  $\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ 。

試求行列式  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 11 & 7 \end{vmatrix}$ 。

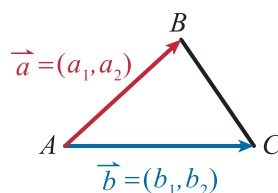
### 焦點主題

15

### 兩向量所圍的三角形面積

$\triangle ABC$  中，若  $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = (b_1, b_2)$ ，

則  $\triangle ABC$  的面積  $= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|$ 。



#### 範例 15

#### 老師講解



#### 學生練習

設平面上有  $A(1, 2)$ 、 $B(9, 4)$ 、 $C(8, 5)$  三點，試求  $\triangle ABC$  的面積。

設平面上有  $A(2, 3)$ 、 $B(11, 7)$ 、 $C(14, 11)$  三點，試求  $\triangle ABC$  的面積。

## 焦點主題

16

## 柯西不等式

設  $a$ 、 $b$  及  $x$ 、 $y$  均為實數，則  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ ，而等號成立必須  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$  ( $xy \neq 0$ )。

## 範例 16

老師講解



學生練習

已知  $x$ 、 $y$  為實數且  $x + 3y = 30$ ，試求  $x^2 + y^2$  的最小值。

已知  $x$ 、 $y$  為實數且  $3x + 4y = 10$ ，試求  $x^2 + y^2$  的最小值。

C

3

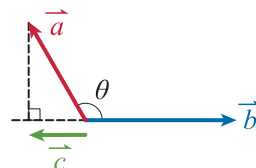
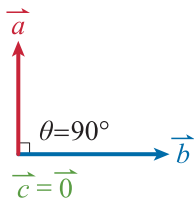
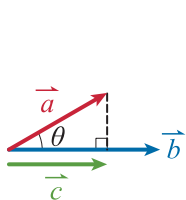
## 焦點主題

17

## 向量的正射影

如圖，若向量  $\vec{a}$  在向量  $\vec{b}$  上的正射影為向量  $\vec{c}$ ，則：

(1) 正射影： $\vec{c} = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$ 。 (2) 正射影長： $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\cos \theta| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ 。



## 範例 17

老師講解



學生練習

已知兩向量  $\vec{a} = (7, 4)$ ， $\vec{b} = (1, 2)$ ，  
試求  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上的正射影。

已知兩向量  $\vec{a} = (11, 2)$ ， $\vec{b} = (4, 3)$ ，  
試求  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上的正射影。



## 統測常考題

### 範例 1 向量的分解、係數積

已知平面上四點坐標為  $A(57, 23)$ 、 $B(7, -2)$ 、 $C(5, 12)$ 、 $D(x, y)$ ，若向量

$$\overrightarrow{AD} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}, \text{ 則 } x + y = \quad (\text{A}) -4 \quad (\text{B}) -2 \quad (\text{C}) 2 \quad (\text{D}) 4. \quad [\text{統測}]$$

#### ■ 解題小技巧

設  $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$  兩點，則  $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ，即  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ 。

$$\text{解：} \overrightarrow{AD} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \xrightarrow{\times 4} 4\overrightarrow{AD} = 7\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow 4(D - A) = 7(B - A) - 3(C - A)$$

$$\Rightarrow 4D = 7B - 3C = 7(7, -2) - 3(5, 12) = (49, -14) - (15, 36) = (34, -50)$$

$$\text{則 } 4D = (34, -50) \xrightarrow{\div 4} D = \left(\frac{17}{2}, -\frac{25}{2}\right)$$

$$\text{故 } x = \frac{17}{2}, y = -\frac{25}{2}, \text{ 因此 } x + y = \frac{17}{2} + \left(-\frac{25}{2}\right) = -4, \text{ 故選 (A)}$$

類題 1 設平面上三點  $A(x, y)$ 、 $B(-1, 4)$  及  $C(9, -1)$ ，若向量

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}, \text{ 則 } D \text{ 點坐標為何？} \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(\text{A}) (1, 5) \quad (\text{B}) (3, 2) \quad (\text{C}) (5, 1) \quad (\text{D}) (2, 3).$$

[統測]

類題 2 已知平面上  $A(1, 2)$ 、 $B(2, -1)$ 、 $C(a, b)$  三點共線，且  $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ ，

$$\text{則 } a + b = ? \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(\text{A}) 2 \quad (\text{B}) 3 \quad (\text{C}) 4 \quad (\text{D}) 5.$$

[統測]



## 統測常考題

### 範例 2 向量係數積的應用

設  $A(-13, -19)$ 、 $B(x, y)$  為平面上相異兩點。若向量  $\overrightarrow{AB}$  與向量  $\vec{u} = (5, 12)$  同方向且  $|\overrightarrow{AB}| = 26$ ，則  $3x - 4y =$  (A)  $-103$  (B)  $-29$  (C)  $29$  (D)  $103$ 。 [統測]

#### 解題小技巧

設向量  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ，則

- (1) 當  $r > 0$  時， $r\vec{a}$  與  $\vec{a}$  同方向。
- (2) 當  $r < 0$  時， $r\vec{a}$  與  $\vec{a}$  反方向。
- (3)  $r\vec{a}$  的長度是  $\vec{a}$  的  $|r|$  倍。

解： $\overrightarrow{AB} = B - A = (x, y) - (-13, -19) = (x + 13, y + 19)$

$$|\overrightarrow{AB}| = 26, |\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$\therefore 26 \div 13 = 2 \quad \therefore \overrightarrow{AB}$  的長度是  $\vec{u}$  的 2 倍

而  $\overrightarrow{AB}$  與  $\vec{u}$  同方向，則  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$

$$\text{故 } (x + 13, y + 19) = 2(5, 12) = (10, 24)$$

$$\Rightarrow x + 13 = 10, y + 19 = 24 \Rightarrow x = -3, y = 5$$

因此  $3x - 4y = 3 \times (-3) - 4 \times 5 = -29$ ，故選 (B)

**類題 1** 已知  $A(0, 1)$ 、 $B(-3, 5)$ 、 $C(a, b)$  為平面上三點。若向量  $\overrightarrow{AC}$  的長度為 10，且與向量  $\overrightarrow{AB}$  反向，則  $a$ 、 $b$  之值為何？\_\_\_\_\_

(A)  $a = 9, b = 0$  (B)  $a = -3, b = 5$  (C)  $a = 6, b = -7$

(D)  $a = -6, b = 9$ 。

[105 (B)]

**類題 2** 若向量  $\vec{a} = (x, y)$  與向量  $\vec{b} = (-5, 12)$  的方向相反，且  $|\vec{a}| = 52$ ，則  $x + y =$  ? \_\_\_\_\_

(A)  $-68$  (B)  $-28$  (C)  $28$  (D)  $68$ 。

[統測]

C

3



## 統測常考題

### 範例 3 內積分配律的應用

已知  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ , 若  $t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$  和  $\vec{a} - \vec{b}$  垂直, 其中  $t$  為實數, 則  $t =$  (A)  $\frac{7}{10}$  (B)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 。 [106 (C)]

#### ■ 解題小技巧

設兩非零向量  $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$  :

(1) 若  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , 則  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 。

(2) 正定性:  $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ 。

(3) 交換性:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ 。

解: 由內積的分配律展開  $(t\vec{a} + (1-t)\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$$\begin{aligned} &= t\vec{a} \cdot \vec{a} + t\vec{a} \cdot (-\vec{b}) + (1-t)\vec{b} \cdot \vec{a} + (1-t)\vec{b} \cdot (-\vec{b}) \\ &= t|\vec{a}|^2 - t(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (1-t)(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (1-t)|\vec{b}|^2 \\ &= t|\vec{a}|^2 + (1-2t)(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (1-t)|\vec{b}|^2 \\ &= t \times 1^2 + (1-2t) \times (-2) - (1-t) \times (\sqrt{5})^2 = 10t - 7 \\ \therefore & t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \text{ 和 } \vec{a} - \vec{b} \text{ 垂直} \\ \therefore & (t\vec{a} + (1-t)\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0, \text{ 因此 } 10t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

**類題 1** 設平面上兩向量  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的夾角為  $\theta$ , 若  $\cos \theta = \frac{33}{65}$ , 且  $|\vec{a}| = 5$ ,

$|\vec{b}| = 13$ , 則  $(4\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = ?$  \_\_\_\_\_

(A) -39 (B) 93 (C) 97 (D) 435。

[統測]

**類題 2** 設向量  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  之夾角為  $60^\circ$ , 且  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ , 則向量  $\vec{a}$  和  $(-\vec{a} + 2\vec{b})$  之夾角為何? \_\_\_\_\_

(A)  $30^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $90^\circ$  (D)  $120^\circ$ 。

[統測]



### 素養題 生活素養之向量合成

阿邦與小雉各拉一手把他們的兒子小盈提起，此時呈現平衡狀態，阿邦的拉力為 10 公斤重，小雉的拉力為 6 公斤重，且兩拉力的夾角是  $60^\circ$ ，則小盈的體重是多少公斤？ (A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10。

#### 解題小技巧

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|。$$

解：設阿邦與小雉的拉力分別是  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$

而小盈的重量是  $\vec{c}$

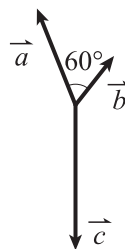
$$\text{則 } |\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 6$$

如圖呈現平衡狀態， $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\vec{c}|^2 &= |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 10^2 + 2 \times 10 \times 6 \times \cos 60^\circ + 6^2 = 196 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{196} = 14, \text{ 故小盈的體重為 } 14 \text{ 公斤}$$



**類題 1** 阿樊玩單槓運動，當他雙手握住單槓，身體自然垂吊靜止不動在單槓上，左手的拉力為 36 公斤重，右手的拉力為 48 公斤重，左右手張開的角度為  $90^\circ$ ，則阿樊的體重是多少公斤？\_\_\_\_\_

(A) 60 (B) 65 (C) 70 (D) 75。



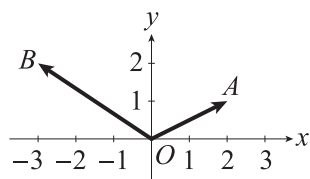


## 基礎題

### ● 向量及其基本運算

\_\_\_\_\_ 1. 已知  $A(3, 1)$ 、 $B(2, -3)$ 、 $C(7, -1)$ 、 $D(x, y)$  為坐標平面上的四個點。若  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$ ，則  $x + y =$  (A)  $-8$  (B)  $-4$  (C)  $5$  (D)  $6$ 。 [109 (B)]

\_\_\_\_\_ 2. 在坐標平面上，已知  $O$  為原點， $A(2, 1)$ 、 $B(-3, 2)$ ，如圖所示，若  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$ ，其中  $-1 \leq t \leq 1$ ，則所有滿足  $P$  點所形成的線段長為多少？ (A)  $3\sqrt{2}$  (B)  $2\sqrt{5}$  (C)  $3\sqrt{3}$  (D)  $4\sqrt{2}$ 。



[113 (C)]

### ● 向量的內積

\_\_\_\_\_ 3. 若  $\vec{a} = (2, -2\sqrt{3})$  及  $\vec{b} = (1, 0)$ ，則  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的夾角為何？ (A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$   
(C)  $\frac{2\pi}{3}$  (D)  $\frac{5\pi}{3}$ 。 [107 (A)]

\_\_\_\_\_ 4. 若  $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$  且  $\vec{a}$  垂直  $\vec{b}$ ，則  $|\vec{a} - 2\vec{b}| =$  (A)  $17$  (B)  $\sqrt{17}$  (C)  $3$   
(D)  $\sqrt{7}$ 。 [107 (A)]

\_\_\_\_\_ 5. 已知  $\vec{u} = (1, 1)$ ， $\vec{v} = (x + 4, y - 1)$  及  $\vec{w} = (2x, y)$ 。若  $\vec{u}$  與  $\vec{v}$  垂直且  $\vec{u}$  與  $\vec{w}$  平行，則下列何者正確？ (A)  $x = 1$  (B)  $y = -2$  (C)  $y = 1$  (D)  $x = -2$ 。 [108 (C)]

\_\_\_\_\_ 6. 設  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  兩向量的夾角為  $60^\circ$ ，且  $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 3$ ，則  $(3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) =$  (A)  $9$  (B)  $12$  (C)  $15$  (D)  $18$ 。 [109 (A)]

\_\_\_\_\_ 7. 已知  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  為平面上的三向量，且  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ ， $|\vec{a}| = 5$ ， $|\vec{b}| = 12$ ， $|\vec{c}| = 13$ 。若  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，則  $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$  (A)  $-30$  (B)  $-60$   
(C)  $-65$  (D)  $-156$ 。 [110 (C)]

\_\_\_\_\_ 8. 已知平面上兩向量  $\vec{a} = (2x + 1, -3)$ 、 $\vec{b} = (3, x - 2)$ ，滿足  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ ，則  $x = ?$  (A)  $3$  (B)  $1$  (C)  $-1$  (D)  $-3$ 。 [111 (C)]



9. 在坐標平面上，已知 $\triangle ABC$ 的三個頂點坐標為 $A(x, y)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(0, 0)$ ，線段 $\overline{AB}$ 的中點為 $D$ ，線段 $\overline{BC}$ 的中點為 $E$ ，線段 $\overline{AC}$ 的中點為 $F$ 。若內積 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ ，則下列何者為真？ (A)  $\triangle ABC$  為銳角三角形 (B)  $\triangle ABC$  為鈍角三角形 (C)  $\angle BCA$  為直角 (D)  $\angle BAC$  為直角。 [112 (C)]

## ● 內積的應用

10. 已知向量 $\vec{a} = (-6, 8)$ 且與 $\vec{b}$ 之夾角為 $60^\circ$ ，則向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長為何？ (A) 5 (B) 7 (C)  $5\sqrt{3}$  (D) 10。 [105 (C)]

11. 若二階行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 5$ ，且 $\begin{vmatrix} x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ，則 $x+y$ 之值為何？ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 5。 [107 (B)]

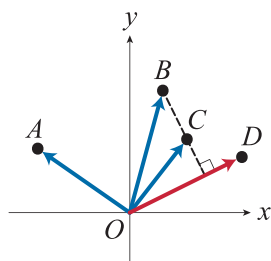
12. 設 $x, y$ 為實數，且 $x - 2y = 10$ 。試問 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 之最小值為何？ (A) 25 (B) 20 (C) 17 (D) 16。 [108 (B)]

13. 設平面上三點 $A(1, 1)$ 、 $B(5, -2)$ 、 $C(5, 2)$ ，且 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影為 $\overrightarrow{AD}$ ，若 $\overrightarrow{DC} = (x, y)$ ，則 $x + y =$  (A)  $\frac{34}{25}$  (B)  $\frac{89}{25}$  (C)  $\frac{104}{25}$  (D)  $\frac{112}{25}$ 。 [109 (C)]

## 進階題

14. 若 $A, B$ 為直線 $3x + 4y = 5$ 上相異的兩點，且向量 $\overrightarrow{AB} = (a, b)$ ，則 $6a + 8b - 5 =$  (A) -10 (B) -5 (C) 5 (D) 10。 [108 (A)]

15. 如圖所示，以 $O$ 為原點的直角坐標系上有四點，由左至右依序為 $A, B, C, D$ ，其中 $A$ 落在第二象限， $B, C, D$ 落在第一象限，且直線 $BC$ 與直線 $OD$ 的交點落在 $O, D$ 兩點之間。已知 $\angle AOD > 90^\circ$ ，且 $\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{OD}$ 的內積為0。若向量 $\overrightarrow{OD}$ 分別與向量 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 及 $\overrightarrow{OD}$ 求內積，依次得到 $a, b, c$ 及 $d$ 四個數值，則下列何者正確？ (A)  $b > a > c > d$  (B)  $b = c > d > a$  (C)  $a > b > c > d$  (D)  $d > b = c > a$ 。 [108 (B)]



16. 在坐標平面上，3個非零向量滿足 $2019\vec{a} + 5\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ 。若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $90^\circ$ ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{c}$ 的夾角 $\theta$ 滿足下列哪個式子？ (A)  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  (B)  $\theta = 90^\circ$  (C)  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  (D)  $\theta = 180^\circ$ 。 [108 (S)]



# 4 式的運算

## 式的運算

### 多項式的 四則運算

#### 多項式

多項式的加減

P.73

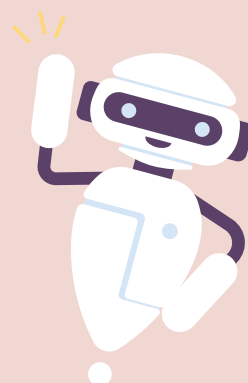
多項式乘法 — 乘法公式

P.74

多項式除法 — 除法原理  
— 綜合除法

P.76

P.77



## 餘式與 因式定理

餘式定理

P.79

因式定理

P.79

## 多項式 方程式

二次方程式的解 — 根與係數

P.82

虛數、複數 — 複數的運算 — 方程式的虛根

P.85

方程式的判別式

P.85

## 分式與根 式的運算

分式 — 部分分式 — 分式方程式

P.87

三次根式

P.88

# 多項式的四則運算



## 趨勢分析

本單元命題以「除法原理」、「餘因式定理」為主，都要流暢地正反向使用，另外「多項式除法」、「部分分式」、「共軛虛根」常有基本題目，務必要掌握住。

### 焦點主題

1

## 多項式的定義

(1) 形如  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  的式子稱為「多項式」，其中  $n$  為零或正整數。



