【C3_3-2~4-2_1 個重點+2 個練習題】

重點 01

設 $A(x_1,y_1,z_1)$ 、 $B(x_2,y_2,z_2)$ 為空間中兩點，則：

(1) $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$　　(2) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

x分量　y分量　z分量　　　分量的平方和再開根號

練習 A

空間中兩點 $P(-1,4,5)$ 、 $Q(2,2,-1)$ ，則 $\overrightarrow{PQ}=$____________ 。

練習 B

空間中，已知 $A(1,2,3)$ 、 $B(3,8,6)$ 兩點，則 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=$____________ 。

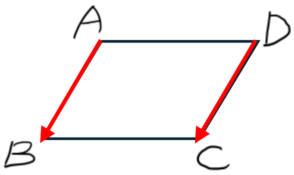
重點 02

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中兩向量，則 $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ a_3=b_3 \end{cases}$

兩向量相等 ⇔ {x分量相等, y分量相等, z分量相等}

練習 A

已知平行四邊形 $ABCD$ 的三頂點坐標 $A(1,2,3)$ 、 $B(4,3,-1)$ 、 $C(2,-1,5)$ ，則 D 點坐標為____________ 。



練習 B

已知空間中四點 $A(1,0,1)$ 、 $B(3,2,4)$ 、 $C(4,2,3)$ 、 $D(a,b,c)$ ，若 $5\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$ ，則 $a+b+c=$____________ 。

重點 03

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中兩向量，則

$\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=t\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$　兩向量互相平行 ⇔ 分量成比例

練習 A

若空間中三點 $A(3,1,-1)$ 、 $B(2,a,3)$ 、 $C(4,-3,-5)$ 共線，則 $a=$____________ 。

練習 B

$\vec{u}=(2,-3,6)$ 、 $\vec{v}=(a,b,c)$ ，若 $\vec{v}$ 與 $\vec{u}$ 的同方向，且 $\vec{v}$ 的長度為 $\vec{u}$ 的 3 倍，則 $a+b+c=$____________ 。

$\boxed{\text{重點 04}}$

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中兩向量，則

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \iff \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\ (0^\circ\le\theta\le180^\circ)$$

$\boxed{\text{練習 A}}$

已知空間中三點 $A(4,1,1)$、$B(0,6,0)$、$C(-1,1,2)$，則 $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=$____________。

$\boxed{\text{練習 B}}$

設 $\vec{a}=(1,\sqrt{2},-1)$、$\vec{b}=(-1,0,1)$，若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 θ，則 $\theta=$____________。

$\boxed{\text{重點 05}}$

設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為空間中兩非零向量，則 $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 兩非零向量互相垂直⇔內積為0

$\boxed{\text{練習 A}}$

空間中三點 $A(x,0,0)$、$B(1,2,3)$、$C(0,-3,2)$，若 $\overline{AB}\perp\overline{AC}$，則 $x=$____________。(兩解)

$\boxed{\text{練習 B}}$

設 $\vec{a}=(3,1,4)$、$\vec{b}=(1,1,0)$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，若 $\vec{b}\perp\vec{c}$，則 $t=$____________。

$\boxed{\text{重點 06}}$

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中兩非零向量，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$。

※ $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長為 $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

$\boxed{\text{練習 A}}$

已知空間中三點 $A(1,2,0)$、$B(3,3,1)$、$C(-2,4,2)$，則 $\overline{AC}$ 在 $\overline{AB}$ 上的正射影為____________。

$\boxed{\text{練習 B}}$

坐標平面上 $A(2,1,3)$、$B(4,3,4)$、$C(4,7,5)$，則 $\overline{AC}$ 在 $\overline{AB}$ 上的正射影長為____________。

重點 07

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中兩非零向量，則

$\vec{a}$、$\vec{b}$ 所張之三角形面積 $\Delta=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$。

練習 A

已知空間中三點 $A(2,1,-1)$、$B(3,2,-1)$、$C(3,1,0)$，則

$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 所張之三角形面積為____________。

練習 B

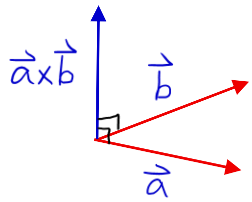
已知空間中三點 $A(6,-4,4)$、$B(2,1,2)$、$C(3,-1,4)$，則 A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離為____________。

重點 08

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中兩非零向量，則

$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

$\begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix}\times\begin{matrix} a_3 \\ b_3 \end{matrix}\times\begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix}\times\begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix}$



遵守右手定則

※ $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$；$\vec{a}\times\vec{a}=0$

※ $\vec{n}//(\vec{a}\times\vec{b}) \rightarrow \vec{n}=t(\vec{a}\times\vec{b})$

練習 A

已知 $\vec{a}=(1,2,3)$、$\vec{b}=(3,-1,2)$，則 $\vec{a}\times\vec{b}=$____________。

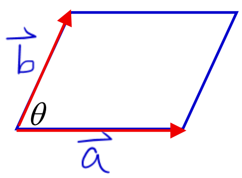
練習 B

已知 $\vec{c}$ 同時與 $\vec{a}=(1,2,3)$ 和 $\vec{b}=(2,3,5)$ 垂直，且 $|\vec{c}|=2\sqrt{3}$，則 $\vec{c}=$____________。

重點 09

$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}=\vec{a}$、$\vec{b}$ 所張之平行四邊形面積

$=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$



練習 A

已知 $\vec{a}=(3,1,2)$、$\vec{b}=(2,-1,3)$，則 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所張之平行四邊形面積為____________。

練習 B

空間中，已知 $|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}\times\vec{b}|=9\sqrt{3}$，若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ，則 $\sin\theta=$____________。

重點 10

降階(以第 1 行降階為例)：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 = a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \to +a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \to -b_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \to +c_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

練習 A

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ ____________ 。

練習 B

若 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 12$ 、$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 5$ 、$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 3$ ，則 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$ ____________ 。

重點 11

行列式的性質：

(1) 行列互換，其值不變

(2) 任