### 小提醒

多項式的  $x$  不可以出現在分母、次方、根號內、絕對值內。

**例**  $\frac{1}{x}$ 、 $2^x$ 、 $\sqrt{x-3}$ 、 $|x-3|$  都不是多項式。

(2) 已知多項式  $f(x) = 5x^3 + x^2 - 3x + 8$ ，其中  $x$  的最高次方為 3（記作  $\deg f(x) = 3$ ），則  $f(x)$  為三次多項式。把  $f(x)$  的每一項用加號隔開看成  $f(x) = 5x^3 + x^2 + (-3x) + 8$ ，其中

① 三次項為  $5x^3$ ，其係數為 5

② 二次項為  $x^2$ ，其係數為 1

③ 一次項為  $-3x$ ，其係數為  $-3$

④ 常數項為 8

(3) 只有常數項的多項式稱為「常數多項式」，不是 0 的常數多項式為「零次多項式」，是 0 的常數多項式為「零多項式」。**例** 1 是零次多項式，0 是零多項式。

(4) 設  $f(x)$  是多項式，則  $f(0)$  表示常數項， $f(1)$  為所有項係數和。



### 觀念是非題

( ) 1. 多項式  $f(x) = x^3 + 5x^7 + 4x^2 + 6$  為三次多項式。

### 範例 1

#### 老師講解



#### 學生練習

已知  $(a-3)x^2 + (b-2)x + 1$  為一次多項式，且一次項的係數為 5，試求  $a$ 、 $b$  的值。

已知  $(a-4)x^2 + (b+5)x + 6$  為常數多項式，試求  $a$ 、 $b$  的值。

## 焦點主題

2

## 多項式的相等

- (1) 若兩多項式  $f(x)$ 、 $g(x)$  的次數相等且同次項係數也相等，記作  $f(x) = g(x)$ 。  
 (2) 若兩多項式  $f(x)$ 、 $g(x)$  相等，則對於任一實數  $a$ ，都使得  $f(a) = g(a)$  成立。

## 範例 2

老師講解



學生練習

設  $f(x) = ax^2 + (b-4)x + (3c+1)$ 、  
 $g(x) = 3x^2 + 5x + 13$ ，若  $f(x) = g(x)$ ，  
 試求  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的值。

設  $f(x) = (a+3)x + 2b - 7$ 、  
 $g(x) = 4x + 5$ ，若  $f(x) = g(x)$ ，  
 試求  $a$ 、 $b$  的值。

C

4

## 焦點主題

3

## 多項式的加法、減法

當多項式相加（減）時，就是把同次項的係數相加（減），即  $ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$ 。

**例**  $(5x^2 + 4x + 3) + (x^2 + 3x + 5) = (5+1)x^2 + (4+3)x + (3+5) = 6x^2 + 7x + 8$ 。



觀念是非題

( ) 2. 兩個二次多項式相加為二次多項式。

## 範例 3

老師講解



學生練習

設  $f(x) = 7x^3 + 4x + 5$ 、 $g(x) = 2x^3 + 3x - 1$ ，  
 試求：(1)  $f(x) + g(x)$  (2)  $f(x) - g(x)$ 。

設  $f(x) = 4x^2 + 5x - 3$ 、 $g(x) = x^2 - 3x + 6$ ，  
 試求：(1)  $f(x) + g(x)$  (2)  $f(x) - g(x)$ 。

## 焦點主題

## 4

## 多項式的乘法

依乘法的分配律展開，當兩項相乘時，係數相乘，次數相加。

$$(1) ax^m \times bx^n = (a \times b)x^{m+n}。$$

$$(2) (ax^m)^n = a^n x^{m \times n}。$$

例  $(5x^2 + 4) \times (3x + 2) = 5x^2 \times 3x + 5x^2 \times 2 + 4 \times 3x + 4 \times 2 = 15x^3 + 10x^2 + 12x + 8。$



## 觀念是非題

$$( ) 3. (x^3 + 1) \times (x^2 + 1) = x^5 + x^3 + x^2 + 1。$$

## 範例 4

## 老師講解



## 學生練習

試展開  $(6x^2 - 4x + 3) \times (2x - 1)。$

試展開  $(4x + 5) \times (x^2 - 2x + 3)。$

## 焦點主題

## 5

## 常用的乘法公式(I)

$$(1) \text{平方差} : (a+b)(a-b) = a^2 - b^2。$$

$$(2) \text{立方和(差)} : (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3, (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3。$$



## 觀念是非題

$$( ) 4. (2x - 3) \times (2x + 3) = 2x^2 - 9。$$

## 範例 5

## 老師講解



## 學生練習

試展開下列各式：

$$(1) (4x^3 + 7)(4x^3 - 7)$$

$$(2) (5x + 3)(25x^2 - 15x + 9)$$

試展開下列各式：

$$(1) (5x + 6)(5x - 6)$$

$$(2) (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$$

## 焦點主題

6

## 常用的乘法公式(II)

(1) 和(差)的平方公式： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ， $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。

(2) 和(差)的立方公式： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ， $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。

## 範例 6

老師講解



學生練習

試展開下列各式：

$$(1)(7x+5)^2 \quad (2)(3x+2)^3。$$

試展開下列各式：

$$(1)(3x+4)^2 \quad (2)(2x+1)^3。$$

C

4

## 焦點主題

7

## 多項式的除法（長除法、分離係數法）

(1) 若  $A$ 、 $B$  為多項式，則  $A$  除以  $B$  記作  $A \div B$ ，或唸作「 $A$  被  $B$  除」或「 $B$  除  $A$ 」。

(2) 已知  $A = 3x^3 + 10x^2 + 13x + 9$ 、 $B = x^2 + 2x + 1$ ，則  $A \div B$  的算法如下：

【長除法】

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} \text{---} 3x^3 \div x^2 = 3x \\ \text{---} 4x^2 \div x^2 = 4 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 \textcircled{3x} + \textcircled{4} \longleftarrow 4x^2 \div x^2 = 4 \\
 \textcircled{x^2} + 2x + 1 \overline{) 3x^3 + 10x^2 + 13x + 9} \\
 \underline{3x^3 + 6x^2 + 3x} \phantom{+ 9} \\
 \textcircled{4x^2} + 10x + 9 \\
 \underline{4x^2 + 8x + 4} \\
 2x + 5
 \end{array}
 \end{array}$$

商式為  $3x + 4$ ，餘式為  $2x + 5$ 

【分離係數法】

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} \text{---} 3 \div 1 = 3 \\ \text{---} 4 \div 1 = 4 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 \textcircled{3} + \textcircled{4} \longleftarrow 4 \div 1 = 4 \\
 \textcircled{1} + 2 + 1 \overline{) \textcircled{3} + 10 + 13 + 9} \\
 \underline{3 + 6 + 3} \\
 \textcircled{4} + 10 + 9 \\
 \underline{4 + 8 + 4} \\
 2 + 5
 \end{array}
 \end{array}$$

商式為  $3x + 4$ ，餘式為  $2x + 5$ 

(3) 多項式的除法運算必須計算到餘式等於 0（整除）或餘式的次數低於除式的次數。

(4) 當多項式有缺項時，缺項的係數以 0 來表示。例  $5x^3 + 4 = 5x^3 + 0x^2 + 0x + 4$ 。



觀念是非題

( ) 5. 任何多項式除以  $(x+3)$  的餘式一定為常數。

範例 7

老師講解



學生練習

試求  $8x^3 + 6x^2 + 9x + 5$  除以  $2x^2 + 1$  的商式、餘式。

試求  $2x^3 + 3x^2 + 8x + 5$  除以  $x^2 + x + 3$  的商式、餘式。

焦點主題

8

## 除法原理

若多項式  $A$  除以多項式  $B$  ( $\neq 0$ ) 的商式為  $Q$ 、餘式為  $R$ ，則  $A = B \times Q + R$ 。



小提醒

被除式 = 除式  $\times$  商式 + 餘式。



觀念是非題

( ) 6. 若多項式  $A$  除以多項式  $B$  ( $\neq 0$ ) 的商式為  $Q$ ，且餘式為  $R$ ，則

$$B = \frac{A-R}{Q}。$$

範例 8

老師講解



學生練習

已知多項式  $f(x)$  除以  $3x^2 + 4x + 5$  的商式為  $4x + 1$ ，餘式為  $6$ ，試求  $f(2)$ 。

已知多項式  $f(x)$  除以  $2x^2 + 5x + 1$  的商式為  $x + 2$ ，餘式為  $5x + 1$ ，試求  $f(3)$ 。

## 焦點主題

9

## 綜合除法

多項式  $4x^3 + 2x^2 + 2x + 3$  除以  $x - 1$  的綜合除法算式如右，

- (1) 第一列是被除式的係數： $4 \quad +2 \quad +2 \quad +3$ 。
- (2) 令除式  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ，把 1 放在算式的右側當作乘數。
- (3) 第一列與運算後的第二列相加得第三列（商式係數，餘式）。
- (4) 因此除法運算的結果：商式為  $4x^2 + 6x + 8$ ，餘式為 11。
- (5) 倘若多項式除以  $2(x - 1)$ ，則商式需再除以 2，餘不變。

$$\begin{array}{r|rrrr}
 4 & +2 & +2 & 3 & 1 \\
 & \downarrow + & \downarrow + & \downarrow + & \\
 & +4 & +6 & +8 & \\
 \hline
 4 & +6 & +8 & ,11 & \\
 & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \uparrow & \\
 & \text{商式係數} & & \text{餘式} & 
 \end{array}$$

## 範例 9

## 老師講解



## 學生練習

- (1) 求  $3x^3 + x^2 + 1$  除以  $x - 2$  的商式及餘式。
- (2) 求  $10x^3 + x^2 + 5x + 2$  除以  $2x - 1$  的商式及餘式。

- (1) 求  $2x^3 + x^2 + 4$  除以  $x - 3$  的商式及餘式。
- (2) 求  $12x^3 + 2x^2 + x + 7$  除以  $3x - 1$  的商式及餘式。

C

4

利用連續的綜合除法，可以將多項式以某個一次式的次方來組合。

**例** 令  $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$ ，以連續的綜合除法得  $(x-2)^3 + 7(x-2)^2 + 17(x-2) + 15$ 。

$$\begin{array}{r|l} 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & 2 \\ + & 2 & + & 6 & + & 14 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & + & 3 & + & 7 & 15 & \leftarrow \text{先除以 } x-2 \text{ 第一次，餘式為 } d \\ + & 2 & + & 10 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & + & 5 & 17 & \leftarrow \text{再除以 } x-2 \text{ 第二次，餘式為 } c \\ + & 2 & \end{array}$$

$$1, 7 \leftarrow \text{後除以 } x-2 \text{ 第三次，餘式為 } b$$

↑  
最後得  $a$

## 範例 10

## 老師講解



## 學生練習

已知  $x^3 - 5x^2 + 8x + 1$   
 $= a(x-3)^3 + b(x-3)^2 + c(x-3) + d$ ，  
 試求  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  的值。

已知  $2x^3 + x^2 + x + 1$   
 $= a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ ，  
 試求  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  的值。

## 餘式與因式定理



C

焦點主題

11

## 餘式定理

- (1) 多項式  $f(x)$  除以  $x - a$  的餘式為  $f(a)$ 。(令  $x - a = 0$  的  $x$  值，代入  $f(x)$  就是餘式)
- (2) 多項式  $f(x)$  除以  $ax - b$  的餘式為  $f\left(\frac{b}{a}\right)$ ，其中  $a \neq 0$ 。

範例 11

老師講解



學生練習

試求  $f(x) = x^5 + 3x^4 + 7$  除以  $x - 2$  的餘式。

試求  $f(x) = 3x^9 + 4x^8 + 5$  除以  $x - 1$  的餘式。

4

焦點主題

12

## 因式定理

- (1) 已知  $A$ 、 $B$ 、 $C$  為多項式，若  $A = B \times C$ ，則  $B$ 、 $C$  都是  $A$  的因式，也就是  $A$  可以被  $B$  或  $C$  整除。**例**  $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ ，則  $x^2 + 5x + 6$  有因式  $x + 2$ 、 $x + 3$ 。
- (2) 若  $x - a$  為多項式  $f(x)$  的因式，則  $f(a) = 0$ ，反之亦然。
- (3) 若  $ax - b$  為多項式  $f(x)$  的因式，則  $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ ，其中  $a \neq 0$ ，反之亦然。

範例 12

老師講解



學生練習

已知多項式  $f(x) = 5x^{13} + 3x^{10} - 8$ ，判斷  $x - 1$  是否為  $f(x)$  的因式。

已知多項式  $f(x) = x^3 + 5x^2 + x - 28$ ，判斷  $x - 2$  是否為  $f(x)$  的因式。



## 4-2 邁向統測之路

## 整係數一次因式檢驗法

已知多項式  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  的係數都是整數，若  $ax + b$  為  $f(x)$  的一次因式，其中  $a$ 、 $b$  為互質整數，則  $a$  為  $a_n$  的因數且  $b$  為  $a_0$  的因數。

**例** 因式分解  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 。

解： $\because$  最高次項係數 1 的因數為  $\pm 1$ ，而常數項 6 的因數為  $\pm 1$ 、 $\pm 2$ 、 $\pm 3$ 、 $\pm 6$ ，

$\therefore f(x)$  的可能因式為  $\pm(x \pm 1)$ 、 $\pm(x \pm 2)$ 、 $\pm(x \pm 3)$ 、 $\pm(x \pm 6)$ 。

而  $f(1) \neq 0$ ， $f(-1) = 0$ ， $f(2) \neq 0$ ， $f(-2) = 0$ ， $f(3) \neq 0$ ， $f(-3) = 0$ ， $f(6) \neq 0$ ，

$f(-6) \neq 0$ ，

由因式定理可知， $f(x)$  的因式為  $x + 1$ 、 $x + 2$ 、 $x + 3$ ，故  $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ 。

## 老師講解

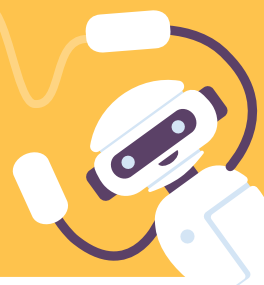
試因式分解  $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ 。

## 學生練習

試因式分解  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ 。

# 4-3

## 多項式方程式



C

焦點主題

13

### 一元二次方程式的解（因式分解、十字交乘法）

若方程式  $A(x) \times B(x) = 0$ ，則  $A(x) = 0$  或  $B(x) = 0$ 。例  $(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1$  或  $x = 2$ 。

| 因式分解                                                                                                 | 十字交乘法                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 解方程式： $x(x-3) + 4(x-3) = 0$ 。<br>解：方程式提出公因式 $x-3$<br>$(x-3)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 3$ 或 $x = -4$ 。 | 解方程式： $x^2 - 3x - 10 = 0$ 。<br>解：<br>$\begin{array}{cc} x & -5 \\ x & 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cc} x & -5 \\ x & 2 \end{array}} \right\} 2x + (-5x) = -3x$ $(x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 5$ 或 $x = -2$ |



觀念是非題

( ) 1. 方程式  $x(2x-1) = x(x+2)$ ，則  $2x-1 = x+2$ ，故  $x = 3$ 。

範例 13

老師講解



學生練習

試解下列的方程式：

(1)  $x^2 - 7x + 12 = 0$  (2)  $2x^2 + 5x + 3 = 0$

試解下列的方程式：

(1)  $x^2 - 9x + 14 = 0$  (2)  $3x^2 + 16x + 5 = 0$

## 焦點主題

14

## 一元二次方程式的公式解

一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的解： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。

## 範例 14

老師講解



學生練習

試解方程式  $2x^2 + 5x + 1 = 0$ 。

試解方程式  $3x^2 + 7x + 3 = 0$ 。

## 焦點主題

15

## 一元二次方程式的根與係數

若方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  有兩根  $\alpha$ 、 $\beta$ ，則兩根和  $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ 、兩根積  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ 。

## 範例 15

老師講解



學生練習

設  $\alpha$ 、 $\beta$  為  $2x^2 + 5x + 1 = 0$  的兩根，試求：

(1)  $(\alpha + 2)(\beta + 2)$  (2)  $\alpha^2 + \beta^2$ 。

設  $\alpha$ 、 $\beta$  為  $3x^2 + 7x + 3 = 0$  的兩根，試求：

(1)  $(\alpha + 1)(\beta + 1)$  (2)  $\alpha^2 + \beta^2$ 。

## 焦點主題

16

## 認識複數

為了讓方程式  $x^2 = -1$  有解，我們在實數之外，規定虛數  $i = \sqrt{-1}$  當作解，即  $i^2 = -1$ 。

(1) 當實數  $a > 0$  時，規定  $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ 。例  $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$ ， $\sqrt{-4} = \sqrt{4}i = 2i$ 。

(2)  $i$  的次方： $i^2 = -1$ ， $i^3 = -i$ ， $i^4 = 1$ ，且  $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$ 。

(3) 當  $n$  是正整數， $i^{4n} = 1$ ， $i^{4n+1} = i^1 = i$ ， $i^{4n+2} = i^2 = -1$ ， $i^{4n+3} = i^3 = -i$ 。（四次一循環）

(4) 形如  $a + bi$ （ $a$ 、 $b$  為實數）的數稱為「複數」，其中  $a$  為「實部」， $b$  為「虛部」。

(5) 若  $a + bi = c + di$ （ $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  為實數），則  $a = c$  且  $b = d$ 。（實部相等且虛部相等）

## 範例 16

老師講解



學生練習

若  $(a+3) + i = 5 + (b-7)i$ ，其中  $a$ 、 $b$  為實數，試求  $a$ 、 $b$  的值。

設  $z_1 = (a-1) + 2bi$ 、 $z_2 = 4 + 6i$ ，且  $a$ 、 $b$  為實數，若  $z_1 = z_2$ ，試求  $a$ 、 $b$  的值。

## 焦點主題

17

## 複數的加、減法

(1)  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ 。

(2)  $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ 。

## 範例 17

老師講解



學生練習

設  $z_1 = 3 + 4i$ 、 $z_2 = 1 - 2i$ ，試求：

(1)  $z_1 + z_2$  (2)  $z_1 - 3z_2$ 。

設  $z_1 = 2 - 3i$ 、 $z_2 = 1 + 4i$ ，試求：

(1)  $z_1 - z_2$  (2)  $2z_1 + z_2$ 。

C

4

## 焦點主題

18

## 複數的乘法

複數乘法依分配律展開： $(a+bi) \times (c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ 。

## 範例 18

老師講解



學生練習

試求  $(2+i) \times (3-4i)$ 。試求  $(3-2i) \times (1+4i)$ 。

## 焦點主題

19

## 共軛複數、複數的除法

- (1) 若複數  $z = a + bi$  ( $a, b$  為實數)，則  $a - bi$  稱為  $a + bi$  的「共軛複數」，記作  $\bar{z}$  (唸作  $z$  bar)，即  $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ 。例  $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$ ， $\overline{3 - 4i} = 3 + 4i$ 。
- (2) 設  $z = a + bi$  ( $a, b$  為實數)，則  $z \times \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$ 。
- (3) 複數的除法： $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi) \times (c-di)}{(c+di) \times (c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$ 。 ( $c^2 + d^2 \neq 0$ )

## 範例 19

老師講解



學生練習

試求  $\frac{13+11i}{3+i}$ 。(寫成  $a + bi$  的形式)試求  $\frac{5+10i}{4+3i}$ 。(寫成  $a + bi$  的形式)

## 焦點主題

20

## 一元二次方程式的虛根

設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  均為實數，一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的根為  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，

若  $b^2 - 4ac < 0$ ，則  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  是虛數，方程式有兩個虛根且互為共軛複數。



## 小提醒

若實係數方程式有虛根  $p + qi$  ( $p$ 、 $q$  為實數)，則必有另一根  $p - qi$ 。

C

## 範例 20

## 老師講解



## 學生練習

試解方程式  $x^2 + 2x + 5 = 0$ 。

試解方程式  $x^2 + 4x + 13 = 0$ 。

4

## 焦點主題

21

## 一元二次方程式的判別式

設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數，一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  之根的性質如下：

| 判別式  | $b^2 - 4ac > 0$ | $b^2 - 4ac = 0$ | $b^2 - 4ac < 0$ |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 根的性質 | 兩相異實根           | 兩相等實根           | 兩共軛虛根           |

## 範例 21

## 老師講解



## 學生練習

設  $k$  為實數，若方程式  $9x^2 + 6x + k = 0$  有相異實根，試求  $k$  的範圍。

設  $k$  為實數，若方程式  $x^2 + 8x + k = 0$  有共軛虛根，試求  $k$  的範圍。



## 4-3 邁向統測之路

實係數方程式的虛根共軛成對

若實係數方程式有虛根  $a + bi$  ( $a$ 、 $b$  為實數)，則必有另一根  $a - bi$ 。(兩根互為共軛)

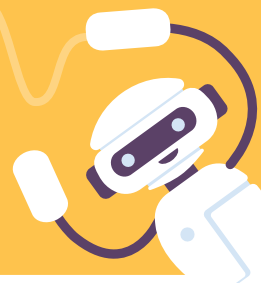
## 老師講解

設  $a$ 、 $b$  為實數且  $i = \sqrt{-1}$ ，若  $2 + \sqrt{3}i$  為  $2x^2 + ax + b = 0$  之一根，則  $a + b = ?$

## 學生練習

已知  $a$  和  $c$  為實數，若複數  $a + 2i$  為一元二次方程式  $x^2 + 2x + c = 0$  的一根，則  $c = ?$

## 分式與根式的運算



C

焦點主題

22

## 分式

設  $A(x)$ 、 $B(x)$  為多項式且  $B(x) \neq 0$ ，則形如  $\frac{A(x)}{B(x)}$  的式子稱為「分式」，其運算與分數一樣。

範例 22

老師講解



學生練習

試計算  $\frac{2}{x+3} + \frac{7}{x^2-9}$ 。

試計算  $\frac{3}{x+5} - \frac{2}{x^2-25}$ 。

4

焦點主題

23

## 分式方程式

解分式方程式時，先以乘法消去分母，再來求解，倘若解會使分母為 0（不合），須剔除。

範例 23

老師講解



學生練習

解方程式  $\frac{8}{x} + \frac{3x}{x+8} = 3$ 。

解方程式  $\frac{4}{x} + \frac{x}{x+6} = 1$ 。

## 焦點主題

24

## 部分分式分解

把一個真分式（分子次數小於分母次數）拆解成幾個真分式的和稱為「部分分式分解」。

**例**  $\frac{f(x)}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$  ,  $\frac{f(x)}{(x+a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$  。

## 範例 24

老師講解



學生練習

若  $\frac{4x-7}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$  ,

試求  $A$ 、 $B$ 。

若  $\frac{9x-22}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$  ,

試求  $A$ 、 $B$ 。

## 焦點主題

25

## 三次根式

(1) 若實數  $b$  滿足  $b^3 = a$ ，則  $b$  稱為「 $a$  的三次方根」，記作  $\sqrt[3]{a}$ 。例  $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$ 。

(2) 若  $a$ 、 $b$  為實數，則  $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$ ， $\sqrt[3]{a^2} = (\sqrt[3]{a})^2$ ， $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ 。

## 範例 25

老師講解



學生練習

試求  $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16})$ 。

試求  $(\sqrt[3]{2} + 3)(\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} + 9)$ 。



## 統測常考題

### 範例 1 除法原理與餘式定理

設一個次數不小於 3 之多項式  $f(x)$ ，以  $x+2$  除之餘  $-6$ ，以  $x-3$  除之餘  $9$ 。若以  $(x+2)(x-3)$  除  $f(x)$  所得餘式為  $r(x)$ ，則  $r(1)$  之值為 (A)  $-6$  (B)  $0$  (C)  $3$  (D)  $9$ 。 [統測]

#### 解題小技巧

- (1) 除法原理： $A \div B = Q \cdots R \Leftrightarrow A = B \times Q + R$ 。  
(2) 餘式定理：多項式  $f(x)$  除以  $x-a$  的餘式為  $f(a)$ 。

解：(1)  $\because f(x)$  以  $x+2$  除之餘  $-6$ ，以  $x-3$  除之餘  $9$

$$\therefore f(-2) = -6, f(3) = 9$$

(2) 設以  $(x+2)(x-3)$  除  $f(x)$  的餘式  $r(x) = ax + b$

而商式為  $Q(x)$ ，則  $f(x) = (x+2)(x-3)Q(x) + ax + b$

$$f(-2) = (-2+2)(-2-3)Q(-2) + a \times (-2) + b = -2a + b$$

$$f(3) = (3+2)(3-3)Q(3) + a \times 3 + b = 3a + b$$

$$\text{由 (1) 和 (2) 可知 } \begin{cases} -2a + b = -6 \cdots \textcircled{1} \\ 3a + b = 9 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 5a = 15 \Rightarrow a = 3$$

$$a = 3 \text{ 代入 } \textcircled{2} \Rightarrow 9 + b = 9 \Rightarrow b = 0$$

故  $r(x) = 3x$ ，因此  $r(1) = 3$

**類題 1** 已知  $f(x)$  為一實係數多項式，且  $f\left(\frac{3}{2}\right) = 27$ ， $f\left(-\frac{5}{3}\right) = 8$ 。若  $f(x)$  除以  $6x^2 + x - 15$  的餘式為  $ax + b$ ，則  $a + b =$  \_\_\_\_\_

(A) 4 (B) 6 (C) 18 (D) 24。

[統測]

**類題 2** 已知多項式  $f(x)$  除以  $x-1$  得到商式  $g(x)$  以及餘數  $3$ ，且  $g(x)$  除以  $x-2$  得到餘數  $6$ ，則  $f(x)$  除以  $x-2$  的餘數為何？ \_\_\_\_\_

(A) 6 (B) 9 (C) 15 (D) 21。

[108 (A)]



## 統測常考題

### 範例 2 因式定理

已知  $m$ 、 $n$  為實數， $Q(x)$  為二次多項式。若  $x^4 - mx^3 - x^2 - 5x + n = (x^2 - 3x + 2)Q(x)$ ，則  $2m + n =$  (A)  $-6$  (B)  $-2$  (C)  $4$  (D)  $8$ 。 [統測]

#### ■ 解題小技巧

設  $f(x)$  為多項式，

(1) 若  $(x-a)(x-b)$  為  $f(x)$  的因式，則  $x-a$  與  $x-b$  也是  $f(x)$  的因式。

(2) 若  $x-a$  為  $f(x)$  的因式，則  $f(a) = 0$ 。

解：令  $f(x) = x^4 - mx^3 - x^2 - 5x + n$

$$\because f(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) = (x-1)(x-2)Q(x)$$

$\therefore x-1$  與  $x-2$  均為  $f(x)$  的因式

由因式定理知

$$f(1) = 1 - m - 1 - 5 + n = 0 \Rightarrow -m + n = 5 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(2) = 16 - 8m - 4 - 10 + n = 0 \Rightarrow -8m + n = -2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 7m = 7 \Rightarrow m = 1$$

$$m = 1 \text{ 代入 } \textcircled{1} \Rightarrow -1 + n = 5 \Rightarrow n = 6$$

$$\text{故 } 2m + n = 2 \times 1 + 6 = 8$$

**類題 1** 若  $x^2 + x - 2$  為多項式  $x^3 + ax^2 + 3x + b + 1$  的因式（其中  $a$ 、 $b$  皆為實數），則  $a - b =$  \_\_\_\_\_

(A)  $17$  (B)  $3$  (C)  $-4$  (D)  $-15$ 。

[統測]

**類題 2** 若  $x^2 - 3x + 2$  是  $ax^3 + 3x^2 + bx - 2$  的因式，則  $a + 3b =$  \_\_\_\_\_

(A)  $-\frac{4}{3}$  (B)  $-1$  (C)  $-\frac{1}{3}$  (D)  $0$ 。

[統測]



範例 **3** 部分分式的分解

設  $\frac{5x^2+2x-4}{(x-1)(x^2+x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x-1}$ ，則  $A+B+C =$  (A)3 (B)4 (C)5  
(D)6。

[ 統測 ]

■ 解題小技巧

部分分式的分子係數求法：

利用同乘把等式的分母消去，再由等式兩邊恆等的關係，同次項的係數也要相等。

解：原式兩側同乘以  $(x-1)(x^2+x-1)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 5x^2 + 2x - 4 &= A(x^2 + x - 1) + (Bx + C)(x - 1) = (Ax^2 + Ax - A) + (Bx^2 - Bx + Cx - C) \\ &= (A+B)x^2 + (A-B+C)x + (-A-C) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \cdots \textcircled{1} \\ A-B+C=2 \cdots \textcircled{2} \\ -A-C=-4 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow 2A + C = 7 \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{由 } \textcircled{3} + \textcircled{4} \Rightarrow A = 3$$

$$A=3 \text{ 代入 } \textcircled{1} \Rightarrow 3+B=5 \Rightarrow B=2$$

$$A=3 \text{ 代入 } \textcircled{3} \Rightarrow -3-C=-4 \Rightarrow C=1$$

$$\text{故 } A+B+C=3+2+1=6$$

類題 1 已知  $A$ 、 $B$ 、 $C$  為常數，且對任意  $x$  均滿足

$$\frac{3x^2+9x-3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}, \text{ 則 } B = \underline{\hspace{2cm}}$$

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。

[ 105 (C) ]

類題 2 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數。若  $x \neq \frac{3}{2}$  時， $\frac{4x^2-6x-3}{(2x-3)^2} = a + \frac{b}{2x-3} + \frac{c}{(2x-3)^2}$

恆成立，則  $a+b+2c = \underline{\hspace{2cm}}$

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。

[ 統測 ]



## 基礎題

### ● 多項式的四則運算

- \_\_\_\_\_ 1. 設  $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x - 6 = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3$ ，則  $a - b - c - d =$   
(A)  $-28$  (B)  $-26$  (C)  $-22$  (D)  $-18$ 。 [109 (A)]
- \_\_\_\_\_ 2. 已知多項式  $f(x)$  除以  $(x-1)(x^2+x+1)$  所得之餘式為  $3x^2+5x-2$ ，則  $f(x)$  除以  $x^2+x+1$  所得之餘式為 (A)  $-4$  (B)  $2x-5$  (C)  $6$  (D)  $8x-5$ 。 [109 (C)]
- \_\_\_\_\_ 3. 若四次多項式  $ax^4 + bx^3 + 6x^2 + 5x + 2$  除以  $(x+1)^2$  所得之餘式為  $3x+4$ ，則  $a+b = ?$  (A)  $-12$  (B)  $-6$  (C)  $-4$  (D)  $-2$ 。 [111 (C)]
- \_\_\_\_\_ 4. 化簡  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} - 1\right)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1\right] = ?$  (A)  $6+5\sqrt{2}$  (B)  $8-5\sqrt{2}$   
(C)  $6-5\sqrt{2}$  (D)  $-8+5\sqrt{2}$ 。 [113 (C)]

### ● 餘式與因式定理

- \_\_\_\_\_ 5. 已知  $f(x)$  與  $g(x)$  均為多項式，若以  $x^2-3x+2$  除  $f(x)$  所得餘式為  $3x-4$ ，以  $x-1$  除  $g(x)$  所得餘式為  $5$ ，則以  $x-1$  除  $f(x)+g(x)$  所得餘式為 (A)  $-4$   
(B)  $-3$  (C)  $3$  (D)  $4$ 。 [108 (C)]
- \_\_\_\_\_ 6. 設  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$ ，則下列何者不為  $f(x)$  的因式？ (A)  $x+1$   
(B)  $x-2$  (C)  $2x+3$  (D)  $2x-1$ 。 [109 (A)]

### ● 多項式方程式

- \_\_\_\_\_ 7. 已知  $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，且  $\bar{z}$  為其共軛複數。若  $\frac{1+z}{1+\bar{z}} = a + bi$ ，其中  $a, b$  為實數，則點  $(a, b)$  在第幾象限？ (A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四。 [107 (C)]
- \_\_\_\_\_ 8. 已知  $\alpha, \beta$  及  $-3$  為方程式  $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$  的三個相異解。求  $|\alpha - \beta| =$   
(A)  $2\sqrt{3}$  (B)  $4$  (C)  $6$  (D)  $4\sqrt{5}$ 。 [109 (B)]
- \_\_\_\_\_ 9. 已知  $i = \sqrt{-1}$ ， $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2 = a + bi$ ，則  $a + b = ?$  (A)  $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$   
(B)  $-1$  (C)  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$  (D)  $1$ 。 [110 (C)]



\_\_\_\_\_ 10. 已知方程式  $4x^2 - 2x - 5 = 0$  的兩根為  $\alpha$ 、 $\beta$ ，則  $\alpha\beta = ?$

- (A)  $\frac{-5}{4}$  (B)  $\frac{-1}{2}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{5}{4}$ 。 [112 (C)]

\_\_\_\_\_ 11. 已知  $i = \sqrt{-1}$  且  $a$ 、 $b$  為實數。若  $a$ 、 $b + 2i$ 、 $-1 + ai$  為實係數三次方程式  $f(x) = 0$  之三根，則下列多項式何者可能為  $f(x)$ ？ (A)  $x^3 - x - 10$

- (B)  $x^3 + x + 10$  (C)  $x^3 - 4x^2 + 9x - 10$  (D)  $x^3 + 4x^2 + 9x + 10$ 。 [112 (C)]

## ● 分式與根式的運算

\_\_\_\_\_ 12. 若  $\frac{3x-1}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$ ，其中  $A$ 、 $B$  為實數，則下列何者正確？

- (A)  $A = 2$  (B)  $B = 1$  (C)  $A = -2$  (D)  $B = -1$ 。 [110 (C)]

\_\_\_\_\_ 13. 若  $\frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$ ，則  $A + B + C = ?$  (A) 1 (B) 5

- (C) 10 (D) 15。 [111 (C)]

\_\_\_\_\_ 14. 下列何者正確？

- (A) 對任意實數  $x$ ， $\sqrt[3]{x^3} = x$  (B) 對任意實數  $x$ ， $\sqrt{4+x^2} = 2+x$   
(C) 對任意實數  $x$ ， $\sqrt{x^2} = x$  (D) 對任意實數  $x$ ， $\sqrt[3]{8-x^3} = 2-x$ 。 [112 (C)]

\_\_\_\_\_ 15. 若  $\frac{5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$ ，其中  $A$ 、 $B$  為實數，則  $3A + 2B = ?$  (A)  $-7$

- (B)  $-6$  (C)  $-5$  (D)  $-4$ 。 [113 (C)]

## 進階題

\_\_\_\_\_ 16. 若一元二次方程式  $x^2 + (a-5)x + a + 3 = 0$  有兩正根，滿足  $a$  的實數解為  $m < a \leq n$ ，則  $m + n =$  (A)  $-4$  (B)  $-3$  (C)  $-2$  (D) 1。 [107 (C)]

\_\_\_\_\_ 17. 設  $\alpha$ 、 $\beta$  為方程式  $x^2 + 5x + k = 0$  之二根，已知多項式  $f(x) = 2x^2 + 7x + 5$  除以  $x - \alpha$ 、 $x - \beta$  所得的餘式分別為  $-1$ 、 $2$ ，則  $k =$  (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7。 [109 (C)]

\_\_\_\_\_ 18. 已知三次多項式  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  滿足  $f(1) = f(2) = f(-2) = 2$ ，且  $f(-1) = 8$ ，則下列何者正確？ (A)  $a = -1$  (B)  $b = 1$  (C)  $c = -4$  (D)  $d = 4$ 。 [110 (C)]



# 5 直線與圓

## 直線與圓

### 直線 方程式

斜率、斜角

三點共線

P.97

點斜式

直線其他型式

P.97

直線一般式

兩直線的平行垂直

P.100

直線的距離公式

P.102

## 圓方程式

圓標準式

P.104

圓一般式

圓一般式的判別式

P.105

圓參數式

P.106

## 圓與直線的關係

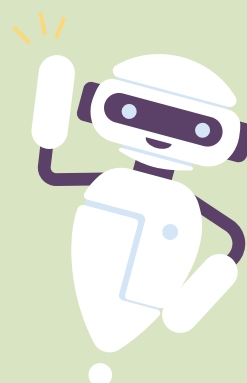
圓與直線

圓的弦長

P.107

圓的切線

P.108



# 直線方程式



## 趨勢分析

本單元的「直線方程式」是坐標平面的基本工具，時常與「圓」、「圓錐曲線」合併命題。而「圓」的問題最好搭配圖形來思考，並輔以圓的知識來解題。

### 焦點主題

1

## 直線的斜率、斜角

(1) 直線上任取相異的兩點  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ ，則此直線的斜率  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ 。

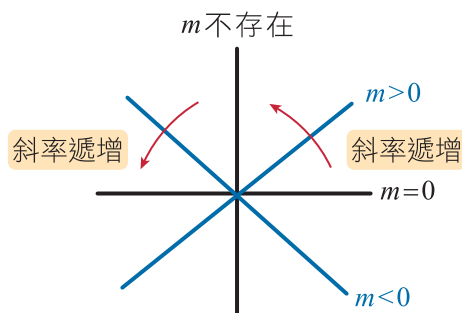
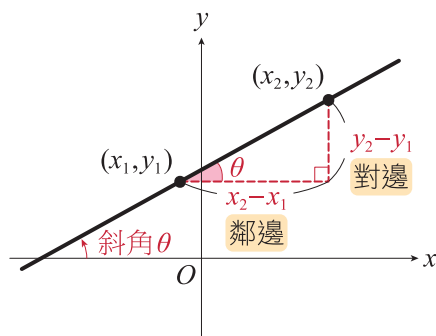


### 小提醒

水平線的斜率為 0，鉛垂線的斜率不存在。

(2) 直線與  $x$  軸正向所夾的最小正角為此直線的斜角，而  $0^\circ \leq \text{斜角} < 180^\circ$ 。

(3) 若直線的斜角為  $\theta$ ，則此直線的斜率  $m = \tan \theta$ 。



### 觀念是非題

( ) 1. 坐標平面上，斜率為正的直線是由左往右下降。

### 範例 1

#### 老師講解



#### 學生練習

設三點  $A(2, 1)$ 、 $B(4, 7)$ 、 $C(4, 9)$ ，試求：

(1) 直線  $AB$  的斜率 (2) 直線  $BC$  的斜率。

設三點  $A(1, 5)$ 、 $B(7, 8)$ 、 $C(10, 8)$ ，試求：

(1) 直線  $AB$  的斜率 (2) 直線  $BC$  的斜率。

## 焦點主題

2

## 三點共線

若三個相異點在同一條直線上（無法圍成三角形），則任取兩點來算的斜率都相等。



## 觀念是非題

( ) 2. 三點  $(0, 0)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(3, 6)$  位於同一條直線上。

## 範例 2

## 老師講解



## 學生練習

若  $A(0, 1)$ 、 $B(3, 7)$ 、 $C(8, k)$  三點共線，試求  $k$  值。

若  $P(1, 2)$ 、 $Q(3, 12)$ 、 $R(7, k)$  三點共線，試求  $k$  值。

C

5

## 焦點主題

3

## 直線方程式（點斜式）

通過點  $(x_0, y_0)$  且斜率  $m$  的直線方程式為  $y - y_0 = m(x - x_0)$ 。



## 觀念是非題

( ) 3. 直線  $y - 1 = 5(x - 4)$  的斜率為 5，且通過點  $(1, 4)$ 。

## 範例 3

## 老師講解



## 學生練習

試求通過點  $(1, 2)$ ，且斜率為 3 的直線方程式。（寫成  $ax + by + c = 0$ ）

試求通過點  $(2, 3)$ ，且斜率為 4 的直線方程式。（寫成  $ax + by + c = 0$ ）

## 焦點主題

4

## 直線方程式（兩點式）

- (1) 通過相異兩點  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_1, y_2)$  的直線方程式為  $x = x_1$ 。（鉛垂線上點的  $x$  坐標恆相等）  
 (2) 通過相異兩點  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_1)$  的直線方程式為  $y = y_1$ 。（水平線上點的  $y$  坐標恆相等）  
 (3) 其他求通過相異兩點的直線方程式：先以兩點來求直線斜率，再用點斜式。

## 範例 4

老師講解



學生練習

已知兩點  $A(3, 4)$ 、 $B(5, 9)$ ，試求：

- (1) 直線  $AB$  的斜率 (2) 直線  $AB$  方程式。

已知兩點  $P(1, 3)$ 、 $Q(7, 7)$ ，試求：

- (1) 直線  $PQ$  的斜率  
 (2) 直線  $PQ$  方程式。

## 焦點主題

5

## 直線的截距

- (1) 當直線與  $x$  軸恰好交於一點  $(a, 0)$  時，則  $a$  為該直線的  $x$  截距。  
 (2) 當直線與  $y$  軸恰好交於一點  $(0, b)$  時，則  $b$  為該直線的  $y$  截距。

## 範例 5

老師講解



學生練習

試填寫下列表格：

|     | 直線方程式            | $x$ 截距 | $y$ 截距 |
|-----|------------------|--------|--------|
| (1) | $2x + y = 4$     |        |        |
| (2) | $x - 3y - 6 = 0$ |        |        |

試填寫下列表格：

|     | 直線方程式              | $x$ 截距 | $y$ 截距 |
|-----|--------------------|--------|--------|
| (1) | $x - 4y = 12$      |        |        |
| (2) | $2x + 5y - 10 = 0$ |        |        |

## 焦點主題

6

## 直線方程式（斜截式）

斜率  $m$  且  $y$  截距為  $b$  的直線方程式為  $y = mx + b$ 。（斜截式的「截」是  $y$  截距，不是  $x$  截距）



## 小提醒

當條件是斜率  $m$ 、 $x$  截距為  $a$ ，即通過點  $(a, 0)$  時，要用點斜式來求直線。

## 範例 6

## 老師講解



## 學生練習

設直線的斜率為  $\frac{4}{3}$ ，其  $y$  截距為 2，

試求此直線的方程式。

（寫成  $ax + by + c = 0$ ）

設直線的斜率為  $\frac{7}{5}$ ，其  $y$  截距為  $-3$ ，

試求此直線的方程式。

（寫成  $ax + by + c = 0$ ）

C

5

## 焦點主題

7

## 直線方程式（截距式）

$x$  截距為  $a$ ， $y$  截距為  $b$  的直線方程式為  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ，其中  $a, b \neq 0$ 。



## 觀念是非題

( ) 4. 直線  $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$  的  $x$ 、 $y$  截距分別為 2、3。

## 範例 7

## 老師講解



## 學生練習

設直線的  $x$ 、 $y$  截距分別為  $-3$ 、 $5$ ，

試求此直線的方程式。

（寫成  $ax + by + c = 0$ ）

設直線的  $x$ 、 $y$  截距分別為  $7$ 、 $-2$ ，

試求此直線的方程式。

（寫成  $ax + by + c = 0$ ）

## 焦點主題

## 8

## 直線方程式（一般式）

(1) 設  $a, b \neq 0$ ，則方程式  $ax + by + c = 0$  的圖形是一條斜直線，斜率為  $-\frac{a}{b}$ 。

(2) 方程式  $x = c$  是鉛垂直線（沒有斜率），方程式  $y = c$  是水平直線（斜率為 0）。

## 範例 8

## 老師講解



## 學生練習

試填寫下列表格：

|     | 直線方程式             | 斜率 |
|-----|-------------------|----|
| (1) | $6x + 3y + 5 = 0$ |    |
| (2) | $x - 3y = 6$      |    |

試填寫下列表格：

|     | 直線方程式              | 斜率 |
|-----|--------------------|----|
| (1) | $2x + 10y - 1 = 0$ |    |
| (2) | $8x - 2y = 7$      |    |

## 焦點主題

## 9

## 兩直線的平行

若兩直線互相平行，則兩直線的斜率相等（傾斜程度相同）。



## 觀念是非題

( ) 5. 坐標平面上的矩形一定有兩邊所在的直線斜率相等。

## 範例 9

## 老師講解



## 學生練習

設直線  $L_1$  通過  $A(3, 1)$ 、 $B(k, 13)$  兩點，  
且與直線  $L_2: 3x - y + 1 = 0$  互相平行，  
試求  $k$  之值。

設直線  $L_1$  通過  $A(5, 3)$ 、 $B(k, 23)$  兩點，  
且與直線  $L_2: 4x - y + 2 = 0$  互相平行，  
試求  $k$  之值。

## 焦點主題

10

## 平行線的假設

平行於  $ax + by + c = 0$  的直線方程式可以假設為  $ax + by + k = 0$ 。（ $x$ 、 $y$  係數相同且  $k \neq c$ ）

## 範例 10

老師講解



學生練習

已知直線  $L: 3x + 4y + 5 = 0$ ，試求通過點  $(1, 2)$  且平行  $L$  的直線方程式。

已知直線  $L: 4x + 5y + 6 = 0$ ，試求通過點  $(3, 1)$  且平行  $L$  的直線方程式。

C

5

## 焦點主題

11

## 兩直線的垂直

若兩直線互相垂直（不是水平、鉛垂線），則斜率相乘為  $-1$ （互為相反倒數）。



## 小提醒

若兩個向量互相垂直，則其內積為 0。



## 觀念是非題

( ) 6. 兩直線  $x + 2y + 3 = 0$  與  $x - 2y + 3 = 0$  互相垂直。

## 範例 11

老師講解



學生練習

設直線  $L_1$  通過  $A(9, 5)$ 、 $B(1, k)$  兩點，且與直線  $L_2: 2x - 3y + 4 = 0$  互相垂直，試求  $k$  之值。

設直線  $L_1$  通過  $A(10, 1)$ 、 $B(4, k)$  兩點，且與直線  $L_2: 3x - 4y + 5 = 0$  互相垂直，試求  $k$  之值。

## 焦點主題

12

## 垂直線的假設

垂直於  $ax + by + c = 0$  的直線方程式可以假設為  $bx - ay + k = 0$ 。

## 範例 12

老師講解



學生練習

已知直線  $L: 4x + 5y + 6 = 0$ ，試求通過點  $(2, 1)$  且垂直  $L$  的直線方程式。

已知直線  $L: 5x + 6y + 7 = 0$ ，試求通過點  $(4, 3)$  且垂直  $L$  的直線方程式。

## 焦點主題

13

## 直線的距離公式

(1) 點  $(x_0, y_0)$  到直線  $ax + by + c = 0$  的距離  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

(2) 兩平行線  $ax + by + c_1 = 0$ 、 $ax + by + c_2 = 0$  ( $x$ 、 $y$  係數要相同) 的距離為  $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

## 範例 13

老師講解



學生練習

(1) 求點  $(2, 3)$  到直線  $5x + 12y + 6 = 0$  的距離。

(2) 兩直線  $8x + 6y + 47 = 0$ 、  
 $8x + 6y + 17 = 0$  的距離為何？

(1) 求點  $(7, 5)$  到直線  $3x + 4y + 9 = 0$  的距離。

(2) 兩直線  $12x + 5y + 76 = 0$ 、  
 $12x + 5y + 11 = 0$  的距離為何？



## 5-1 邁向統測之路

三角形各邊的特殊直線方程式

- (1) 中線方程式：邊的中點與對應頂點相連的直線。
- (2) 中垂線方程式：通過邊的中點，且與邊互相垂直的直線（兩者斜率相乘為  $-1$ ）。
- (3) 高的方程式：從邊的對應頂點，作直線垂直該邊（兩者斜率相乘為  $-1$ ）。

C

老師講解

學生練習

設  $A(4, 8)$ 、 $B(0, 6)$ 、 $C(2, 0)$  為  $\triangle ABC$  的三個頂點，試求：

- (1)  $\overline{BC}$  邊上的中線方程式。
- (2)  $\overline{BC}$  邊上的中垂線方程式。

已知  $\triangle ABC$  三頂點為  $A(3, 5)$ 、 $B(4, 0)$ 、 $C(0, 2)$ ，試求：

- (1)  $\overline{BC}$  邊上的中線方程式。
- (2)  $\overline{BC}$  邊上的中垂線方程式。

5

# 5-2

## 圓方程式



### 焦點主題

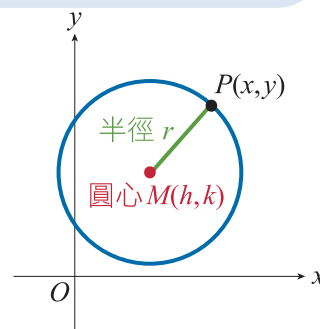
14

### 圓方程式（標準式）

(1) 平面上有一定點  $M$ ，所有到  $M$  點距離是  $r$  的點  $P$  ( $r > 0$ ) 所形成的圖形為「圓」，而  $M$ 、 $r$  分別稱為圓的「圓心」、「半徑」。

(2) 以點  $M(h, k)$  為圓心，半徑  $r$  的圓方程式為  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ 。

**例** 以點  $(1, 2)$  為圓心，半徑 3 的圓為  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$ 。



#### 範例 14

老師講解



學生練習

已知一圓的圓心  $Q(2, 3)$ ，且圓通過點  $P(7, 15)$ ，試求此圓的方程式。

已知一圓的圓心  $Q(4, 1)$ ，且圓通過點  $P(7, 5)$ ，試求此圓的方程式。

### 焦點主題

15

### 圓標準式的圓心、半徑

若圓方程式  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ，則其圓心為  $(h, k)$ 、半徑為  $r$ ，其中  $r > 0$ 。

#### 範例 15

老師講解



學生練習

試填寫下列表格：

|     | 圓方程式                         | 圓心 | 半徑 |
|-----|------------------------------|----|----|
| (1) | $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ |    |    |
| (2) | $x^2 + (y + 3)^2 = 100$      |    |    |

試填寫下列表格：

|     | 圓方程式                         | 圓心 | 半徑 |
|-----|------------------------------|----|----|
| (1) | $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 36$ |    |    |
| (2) | $(x + 7)^2 + y^2 = 64$       |    |    |

## 焦點主題

16

## 圓方程式（一般式）

- (1) 圓的標準式展開來可以寫成  $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，稱為圓的「一般式」。
- (2) 圓方程式  $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$  的圓心  $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$ 、半徑為  $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}$ 。



## 觀念是非題

- ( ) 1. 已知圓方程式  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ ，則方程式  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 14 = 0$  的圖形也是圓。

## 範例 16

## 老師講解



## 學生練習

試求圓  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$  的圓心、半徑。

試求圓  $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$  的圓心、半徑。

## 焦點主題

17

圓一般式的判別式 ( $d^2 + e^2 - 4f$ )

設方程式  $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，若  $d^2 + e^2 - 4f > 0$ ，則方程式的圖形為圓。

- (1) 當  $d^2 + e^2 - 4f = 0$ ，方程式的圖形為一點  $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$ 。
- (2) 當  $d^2 + e^2 - 4f < 0$ ，方程式無解，沒有圖形。



## 小提醒

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(d^2 + e^2 - 4f)。$$



## 觀念是非題

- ( ) 2. 方程式  $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 25 = 0$  的圖形為圓。

C

5

範例 17

老師講解



學生練習

若方程式  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + (k + 3) = 0$  的圖形是圓，試求  $k$  的範圍。

若方程式  $x^2 + y^2 + 4x + 2y + (3k - 1) = 0$  的圖形是圓，試求  $k$  的範圍。

焦點主題

18

## 圓方程式（參數式）

以點  $(h, k)$  為圓心、半徑  $r$  的圓，其參數式為  $\begin{cases} x = h + r \cos \theta \\ y = k + r \sin \theta \end{cases}$ ， $0 \leq \theta < 2\pi$ 。



小提醒

把  $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2$  與  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$  比較，

$$\text{則 } \begin{cases} x - h = r \cos \theta \\ y - k = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = h + r \cos \theta \\ y = k + r \sin \theta \end{cases}$$



觀念是非題

( ) 3. 圓： $\begin{cases} x = 1 + 3 \cos \theta \\ y = 2 + 3 \sin \theta \end{cases}$  在坐標平面上所圍的面積為  $9\pi$ 。

範例 18

老師講解



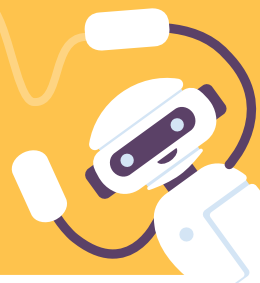
學生練習

試求圓  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 49$  的參數式。

試求圓  $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 25$  的參數式。

# 5-3

## 圓與直線的關係



C

焦點主題

19

### 圓與直線的關係

5

| (1) 交於兩點 (相割)                | (2) 恰交於一點 (相切)            | (3) 沒有交點 (相離)                |
|------------------------------|---------------------------|------------------------------|
| <p><math>d &lt; r</math></p> | <p><math>d = r</math></p> | <p><math>d &gt; r</math></p> |

範例 19

老師講解



學生練習

試問圓  $C : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$  與直線  $L : 5x + 12y + 10 = 0$  有幾個交點？

試問圓  $C : (x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 81$  與直線  $L : 3x + 4y + 11 = 0$  有幾個交點？

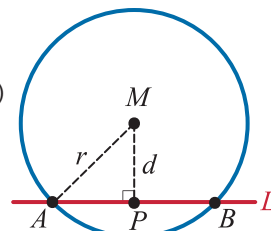
焦點主題

20

### 直線與圓交於兩點的弦長

當直線與圓有兩個交點  $A$ 、 $B$  時，弦  $\overline{AB}$  長的求法如下：

- (1) 先求圓心  $M$  到直線的距離  $d$  (弦心距)，則  $\overline{MP} = d$ 。(  $P$  是  $\overline{AB}$  的中點 )
- (2) 若圓半徑為  $r$ ，則畢氏定理 ( $r^2 = d^2 + \overline{AP}^2$ ) 可得  $\overline{AP}$ ，故  $\overline{AB} = 2\overline{AP}$ 。



## 範例 20

老師講解



學生練習

已知直線  $L: 4x + 3y + 5 = 0$  與圓  $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$  交於  $A、B$  兩點，試求  $\overline{AB}$  值。

已知直線  $L: 12x + 5y + 31 = 0$  與圓  $C: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 100$  交於  $A、B$  兩點，試求  $\overline{AB}$  值。

## 焦點主題

21

## 圓上一點的切線方程式 (I)

- (1) 當直線與圓相切時，圓心到切線的距離等於圓的半徑，圓心與切點的連線垂直於此切線。
- (2) 已知圓上有一點  $P(x_0, y_0)$ ，則  $P$  對圓只有一條切線，若圓方程式為  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，則通過  $P$  點的切線方程式為  $(x_0-h)(x-h) + (y_0-k)(y-k) = r^2$ 。

## 範例 21

老師講解



學生練習

已知點  $P(8, 14)$  在圓  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 169$  上，試求通過  $P$  點的切線方程式。

已知點  $P(6, 4)$  在圓  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$  上，試求通過  $P$  點的切線方程式。

## 焦點主題

22

## 圓上一點的切線方程式 (II)

已知圓上有一點  $P(x_0, y_0)$ ，則  $P$  對圓只有一條切線，若圓方程式為  $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，則通過  $P$  點的切線方程式為  $x_0x + y_0y + d\left(\frac{x_0+x}{2}\right) + e\left(\frac{y_0+y}{2}\right) + f = 0$ 。



小提醒

當點在圓外時，該點的切線不可用上述公式。

C



觀念是非題

- ( ) 1. 當點在圓上時，對圓會有一條切線；而當點在圓外時，對圓會有二條切線。

範例 22

老師講解



學生練習

已知點  $P(1, 2)$  在圓  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$  上，試求通過  $P$  點的切線方程式。

已知點  $P(2, 3)$  在圓  $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$  上，試求通過  $P$  點的切線方程式。

5



## 5-3 邁向統測之路

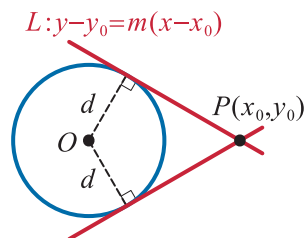
圓外一點的切線方程式

已知圓外有一點  $P(x_0, y_0)$ ，則  $P$  對圓必有兩條切線，假設  $y - y_0 = m(x - x_0)$ （點斜式， $m$  為斜率），寫出圓心到切線的距離關係式  $d$ ，則  $d =$  半徑可以求出切線斜率  $m$ 。（應有兩個值）



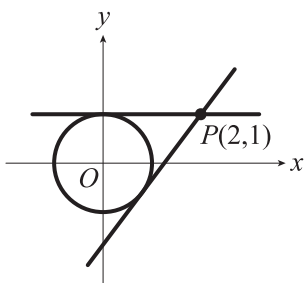
**小提醒**

倘若求得的斜率  $m$  只有一個，則另一條為過  $P$  的鉛垂線  $x = x_0$ （斜率不存在）。



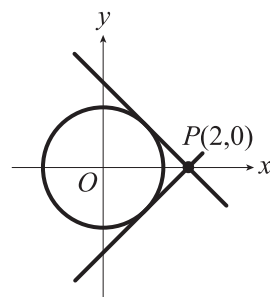
老師講解

如圖，已知過點  $P(2, 1)$  可作兩條直線與圓  $x^2 + y^2 = 1$  相切，試求這兩條切線的方程式？



學生練習

如圖，已知過點  $P(2, 0)$  可作兩條直線與圓  $x^2 + y^2 = 2$  相切，試求這兩條切線的方程式？





## 統測常考題

### 範例 1 直線方程式的綜合問題

已知  $P(-2, 4)$  與  $Q(2, -2)$  兩點，若直線  $L: ax + 3y + b = 0$  為  $\overline{PQ}$  的垂直平分線，則  $a + b$  之值為 (A)  $-\frac{15}{2}$  (B)  $-5$  (C)  $-1$  (D)  $\frac{3}{2}$ 。 [統測]

#### 解題小技巧

線段  $\overline{PQ}$  的垂直平分線（中垂線）：

(1) 通過  $\overline{PQ}$  的中點。

(2) 直線  $PQ$  與其垂直平分線互相垂直。

解：設  $\overline{PQ}$  的中點為  $M$ ，則  $M = \frac{P+Q}{2} = \frac{(-2, 4) + (2, -2)}{2} = \frac{(0, 2)}{2} = (0, 1)$

直線  $PQ$  的斜率  $m_{\overline{PQ}} = \frac{-2-4}{2-(-2)} = -\frac{3}{2}$

直線  $L: ax + 3y + b = 0$  的斜率  $m = -\frac{a}{3}$

$\because \overline{PQ} \perp L \quad \therefore m_{\overline{PQ}} \times m = -1$

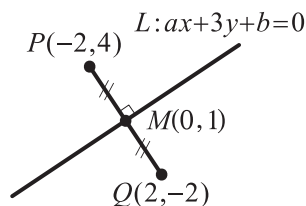
$\Rightarrow -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{a}{3}\right) = -1 \Rightarrow a = -2$

則直線  $L: -2x + 3y + b = 0$

$\because$  垂直平分線為  $L$  會通過  $M(0, 1)$

$\therefore -2 \times 0 + 3 \times 1 + b = 0 \Rightarrow b = -3$

故  $a + b = -2 + (-3) = -5$



**類題 1** 在坐標平面上，設  $a, b$  為實數，若  $A, B$  兩點的坐標分別為  $(a, 1), (b, 3)$ ，且線段  $\overline{AB}$  的垂直平分線為  $2x + y = 4$ ，則  $2a + b = ?$  \_\_\_\_\_

(A) 1 (B) 2 (C)  $-1$  (D)  $-2$ 。

[統測]

**類題 2** 若兩點  $A(0, 0), B(a, b)$  對稱於直線  $x - 2y = 5$ ，則  $a - b = ?$  \_\_\_\_\_  
(當兩點  $A, B$  對稱於直線  $L$  時，則直線  $L$  是線段  $\overline{AB}$  的垂直平分線)

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。

[統測]



## 統測常考題

### 範例 2 圓與直線的關係

設直線  $L: kx + 3y + 10 = 0$  與圓  $C: x^2 + y^2 = 4$  沒有交點，則常數  $k$  的範圍為  
(A)  $-4 < k < 4$  (B)  $-2 < k < 2$  (C)  $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$  (D)  $k < -\sqrt{2}$  或  $k > \sqrt{2}$ 。 [統測]

#### ■ 解題小技巧

設一圓的半徑是  $r$ ，其圓心到一直線的距離為  $d$ ，則

(1)  $d > r \Leftrightarrow$  圓與直線沒有交點。

(2)  $d = r \Leftrightarrow$  圓與直線相切。

(3)  $d < r \Leftrightarrow$  圓與直線有兩交點。

解：圓  $C$  的圓心為原點  $O(0, 0)$ ，半徑  $r = 2$

$$\text{圓心 } O \text{ 到直線 } L \text{ 的距離 } d = \frac{|k \times 0 + 3 \times 0 + 10|}{\sqrt{k^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{k^2 + 9}}$$

$\therefore$  圓  $C$  與直線  $L$  沒有交點  $\therefore d > r$

$$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt{k^2 + 9}} > 2 \quad \times \sqrt{k^2 + 9} \Rightarrow 10 > 2\sqrt{k^2 + 9} \quad \div 2 \Rightarrow \sqrt{k^2 + 9} < 5$$

$$\text{平方} \Rightarrow k^2 + 9 < 25 \Rightarrow k^2 < 16 \Rightarrow k^2 - 16 < 0$$

$$\Rightarrow (k + 4)(k - 4) < 0 \Rightarrow -4 < k < 4$$

類題 1 已知平面上有一圓  $C: (x - a)^2 + y^2 = 1$  與直線  $L: y = x$  相交於兩點，則  $a = ?$

(A)  $a = -2$  (B)  $a = 1$  (C)  $a = 2$  (D)  $a = 3$ 。

[統測]

類題 2 已知直線  $L: x + y = 1$  與圓  $C: x^2 + y^2 = a$  相切，求  $a =$  \_\_\_\_\_

(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 2。

[統測]



### 素養題 生活素養之圓方程式

湖面上有一大圓圈可用圓方程式  $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$  來表示，現在因水流關係而飄動，此大圓圈的圓心移到  $(3, -4)$  的位置且半徑縮減為原來的  $\frac{1}{2}$ ，則此

小圓圈可用下列哪一個方程式表示？ (A)  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 11 = 0$

(B)  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$  (C)  $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$

(D)  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$ 。

[統測]

#### 解題小技巧

圓  $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$  的圓心  $\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}\right)$ 、半徑為  $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}$ 。

解：大圓圈  $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$  的半徑

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-8)^2 - 4 \times (-11)} = \frac{1}{2}\sqrt{144} = 6$$

$\therefore$  大圓圈的半徑縮減為原來的  $\frac{1}{2}$

$\therefore$  小圓圈的半徑為  $\frac{1}{2}r = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

而小圓圈的圓心為  $(3, -4)$

故小圓圈的方程式為  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 3^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$$

#### 類題 1

設打水漂遊戲中石頭落入水中的漣漪是以圓的形式展現。若某人向河面擲出石頭的方向是沿著直線  $y = x - 1$  行進，下列哪一個圓方程式可為此漣漪的形式？\_\_\_\_\_

(A)  $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$  (B)  $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$

(C)  $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$  (D)  $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ 。

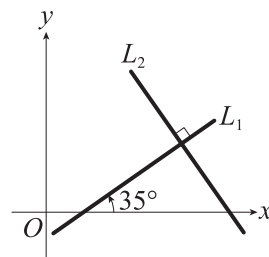
[106 (C)]



## 基礎題

### ● 直線方程式

- \_\_\_\_\_ 1. 若兩直線  $3x + 4y = 6$  與  $9x + 12y = k$  的距離為 2，則  $k$  的值可能為 (A)  $-48$   
(B)  $-12$  (C)  $10$  (D)  $24$ 。 [107 (C)]
- \_\_\_\_\_ 2. 已知坐標平面上三直線  $L_1: 3x + 3y = 2$ 、 $L_2: 2x - 3y = 3$ 、 $L_3: x - ay = -2$ ，  
且這三直線將平面分成六個區域，則  $a$  不會是下列哪一個值？ (A)  $\frac{3}{2}$   
(B)  $1$  (C)  $-1$  (D)  $-9$ 。 [108 (C)]
- \_\_\_\_\_ 3. 已知坐標平面上三直線  $L$ 、 $L_1$  與  $L_2$ ，若直線  $L$  為水平線， $L_1$  與  $L_2$  的斜率分別為  $\frac{2}{3}$  與  $-\frac{3}{2}$ ，且直線  $L$  被  $L_1$  與  $L_2$  所截出的線段長為 26，則此三直線所圍成的三角形面積為多少平方單位？ (A) 39 (B) 52 (C) 78 (D) 156。 [108 (C)]
- \_\_\_\_\_ 4. 已知  $a$ 、 $b$  為實數。若直線  $L_1: y = ax + b$  與  $L_2: y = bx + a$  相互垂直，且  $a^2 + b^2 = 50$ ，則  $L_1$  與  $L_2$  的交點與原點的距離為多少？ (A)  $4\sqrt{3}$  (B) 7  
(C)  $5\sqrt{2}$  (D)  $2\sqrt{13}$ 。 [110 (C)]
- \_\_\_\_\_ 5. 若  $A(1, 4)$ 、 $B(6, 2)$  所連接的線段  $\overline{AB}$  與直線  $L: x - y + 1 = 0$  相交於  $P$  點，  
則  $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = ?$  (A)  $\frac{2}{5}$  (B)  $\frac{3}{7}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{3}{5}$ 。 [111 (C)]
- \_\_\_\_\_ 6. 設直線  $L_1$  的斜角為  $35^\circ$ ，已知直線  $L_2$  與  $L_1$  相互垂直，  
如圖所示，則  $L_2$  的斜角為何？ (A)  $35^\circ$  (B)  $55^\circ$   
(C)  $125^\circ$  (D)  $155^\circ$ 。 [113 (C)]



### ● 圓方程式

- \_\_\_\_\_ 7. 若  $k$  為實數，且點  $P(1, k)$  為曲線  $kx^2 + y^2 + 2x - 4y + k - 1 = 0$  上之一點，則曲線之圖形為 (A) 圓 (B) 拋物線 (C) 橢圓 (D) 雙曲線。 [109 (C)]
- \_\_\_\_\_ 8. 若圓  $C$  與  $y$  軸相切，且圓心為拋物線  $y = x^2 + 4x + 5$  之頂點，則下列何者為圓  $C$  的方程式？ (A)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$  (B)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$   
(C)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$  (D)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 。 [110 (C)]



9. 若坐標平面上四點  $A(1, 2)$ 、 $B(2, -3)$ 、 $C(2, 7)$ 、 $D(a, -10)$  在同一圓上，則  $a = ?$  (A) 19 或 9 (B) 20 或 8 (C) 24 或 6 (D) 27 或 3。 [112 (C)]

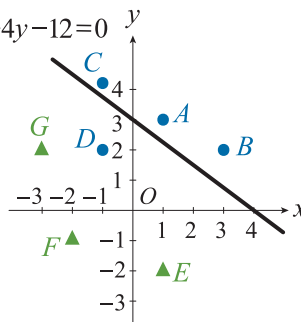
### ● 圓與直線的關係

10. 已知圓  $C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 。若點  $P$  是圓  $C$  上一點，則  $P$  到直線  $L: 3x + 4y + 8 = 0$  的最短距離為 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 [109 (B)]

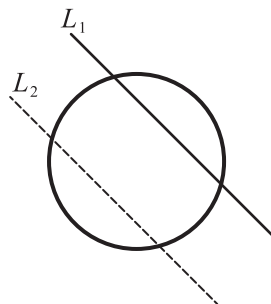
11. 已知直線  $L: y = x - 5$  與圓  $C$  相切，且圓  $C$  的圓心為  $(3, -4)$ ，則圓  $C$  的半徑為何？ (A)  $\sqrt{2}$  (B)  $2\sqrt{2}$  (C)  $3\sqrt{2}$  (D)  $4\sqrt{2}$ 。 [113 (C)]

### 進階題

12. 在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點  $A(1, 3)$ 、 $B(3, 2)$ 、 $C(-1, 4)$ 、 $D(-1, 2)$ 、 $E(1, -2)$ 、 $F(-2, -1)$ 、 $G(-3, 2)$  分屬 ●、▲ 二類，其中直線  $L: 3x + 4y - 12 = 0$  未能將它們正確分類，如圖所示。若將  $L$  平行移動至新的位置成為新直線  $L_1$  且能達到正確分類目的，則下列何者可為  $L_1$  的直線方程式？ (A)  $3x + 4y + 2 = 0$  (B)  $3x + 4y - 6 = 0$  (C)  $6x + 8y + 3 = 0$  (D)  $6x + 8y - 3 = 0$ 。 [109 (C)]



13. 已知圓  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$  與相異兩直線  $L_1: x + y + 1 = 0$  及  $L_2: ax + by + 10 = 0$  分別交於兩點，且  $L_1 \parallel L_2$ ，如圖所示。若此圓圓心到兩直線  $L_1$ 、 $L_2$  的距離相等，則  $a + b = ?$  (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10。 [111 (C)]

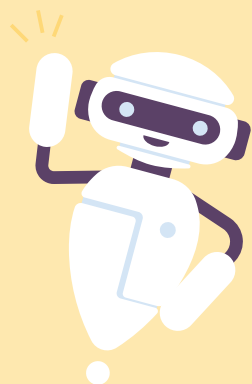




# 6

## 數列與級數

數列與級數



## 等差數列 與 等差級數

數列

級數 —  $\Sigma$  的運算

P.119

等差數列

等差中項

等差級數 —  $\Sigma$  的計算公式

P.121

## 等比數列 與 等比級數

等比數列

等比中項

等比級數 — 複利

P.124

P.125



# 等差數列與等差級數

## 趨勢分析

本單元命題以「等差數列」、「等比級數的和」為主，而生活素養題是常見的呈現方式，尤其是與等比級數有關的「複利」，要特別留意。

### 焦點主題

1

## 數列與級數

(1) 把一組數字由左而右排成一列稱為「數列」，而數列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  可以記作  $\langle a_n \rangle$ 。

**例** 數列  $\langle 2n \rangle = 2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \dots = 2, 4, 6, \dots$ ，是偶數數列。

(2) 數列中的數稱為「項」，第  $n$  個數為「第  $n$  項」，而第一項又稱為「首項」，最後一項為「末項」。**例** 質數數列  $2, 3, 5, 7, 11$  有五項，首項是 2，第二項是 3，末項是 11。

(3) 項數有限的數列稱為「有限數列」，而項數有無限多個的數列稱為「無窮數列」。

(4) 把數列的各項數字相加起來的式子稱為「級數」。**例**  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ 。

① 有限級數  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  的和，記作  $\sum_{k=1}^n a_k$ ，其中「 $\sum$ 」唸作 sigma。

② 無窮級數  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  的和，記作  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ，其中「 $\infty$ 」為無限大。

**例**  $\sum_{k=1}^5 (2k+3) = (2 \times 1 + 3) + (2 \times 2 + 3) + (2 \times 3 + 3) + (2 \times 4 + 3) + (2 \times 5 + 3)$



### 觀念是非題

( ) 1.  $\sum_{k=0}^4 (3k-1) = -1 + 2 + 5 + 8 + 11$ 。

### 範例 1

老師講解



學生練習

試求級數  $\sum_{k=1}^3 (4^k - 5k)$  的和。

試求級數  $\sum_{k=1}^4 (3^k + 2k)$  的和。

## 焦點主題

2

 $\Sigma$  的運算性質

$$(1) \sum_{k=1}^n c = nc, \quad \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k.$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k.$$

## 範例 2

## 老師講解



## 學生練習

已知  $\sum_{k=1}^{10} a_k = 11$ ,  $\sum_{k=1}^{10} b_k = 16$ , 試求

$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 3)$  的值。

已知  $\sum_{k=1}^{20} a_k = 30$ ,  $\sum_{k=1}^{20} b_k = 18$ , 試求

$\sum_{k=1}^{20} (2a_k - 3b_k + 4)$  的值。

C

6

## 焦點主題

3

## 等差數列

等差數列的任意相鄰兩項，後項減前項的差都相等，而後項減前項的差稱為「公差」。

**例** 等差數列 2, 12, 22, 32 的首項是 2，其公差為  $12 - 2 = 22 - 12 = 32 - 22 = 10$ 。



## 小提醒

等差數列中的後項 = 前項 + 公差。

## 範例 3

## 老師講解



## 學生練習

若等差數列  $\langle a_n \rangle$  的首項  $a_1 = 100$ ，公差是  $-20$ ，試寫出此數列的  $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ 。

若等差數列  $\langle a_n \rangle$  的首項  $a_1 = 20$ ，公差是 15，試寫出此數列的  $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ 。

## 焦點主題

4

## 等差數列的一般項 (I)

若等差數列  $\langle a_n \rangle$  的首項為  $a_1$ ，公差為  $d$ ，則第  $n$  項  $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。



## 觀念是非題

( ) 2. 設等差數列  $\langle a_n \rangle$  的首項  $a_1 = 3$ ，公差  $d = 2$ ，則  $a_{100} = 203$ 。

## 範例 4

老師講解



學生練習

等差數列  $\langle a_n \rangle = 10, 6, 2, \dots$ ，試求  $a_{101}$ 。

等差數列  $\langle a_n \rangle = 8, 15, 22, \dots$ ，試求  $a_{51}$ 。

## 焦點主題

5

## 等差數列的一般項 (II)

若等差數列  $\langle a_n \rangle$  的第  $m$  項為  $a_m$ ，公差為  $d$ ，則第  $n$  項  $a_n = a_m + (n-m)d$ 。

## 範例 5

老師講解



學生練習

若一等差數列的第 4 項為 10，第 8 項為 22，試求其公差及第 35 項。

已知一等差數列之第 10 項為 76，第 13 項為 100，試求其公差及第 20 項。

## 焦點主題

6

## 等差中項

若  $a, b, c$  為等差數列，則中間項  $b$  為「 $a, c$  的等差中項」，且  $b = \frac{a+c}{2}$ 。



## 小提醒

公差  $= b - a = c - b \Rightarrow 2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$ ， $b$  是  $a, c$  的平均數。



## 觀念是非題

( ) 3. 17 是 25 與 9 的等差中項。

C

## 範例 6

## 老師講解



## 學生練習

若  $2x + 1, 3x, 19$  是等差數列，試求  $x$  之值。

若  $4x$  與  $20$  的等差中項是  $5x + 4$ ，試求  $x$  之值。

6

## 焦點主題

7

## 等差級數 (I)

等差級數的首項  $a_1$ 、公差  $d$ ，共有  $n$  項，總和為  $\frac{n \times [2a_1 + (n-1)d]}{2}$ 。

## 範例 7

## 老師講解



## 學生練習

試求等差級數  $5 + 9 + 13 + \cdots$  到第 16 項的和。

試求等差級數  $2 + 7 + 12 + \cdots$  到第 10 項的和。

## 焦點主題

## 8

## 等差級數 (II)

等差級數的首項  $a_1$ 、末項  $a_n$ ，共有  $n$  項，總和為  $\frac{n \times (a_1 + a_n)}{2}$ 。 $(\frac{\text{項數} \times (\text{首項} + \text{末項})}{2})$

## 範例 8

老師講解



學生練習

試求等差級數  $7 + 9 + 11 + \cdots + 65$  的和。

試求等差級數  $2 + 5 + 8 + \cdots + 59$  的和。

## 焦點主題

## 9

常用的  $\Sigma$  計算公式

$$(1) \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}。$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。$$



小提醒

$\sum_{k=1}^n k$  是等差級數。

## 範例 9

老師講解



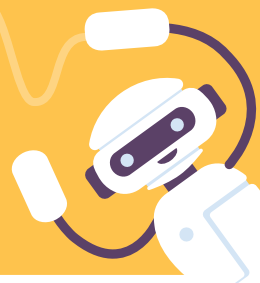
學生練習

試求  $\sum_{k=1}^{10} (3k + 4)$  的值。

試求  $\sum_{k=1}^{20} (5k - 6)$  的值。

# 6-2

## 等比數列與等比級數



C

焦點主題

10

### 等比數列

等比數列的任意相鄰兩項，後項與前項的比值都相等，而後項與前項的比值稱為「公比」。

**例** 等比數列 2, 20, 200, 2000 的首項是 2，其公比  $= \frac{20}{2} = \frac{200}{20} = \frac{2000}{200} = 10$ 。



小提醒

等比數列中的後項 = 前項  $\times$  公比。

範例 10

老師講解



學生練習

若等比數列  $\langle a_n \rangle$  的首項  $a_1 = 4$ ，公比是  $-5$ ，試寫出此數列的  $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ 。

若等比數列  $\langle a_n \rangle$  的首項  $a_1 = 10$ ，公比是 6，試寫出此數列的  $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ 。

6

焦點主題

11

### 等比數列的一般項 (I)

若等比數列  $\langle a_n \rangle$  的首項為  $a_1$ ，公比為  $r$ ，則第  $n$  項  $a_n = a_1 r^{n-1}$ 。



觀念是非題

( ) 1. 設等比數列  $\langle a_n \rangle$  的首項  $a_1 = 3$ ，公比為 2，則  $a_{100} = 3 \times 2^{100}$ 。

範例 11

老師講解



學生練習

等比數列  $\langle a_n \rangle = 8, -24, 72, \dots$ ，試求  $a_5$  之值。

等比數列  $\langle a_n \rangle = 5, 10, 20, \dots$ ，試求  $a_6$  之值。

## 焦點主題

12

## 等比數列的一般項 (II)

若等比數列  $\langle a_n \rangle$  的第  $m$  項為  $a_m$ ，公比為  $r$ ，則第  $n$  項  $a_n = a_m r^{n-m}$ 。

## 範例 12

老師講解



學生練習

有一等比數列都是正數，第 2 項為 4，第 6 項為 324，試求其公比及第 7 項。

有一等比的正數數列，第 11 項為 10，第 13 項為 160，試求其公比及第 16 項。

## 焦點主題

13

## 等比中項

若  $a, b, c$  為等比數列，則中間項  $b$  為「 $a, c$  的等比中項」，且  $b^2 = ac$ 。



小提醒

$$\text{公比} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac。$$



觀念是非題

( ) 2. 10 是 4 和 25 的等比中項。

## 範例 13

老師講解



學生練習

已知 18,  $2x$ , 2 是等比數列，試求  $x$  之值。

若 3 與 48 的等比中項是  $6x$ ，試求  $x$  之值。

## 焦點主題

14

## 等比級數

等比級數的首項  $a_1$ ，公比  $r \neq 1$ ，共有  $n$  項，總和為  $\frac{a_1 \times (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1 \times (1 - r^n)}{1 - r}$ 。

## 範例 14

老師講解



學生練習

有一等比數列的首項為 3，公比為  $-2$ ，試求此數列前 11 項的和。

求等比級數  $5 + 10 + 20 + \cdots$  到第 9 項的和。

C

6

## 焦點主題

15

## 複利

- (1) 複利會將本金所得利息併入本金中，並在下一期重複計息，有利滾利的效果。
- (2) 若本金為  $P$ 、每期利率為  $r$ ，則  $n$  期複利計息後的本利和為  $P \times (1 + r)^n$ 。

## 範例 15

老師講解



學生練習

小英把 10 萬元存入郵局定存，設年利率為  $0.8\%$ ，且每年計息一次，請問 10 年後的本利和是多少？

$$((1.08)^{10} \approx 2.15892, (1.008)^{10} \approx 1.08294)$$

小平向地下錢莊借了 1 萬元，利息約定是每天  $6\%$  且每天複利一次，他打算 30 天後才一併償還本金和利息，請問屆時他應償還多少？

$$((1.06)^{30} \approx 5.7435, (1.006)^{30} \approx 1.1966)$$



## 統測常考題

### 範例 1 等比數列的假設

設  $a, b, c, d, e, f$  六數成等比數列，且已知  $a + c + e = 168$ ， $b + d + f = 84$ ，則  $d$  之值為 (A)6 (B)9 (C)16 (D)32。

[統測]

#### ■ 解題小技巧

若等比數列的首項是  $a$ ，公比是  $r$ ，則接下來各項為  $ar, ar^2, ar^3, \dots$ 。

解：設等比數列  $a, b, c, d, e, f$  的公比為  $r$ ，

則  $b = ar, c = ar^2, d = ar^3, e = ar^4, f = ar^5$

$$(1) a + c + e = 168 \Rightarrow a + ar^2 + ar^4 = 168 \Rightarrow a(1 + r^2 + r^4) = 168 \cdots \textcircled{1}$$

$$(2) b + d + f = 84 \Rightarrow ar + ar^3 + ar^5 = 84 \Rightarrow ar(1 + r^2 + r^4) = 84 \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \Rightarrow \frac{ar(1 + r^2 + r^4)}{a(1 + r^2 + r^4)} = \frac{84}{168} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} \text{ 代入 } \textcircled{1} \Rightarrow a \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) = 168 \Rightarrow a = 128$$

$$\text{所求 } d = ar^3 = 128 \times \left( \frac{1}{2} \right)^3 = 16, \text{ 故選 (C)}$$

類題 1 已知四個正數  $a, b, c, d$  為一等比數列，若  $a + b = 20$ ，

$a + b + c + d = 65$ ，則  $a = ?$  \_\_\_\_\_

(A)5 (B)6 (C)7 (D)8。

[統測]

類題 2 設七個實數  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  成等比數列，公比為  $r$ 。若  $a_1 + a_2 = 2$

且  $a_6 + a_7 = 486$ ，則  $r = ?$  \_\_\_\_\_

(A)3 (B)4 (C)6 (D)9。

[統測]



### 素養題 等差數列之生活素養

某棒球投手自 4 月 1 日開始每天練投，他每日投球數為等差數列。若 4 月 5 日投球數為 41 個，4 月 13 日為 73 個，則他 4 月份有幾天投球數超過 100 個？  
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13。 [109 (C)]

#### 解題小技巧

設  $\langle a_n \rangle$  為等差數列，公差為  $d$ ，則  $a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$ 。

解：設 4 月  $n$  日的投球數是  $a_n$  個，則  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$  為等差數列

設此等差數列的公差為  $d$

由題意知： $a_5 = 41$ ， $a_{13} = 73$

則  $a_{13} = a_5 + (13-5) \times d \Rightarrow 73 = 41 + 8d \Rightarrow 8d = 32 \Rightarrow d = 4$

第  $k$  項  $a_k = a_{13} + (k-13) \times d = 73 + (k-13) \times 4 = 4k + 21$

若  $a_k > 100$ ，則  $4k + 21 > 100 \Rightarrow 4k > 79 \Rightarrow k > \frac{79}{4} = 19.75$ ，取  $k = 20$

故 4 月 20 日起，每日的投球數超過 100 個

從 4 月 20 日到 4 月 30 日共有 11 天

因此 4 月份有 11 天投球數超過 100 個，故選 (B)

**類題 1** 某部以「尋寶」為主題的電影中，男主角進到第二道關卡時看到了一扇巨大的鐵門，門邊有 100 個按鈕，每個按鈕都有一個數字，分別是從 1 到 100。牆上有一個過關提示，上面印著「有一個等差數列，其第 11 項和第 16 項分別為 31 和 56，按下該數列第 20 項數字的按鈕，鐵門就會打開」，則按下哪一個數字的按鈕就會開門？\_\_\_\_\_

(A) 65 (B) 76 (C) 83 (D) 99。

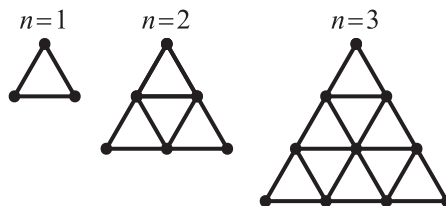
[109 (B)]



## 基礎題

### ● 等差數列與等差級數

- \_\_\_\_\_ 1. 今有一等差數列  $\langle a_n \rangle$ ，若前二項為  $a_1 = 3$ 、 $a_2 = 2$ ，則此數列前 16 項之和  $S_{16} =$  (A)  $-80$  (B)  $-72$  (C)  $-64$  (D)  $-56$ 。 [106 (A)]
- \_\_\_\_\_ 2. 若等差級數  $\sum_{k=10}^{1018} a_k$  之值為 2018，則  $a_{514} =$  (A) 2018 (B) 1008 (C) 514 (D) 2。 [107 (A)]
- \_\_\_\_\_ 3. 若一等差數列的第 10 項為首項的 4 倍，且首項不為 0，則該數列的第 6 項為第 2 項的幾倍？ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。 [107 (B)]
- \_\_\_\_\_ 4. 安安為準備在 5 月舉行的路跑活動，4 月 1 日當天從 11 公里開始練習，爾後每日練習都比前一日多 1 公里，意思是 4 月 2 日跑了 12 公里，依此類推，則從 4 月 1 日至 4 月 10 日的十天中，安安總共跑了多少公里？ (A) 135 (B) 155 (C) 176 (D) 198。 [107 (S)]
- \_\_\_\_\_ 5. 若  $a = \sum_{m=1}^7 \frac{m-2}{2m-1}$ 、 $b = \sum_{k=0}^6 \frac{k-1}{2k+1}$ 、 $c = \sum_{i=3}^8 \frac{i-4}{2i-5}$ ，則下列敘述何者正確？ (A)  $b > a > c$  (B)  $c > a > b$  (C)  $c > a = b$  (D)  $a = b > c$ 。 [110 (C)]
- \_\_\_\_\_ 6. 小美想用火柴棒排成一個  $n$  層正三角形金字塔，例如當  $n = 1, 2, 3$  時，如圖所示。若依此規則，則排出一個 50 層金字塔恰需要多少根火柴棒？ (A) 3675 (B) 3825 (C) 7500 (D) 7803。 [113 (C)]



### ● 等比數列與等比級數

- \_\_\_\_\_ 7. 已知  $a, b$  為實數，若  $a, 2, 3, b$  為一等比數列，則  $a + b =$  (A) 4 (B)  $\frac{31}{6}$  (C)  $\frac{35}{6}$  (D) 7。 [106 (A)]
- \_\_\_\_\_ 8. 若  $a$  為正整數，且  $1, a, 2a$  為等比數列，則  $a^2 + 1 =$  (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 10。 [106 (B)]



- \_\_\_\_\_ 9. 若等比數列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$  的首項  $a_1 = 2$ ，且前四項的乘積  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 2^{16}$ ，則後四項的乘積  $a_5 \times a_6 \times a_7 \times a_8 =$  (A)  $2^{32}$  (B)  $2^{48}$  (C)  $2^{64}$  (D)  $2^{80}$ 。  
[107 (A)]
- \_\_\_\_\_ 10.  $\sum_{n=1}^{10} (2^n + 3n + 2) =$  (A) 1268 (B) 1298 (C) 2017 (D) 2231。  
[107 (C)]
- \_\_\_\_\_ 11. 設  $\langle a_k \rangle$  為公比  $-2$  的等比數列，已知  $a_1 a_3 = 12$ ，則  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 =$   
(A) 219 (B) 237 (C) 246 (D) 255。  
[108 (A)]
- \_\_\_\_\_ 12. 已知  $a, a+3, 10$  三數成等差數列且  $b, -15, 60$  三數成等比數列，則  $ab$  之值為 (A)  $\frac{15}{16}$  (B) 15 (C) 19 (D)  $\frac{305}{16}$ 。  
[108 (S)]
- \_\_\_\_\_ 13. 若在 1 和 2 之間插入二個數，使其成等比數列，則這二個數的乘積為 (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8。  
[109 (A)]
- \_\_\_\_\_ 14. 已知等比數列  $\langle a_k \rangle$  的首項  $a_1 = 2$ ，公比  $r = 3$ 。若前  $n$  項和大於 2022，則滿足條件的最小正整數  $n = ?$  (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11。  
[111 (C)]
- \_\_\_\_\_ 15. 晴晴在 2018 年初以一股 50 元買進某一檔股票，在 2023 年初時該股經配股、配息還原後，可以還原股價為一股 60 元。若此股價 60 元可視為以每年固定年利率  $r$  進行複利計算，則  $r$  可以從下列哪個算式計算求得？  
(A)  $50 \times r^5 = 60$  (B)  $50 \times (1+r)^5 = 60$  (C)  $50 \times (r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5) = 60$   
(D)  $50 \times [(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + (1+r)^4 + (1+r)^5] = 60$ 。  
[112 (C)]

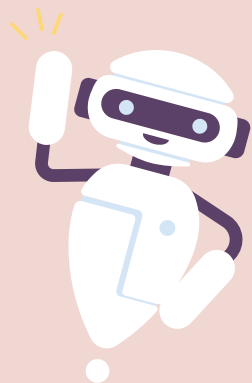
### 進階題

- \_\_\_\_\_ 16. 設  $a, b, c$  三數成等比數列，且滿足  $a + b + c = 9$  及  $a^2 + b^2 + c^2 = 189$ ，則等比中項  $b =$  (A)  $-6$  (B)  $-2$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D) 6。  
[106 (C)]
- \_\_\_\_\_ 17. 已知  $\{a_n\}$  為等差數列且滿足  $a_1 > 0, a_5 = 3a_{12}$ 。則當  $n$  為多少時， $a_n$  開始為負數？ (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17。  
[108 (C)]



# 7 排列組合

排列組合



# 排列

## 計數原理

乘法原理

P.133

加法原理 — 取捨原理

P.134

## 相異物的排列

排列的變化問題

P.136

## 含有相同物的排列

棋盤道路的捷徑數

P.139

## 重複排列

P.139

# 組合

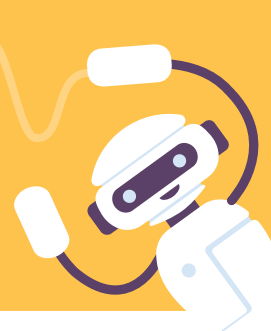
## 相異物的組合

幾何上的組合

P.142

分步驟的組合

P.143



# 排列

## 趨勢分析

本單元命題以相異物的「排列」、「組合」為主，尤其是分步驟的問題（乘法原理）、分類的問題（加法原理），而其差異可善用範例來輔助分辨，以免觀念混淆。

### 焦點主題

## 1

## 計數原理

- (1) 列舉：透過逐一的列出而導致結論的方法。當方法數不會太多時，可以使用這種方法。
- (2) 樹狀圖：利用樹枝形狀的圖形，列舉一連串事件發生時所有可能情況的方法。

### 範例 1

#### 老師講解



#### 學生練習

試回答下列問題：

- (1) 把 200 元紙鈔兌換成 50 元硬幣或 10 元硬幣的組合，共有多少種兌換法？
- (2) 甲、乙比賽猜拳，每次比賽沒有平手，規定先勝 3 次者為贏家。目前甲是 2 勝 0 敗，試問往後會有多少種比賽情形可以決定贏家？

試回答下列問題：

- (1) 將 50 元硬幣兌換成 10 元硬幣或 1 元硬幣之組合，共有多少種兌換法？
- (2) 甲、乙比賽 100 公尺短跑，每次比賽沒有平手，規定先勝兩次者取得校外的參賽權，試問有多少種比賽情形可以決定參賽權？

## 焦點主題

## 2

## 加法原理

若完成一件事的方法可分成若干類（任兩類不重複）：第 1 類有  $n_1$  種方法、第 2 類有  $n_2$  種方法、 $\cdots$ 、第  $k$  類有  $n_k$  種方法，則完成這件事的方法數為  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 。

**例** 童軍社有 8 位男生、4 位女生來開會，現在選 1 人去買冰，則選 1 人買冰可以分成男、女兩類，方法數為  $8 + 4 = 12$  種。



## 小提醒

分類就是用加法原理。

## 範例 2

## 老師講解



## 學生練習

北海道的札幌到釧路可以乘坐飛機、火車及長途巴士，明天的飛機有 7 班，火車有 5 班，長途巴士有 4 班，則明天從札幌到釧路共有多少種班次可選擇？

飲料店販售的飲料有茶類 12 種，咖啡類 5 種，冰沙類 4 種，果茶類 3 種。阿良現在要買一杯飲料來喝，試問有多少種不同的選擇？

## 焦點主題

## 3

## 乘法原理

若完成一件事可以依序分成  $k$  個步驟（各步驟中的方法可互相搭配）：第 1 步有  $n_1$  種方法、第 2 步有  $n_2$  種方法、 $\cdots$ 、第  $k$  步有  $n_k$  種方法，則完成這件事的方法數為  $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ 。

**例** 臺北到臺中有 2 條路，臺中到臺南有 3 條路，今欲從臺北到臺中再到臺南，可以分成兩個步驟（臺北到臺中，臺中到臺南），第 1 步的任一路線配上第 2 步的任一路線，都是可能的路線，故臺北到臺中再到臺南有  $2 \times 3 = 6$  種路線。



## 小提醒

分步驟就是乘法原理。

## 範例 3

## 老師講解



## 學生練習

你家牛排館提供的沙拉有 2 種，主餐有 4 種，附湯有 3 種，水果有 4 種。現在阿邦對沙拉、主餐、附湯以及水果各選一種，有幾種點餐的方式？

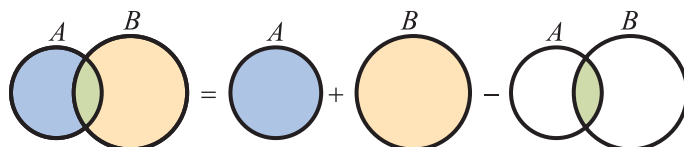
小雉擁有 3 本不同的小說、5 本不同的畫冊和 6 本不同的漫畫，她從小說、畫冊及漫畫各挑選 1 本來參與義賣，有幾種可能？

## 焦點主題

4

## 取捨原理（排容原理）

如圖，已知被計數的物品可以分成  $A$ 、 $B$  兩類（可能有重複），則  
 $(A \text{ 類或 } B \text{ 類的個數}) = (A \text{ 類的個數}) + (B \text{ 類的個數}) - (\text{既是 } A \text{ 類也是 } B \text{ 類的個數})$ 。



## 範例 4

老師講解



學生練習

從 1 到 200 的正整數中，是 2 或 3 的倍數有多少個？

從 1 到 300 的正整數中，是 2 或 7 的倍數有多少個？

## 焦點主題

5

 $n$  的階乘

設  $n$  為正整數，規定  $n$ 、 $n-1$ 、 $n-2$ 、 $\dots$ 、1 的連乘積稱為「 $n$  的階乘」，記作  $n!$ 。  
 即  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ 。例  $1! = 1$ ， $2! = 2 \times 1$ ， $3! = 3 \times 2 \times 1$ 。



小提醒

 $0! = 1$ 。

## 範例 5

老師講解



學生練習

試求下列的值：(1)  $6!$  (2)  $\frac{8!}{4!2!}$ 。

試求下列的值：(1)  $5!$  (2)  $\frac{7!}{3!4!}$ 。

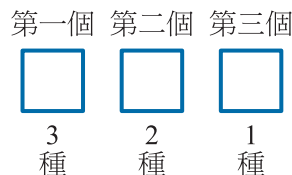
## 焦點主題

6

## 相異物的排列 (I)

$n$  個不同的物品排成一行方法數為  $n!$ 。

**例**  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三個字母排成一行，則第一個位置有 3 種方法，選定後，第二個位置剩下 2 種方法，同理第三個位置剩下 1 種方法。故此排列有  $3 \times 2 \times 1 = 6$  種方法，即  $3! = 3 \times 2 \times 1$ 。



## 觀念是非題

( ) 1. 將  $M$ 、 $A$ 、 $T$ 、 $H$  四個字母排成一行，共有 24 種排法。

C

## 範例 6

## 老師講解



## 學生練習

校園歌唱比賽共有 5 人進入最終決賽，出場順序由抽籤決定，有幾種安排方式？

200 公尺決賽有 6 位選手入選，用抽籤決定跑道第一至第六道次的順序，有幾種安排方式？

7

## 焦點主題

7

認識  $P_k^n$ 

(1) 設  $n$ 、 $k$  為正整數且  $1 \leq k \leq n$ ， $P_k^n = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}_{\text{從 } n \text{ 倒數，} k \text{ 個數字相乘}}。$

**例**  $P_3^{10} = 10 \times 9 \times 8。$

(2)  $P_k^n$  的另一種形式： $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ 。**例**  $P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8。$

## 範例 7

## 老師講解



## 學生練習

試求下列的值：(1)  $P_2^7$  (2)  $P_3^5$ 。

試求下列的值：(1)  $P_3^4$  (2)  $P_4^7$ 。

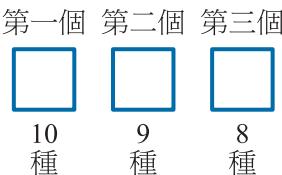
## 焦點主題

## 8

## 相異物的排列 (II)

從  $n$  個不同物品取出  $k$  個排成一行方法數為  $P_k^n$ ，稱為「 $n$  中取  $k$  的排列數」。

**例** 從 10 個不同物品取出 3 個來排列，則第一個位置有 10 種選擇，選定後，第二個位置剩下 9 種選擇，同理第三個位置剩下 8 種選擇。  
故此排列有  $10 \times 9 \times 8 = 720$  種方法，即  $P_3^{10} = 10 \times 9 \times 8$ 。



## 範例 8

## 老師講解



## 學生練習

學校辦理校外教學，預定從 7 個著名的景點中，選擇 4 個來依序參訪，共有多少種參訪的方案？

某社團有社員 13 人，若從其中選出社長與副社長各一人，則共有多少種選法？  
[統測]

## 焦點主題

## 9

## 分步驟的排列問題

- (1) 如果完成一件事需要分步驟來算排列數，則最後再採用乘法原理來算完成此事的方法數。
- (2) 若某些物品對位置有限制，如：不能排在某處，則優先安排到適合的位置，再排其他物品。

## 範例 9

## 老師講解



## 學生練習

甲、乙、丙、丁、戊五人排成一行要進入傳說中的鬼屋來探險，甲不想排在最前面，共有多少種排法？

今有  $F$ 、 $G$ 、 $H$ 、 $J$  四幅畫作橫向並排掛在同一面牆上，且  $F$  作品不能擺在最左邊，則總共有幾種排法？

## 焦點主題

10

## 相鄰物品的排列（捆綁法）

優先把要相鄰的物品捆綁成一個整體，再和其他物品一起排列，同時也要考慮捆綁物的排列。

## 範例 10

老師講解



學生練習

甲、乙、丙、丁、戊、己共 6 人排成一列拍團體照，甲、乙兩人感情太好了，一定要站在相鄰的位置，有多少種排列的方法？

一排椅子有 5 個座位。今有甲、乙、丙、丁、戊共 5 人，各選一個位子坐，但甲、乙、丙三人必須相鄰，有幾種坐法？

[ 統測 ]

C

7

## 焦點主題

11

## 不相鄰物品的排列（插空法）

優先排列沒有位置要求的物品，再把不相鄰的物品安插在已排物品之間的空隙或兩端。

## 範例 11

老師講解



學生練習

甲、乙、丙、丁、戊、己共 6 人排成一列拍團體照，甲、乙兩人剛剛吵架，不要站在相鄰的位置，有多少種排列的方法？

今天小羽要將國文、英文、數學、專一、專二共五科分別安排在 5 個時段來複習。如果國文、英文不要連在一起複習，有幾種安排方式？

## 焦點主題

12

## 含有相同物的排列 (I)

$n$  個物品中只有  $n_1$  個是相同的（其餘都相異），則這  $n$  個物品排列的方法數為  $\frac{n!}{n_1!}$ 。

**例**  $A、B、B$  三個字母排成一列，有 3 種方法： $ABB、BAB、BBA$ 。

改用其他方式來思考，把  $A、B、B$  的兩個  $B$  視為  $B_1、B_2$ ，則  $A、B_1、B_2$  的排列法為  $3! = 6$ ，但實際上  $B_1、B_2$  都是  $B$ ，右圖中同一行

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| $AB_1B_2$ | $B_1AB_2$ | $B_1B_2A$ |
| $AB_2B_1$ | $B_2AB_1$ | $B_2B_1A$ |
| ↓         | ↓         | ↓         |
| $ABB$     | $BAB$     | $BBA$     |

的  $2! = 2$  種（ $B_1、B_2$  互換）其實只是同一種，因此  $A、B、B$  三個字母排列法為  $\frac{3!}{2!} = 3$  種。

## 範例 12

## 老師講解



## 學生練習

將「風聲雨聲讀書聲」七個國字任意排列，有幾種的排列方法？

將「 $A、B、C、C、C、C$ 」六個英文字母任意排列，有幾種方法？

## 焦點主題

13

## 含有相同物的排列 (II)

$n$  個物品可以分成  $k$  類，每一類各有  $n_1, n_2, \dots, n_k$  個（每一類中的物品相同且  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ），則這  $n$  個物品排列的方法數為  $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$ 。

## 範例 13

## 老師講解



## 學生練習

從跳棋中取出 8 個棋子，其中紅色有 4 個，黃色有 2 個，綠色有 2 個，將 8 個棋子排成一列，共有幾種不同的排法？

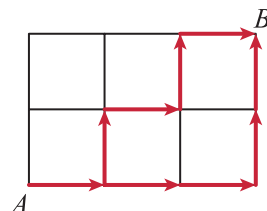
由 2、2、3、3、4、4、4 這七個數字排成一列，則共可排成多少個不同的七位數？

## 焦點主題

14

## 棋盤道路的捷徑數

如圖，從  $A$  點到  $B$  點走捷徑，只能  $\rightarrow$  或  $\uparrow$ ：「 $\rightarrow$ 」要走 3 段、「 $\uparrow$ 」要走 2 段。每條捷徑都是 3 個「 $\rightarrow$ 」及 2 個「 $\uparrow$ 」所組成，即「 $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow$ 」的排列，而  $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$ ，有 10 條捷徑。



C

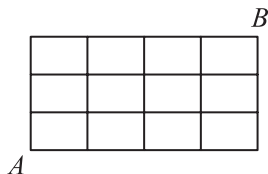
## 範例 14

老師講解

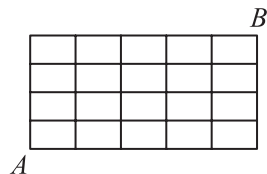


學生練習

如圖，從  $A$  點到  $B$  點的捷徑有多少條？



如圖，從  $A$  點到  $B$  點的捷徑有多少條？



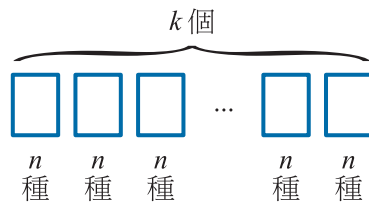
7

## 焦點主題

15

## 重複排列

從  $n$  種物品中取出  $k$  個來排列，若每一種的個數都足夠（即  $k$  個位置中的每一個位置都有  $n$  種選擇），則物品可重複出現的排列方法數為  $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ 個 } n \text{ 相乘}} = n^k$ 。



## 範例 15

老師講解



學生練習

骰子各面的點數分別為 1、2、 $\cdots$ 、6，若投擲一個骰子 3 次，則依序出現的點數有多少種可能的結果？

某個密碼鎖有 4 個滾輪，每個滾輪上都有 0、1、2、 $\cdots$ 、9 等 10 個數字可選擇。試問密碼有多少種設定方法？

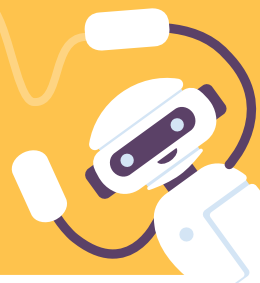
 7-1 邁向統測之路

排列的倒扣法  
當計算有限制的排列數過於複雜時，可以用倒扣法。

 小提醒

(有限制的排列數) = (任意排列數) - (不符合限制的排列數)。

| 老師講解                                                                                                                              | 學生練習                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <div>(1)將 0、0、2、2、9、9、9、9 八個數字全取，排成一行，可得幾個不同的八位數？</div> <div>(2)假設在招呼站有三輛計程車，每輛至多可搭乘 4 位客人，招呼站現來 5 位要搭計程車的旅客，試問共有幾種不同的載客方式？</div> | <div>(1)將六個數字 2, 0, 1, 3, 1, 4 排列，共可排出多少個六位數？</div> <div>(2)老師將把 5 塊不同的蛋糕，任意分給 A、B、C 三人，試問 C 至少拿到一塊蛋糕的方式有幾種？</div> |



## 焦點主題

16

認識  $C_k^n$ 從  $n$  倒數， $k$  個數相乘

設  $n$ 、 $k$  為正整數且  $1 \leq k \leq n$ ， $C_k^n = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$ 。

例  $C_3^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!}$ 。

## 範例 16

## 老師講解



## 學生練習

試求下列的值：(1)  $C_4^9$  (2)  $C_5^7$ 。

試求下列的值：(1)  $C_3^6$  (2)  $C_4^8$ 。

## 焦點主題

17

## 相異物的組合

關於「 $n$  中取  $k$  的排列數  $P_k^n$ 」，可以分解成下面兩個步驟：

第 1 步：先從  $n$  個不同物品取出  $k$  個當作一個組合（不考慮物品的次序，設組合數為  $x$ ）。

第 2 步：再把每一個組合中的  $k$  個物品任意排列（排列數是  $k!$ ）

由乘法原理可知， $P_k^n = x \times k!$ ，故  $x = \frac{P_k^n}{k!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$ ，即  $C_k^n$ 。



## 小提醒

$$P_k^n = C_k^n \times k!$$

因此從  $n$  個不同物品取出  $k$  個為一組（不分次序）的方法數為  $C_k^n$ ，稱為「 $n$  中取  $k$  的組合數」。

例 從 10 人中選 3 人當作代表（不分次序），共有  $C_3^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$  種選法。

## 範例 17

老師講解



學生練習

澎湖漁會販售丁香魚乾、干貝、…等 7 種 XO 醬，如果要網購 4 瓶不同的 XO 醬，有多少種可能？

花蓮火車站的商店販售 8 種花蓮薯的禮盒。如果要選購 3 盒不同的花蓮薯，有多少種可能？

## 焦點主題

18

## 組合數的性質

(1)  $C_k^n$  的另一種形式： $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 。

**例**  $C_7^{10} = \frac{10!}{7!3!}$ ， $C_3^{10} = \frac{10!}{3!7!}$ ； $C_6^{10} = \frac{10!}{6!4!}$ ， $C_4^{10} = \frac{10!}{4!6!}$ 。

(2) 組合數的互換（餘組合）： $C_k^n = C_{n-k}^n$ 。**例**  $C_7^{10} = C_3^{10}$ ， $C_6^{10} = C_4^{10}$ 。



## 觀念是非題

( ) 1. 組合數  $C_{80}^{100} = C_{20}^{100}$ 。

## 範例 18

老師講解



學生練習

某足球隊有 13 名球員，每次需 11 人同時上場比賽，若不考慮球員位置，共有幾種選法？

某次數學考試，規定由 12 題中任意選取 10 題作答，若不考慮題號順序，有多少種選法？

## 焦點主題

19

## 幾何上的組合問題

平面上有  $n$  個相異點（ $n \geq 3$  且任意三點都不在同一條直線上），以  $n$  個點畫出直線有  $C_2^n$  條，以其中每三點為頂點畫一個三角形有  $C_3^n$  個。

## 範例 19

老師講解



學生練習

平面上有 11 個相異點，且任意三點都不共線，試問可以畫出多少條直線？

平面上有 8 個相異點，且任意三點不共線，試問可以畫出多少條直線？

C

焦點主題

20

凸  $n$  邊形的對角線

凸  $n$  邊形 ( $n \geq 3$ ) 有  $C_2^n - n$  條對角線。 $(n$  個點可畫出  $C_2^n$  條直線，但各邊不是對角線)

## 範例 20

老師講解



學生練習

凸九邊形的對角線共有多少條？

正 12 多邊形總共有幾條對角線？

7

焦點主題

21

## 分步驟的組合問題

如果完成一件事需要分步驟來算組合數，則最後再採用乘法原理來算完成此事的方法數。

**例** 從 10 男 9 女之中選出 3 男 5 女，共有  $C_3^{10} \times C_5^9 = 120 \times 126 = 15120$  種選法。

## 範例 21

老師講解



學生練習

某幼兒園共有大班 6 班、中班 4 班及小班 3 班。若聖誕晚會需要從大班選取 4 班、中班選取 3 班及小班選取 2 班來支援，其搭配方式有幾種可能？

某餐廳推出之套餐包含二種不同的配菜、一種主菜及一杯飲料。若有四種配菜、三種主菜及五種飲料可供選擇，則共可搭配出多少種不同組合的套餐？



## 統測常考題

### 範例 1 數字排列的分類問題

由 0、1、2、3、4、5、6 七個數字中取三個相異數字排成三位數的偶數，則方法有幾種？ (A)60 (B)90 (C)105 (D)120。 [108 (A)]

#### ■ 解題小技巧

當三位數為偶數，則其個位數必須為偶數。

解：百 十 個

當三位數為偶數，則其個位數必須為偶數（0、2、4、6），分類如下

(1) 當個位數為 0 時（□□0）

原來 7 個數字剩下 6 個（1、2、3、4、5、6），取 2 個數字排在百位數、十位數，有  $P_2^6 = 6 \times 5 = 30$  個偶數

(2) 當個位數為 2 或 4 或 6 時（□□2 或 □□4 或 □□6）

第 1 步：個位數可選偶數 2、4、6，有 3 種

第 2 步：原來 7 個數字剩下 6 個，刪除 0 之後還有 5 個數字，取 1 個數字排在百位數，有 5 種

第 3 步：原來 7 個數字剩下 5 個，取 1 個數字排在十位數，有 5 種

由乘法原理可知，有  $3 \times 5 \times 5 = 75$  個偶數

從 (1)、(2) 可知，共有  $30 + 75 = 105$  個偶數，故選 (C)

**類題 1** 若數字不可重複，則以 1、2、3、4 所組成的 4 位數中大於 2000 者共有幾個？\_\_\_\_\_

(A)6 (B)12 (C)18 (D)24。

[統測]

**類題 2** 將 0、1、2、3、5 五個數字全取，排成一行，可得 4 的倍數的五位數共有多少個？（凡是末兩位數是 4 的倍數者即為 4 的倍數）\_\_\_\_\_

(A)18 (B)20 (C)24 (D)36。

[統測]



## 最素傳說

### 素養題 組合的分類問題

某次啦啦隊競賽規定，每隊組隊人數 8 人且男、女生均至少 2 人。某班共有 4 名男生與 6 名女生想參加啦啦隊競賽，若由此 10 人中依規定選出 8 人組隊，則共有多少種組隊方式？ (A)45 (B)60 (C)75 (D)90。 [108 (C)]

#### 解題小技巧

加法原理：若完成一件事的方法可分成若干類（任兩類不重複），則完成這件事的方法數為各類方法數的總和。

解：啦啦隊規定每隊組隊人數 8 人且男、女生均至少 2 人，則此班 10 人（4 名男生與 6 名女生）的組隊分類如下

$$(1) 2 \text{ 名男生與 } 6 \text{ 名女生 } C_2^4 \times C_6^6 = \frac{4 \times 3}{2!} \times 1 = 6 \times 1 = 6 \text{ 種}$$

$$(2) 3 \text{ 名男生與 } 5 \text{ 名女生 } C_3^4 \times C_5^6 = C_1^4 \times C_1^6 = \frac{4}{1!} \times \frac{6}{1!} = 4 \times 6 = 24 \text{ 種}$$

$$(3) 4 \text{ 名男生與 } 4 \text{ 名女生 } C_4^4 \times C_4^6 = C_4^4 \times C_2^6 = 1 \times \frac{6 \times 5}{2!} = 1 \times 15 = 15 \text{ 種}$$

由 (1)、(2)、(3) 可知，男、女生均至少 2 人的方法共有  $6 + 24 + 15 = 45$  種  
故選 (A)

**類題 1** 從 5 位醫生、3 位護士中，任選 5 人組成一個醫療團隊。若團隊中至少有 2 位護士，則共有幾種組合的方式？\_\_\_\_\_

(A)40 (B)55 (C)80 (D)100。

[統測]

**類題 2** 由甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛八個人中選取 5 人組成一個委員會，且甲、乙、丙、丁四人中至少有 2 人為委員，則組成此委員會的方法數共有幾種？\_\_\_\_\_

(A)48 (B)50 (C)52 (D)54。

[統測]



## 基礎題

### ● 排列

- \_\_\_\_\_ 1. 有一樂團計畫至甲、乙兩國巡迴表演。甲國有三個城市要去表演，乙國有四個城市要去表演。若先完成甲國的演出之後，再到乙國完成演出，則巡迴路線的規劃有多少種可能？ (A)7 (B)12 (C)36 (D)144。 [105 (B)]
- \_\_\_\_\_ 2. 某電影場景中，4 位演員在排成一列的 8 個座位中，選坐 4 個相連的座位，其餘皆為空位，則坐法有多少種？ (A)96 (B)120 (C)144 (D)168。 [107 (S)]
- \_\_\_\_\_ 3. 某班有 30 位學生，其中 20 位男生、10 位女生。今任選二位擔任班長和副班長，若規定其中一位是男生，另一位是女生，則共有幾種選法？ (A)200 (B)400 (C)435 (D)870。 [109 (A)]
- \_\_\_\_\_ 4. 在一次立法委員選舉中，每位選民須投區域立委與不分區政黨兩種選票，且每種選票均只能圈選一位（個），否則視為廢票。已知某甲的戶籍地有 6 位區域立委候選人，而全國共有 14 個政黨可選擇。若某甲決定去投票，且兩種選票均不投廢票，試問某甲有多少種的投票組合？ (A)6 (B)14 (C)20 (D)84。 [109 (C)]
- \_\_\_\_\_ 5. 某歌手打算在她的演唱會上表演一段由 6 首不同的歌曲串成的組曲，其中 3 首慢歌、3 首快歌。她的音樂總監建議在歌曲的安排上最多只能 2 首慢歌連在一起唱，因為這樣才會使得整個組曲的節奏比較流暢。若她認同並接受音樂總監的建議，試問這段組曲可以有多少種不同的安排方式？ (A)576 (B)648 (C)696 (D)720。 [111 (C)]
- \_\_\_\_\_ 6. 阿軒餐飲店推出均衡套餐，套餐有飯、主菜、湯與飲料 4 樣，其中飯有白飯、紫米飯、五穀飯、炒飯與稀飯 5 種，主菜有牛排、豬排、魚排與雞排 4 種，湯有洋蔥牛肉湯、豬肉貢丸湯、魚丸湯與人蔘雞湯 4 種，飲料有柳橙汁、西瓜汁、咖啡與紅茶 4 種。基於均衡原則，套餐的主菜與湯不能同為紅肉或同為白肉。（牛與豬為紅肉，魚與雞為白肉），若在符合均衡原則下，從飯、主菜、湯與飲料 4 樣中各任選 1 種，則均衡套餐共有幾種點餐的方式？ (A)80 (B)160 (C)240 (D)320。 [112 (C)]



## ● 組合

- \_\_\_\_\_ 7. 由十男十女共二十人中選出十人，其中三個是男生，七個是女生，則有多少種選法？ (A) 120 (B) 14400 (C)  $C_{10}^{20}$  (D)  $7! \times 3!$ 。 [108 (A)]
- \_\_\_\_\_ 8.  $A$  學校桌球校隊有甲、乙、丙、丁、戊五位選手，有一天  $A$  學校桌球校隊與他校進行友誼賽。由於時間關係，只進行單打、雙打比賽各一場，且兩場比賽同時進行。若任意推出選手參賽（不考慮默契等因素），則  $A$  學校可推出的參賽選手名單有多少種？ (A) 12 (B) 30 (C) 125 (D) 243。 [109 (B)]
- \_\_\_\_\_ 9. 跆拳道隊有 8 個隊員，教練安排所有隊員每 2 人一組分別在  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四個不同場地練習，則共有幾種安排的方式？ (A) 105 (B) 2520 (C) 5040 (D) 40320。 [110 (C)]
- \_\_\_\_\_ 10. 一個空的書櫃有上、中、下共三層，若將國文、英文、數學三本課本放入書櫃的任一層，且當課本放在同一層左右順序不同時視為不同排列，則共有幾種不同的排法？ (A) 60 (B) 36 (C) 27 (D) 18。 [110 (C)]
- \_\_\_\_\_ 11. 小輝從大賣場採買一些要祭拜祖先的水果，計有西瓜、芒果、蘋果、香瓜、橘子及木瓜等六種水果，他從中各取出一顆水果置於供桌準備祭拜，發現供桌大小只能容納其中五顆水果排成一行放置，若其中香瓜及木瓜都被選到，且此兩種水果位置相鄰，則有幾種不同排列方法？ (A) 48 (B) 96 (C) 192 (D) 240。 [113 (C)]

## 進階題

- \_\_\_\_\_ 12. 從 7 位男生、3 位女生中，任選 4 人到醫院實習。若此 4 人中至少有 1 位女生，則共有多少種選取的方式？ (A) 95 (B) 135 (C) 175 (D) 215。 [104 (A)]
- \_\_\_\_\_ 13. 某校舉辦新生盃網球個人賽，比賽採單淘汰制，也就是比賽一場輸的就淘汰，勝的晉級到下一輪比賽。若有 32 位新生參加比賽，則共要舉辦多少場比賽，才會產生冠軍？ (A) 31 (B) 32 (C)  $\frac{32 \times 31}{2}$  (D)  $32 \times 31$ 。 [109 (A)]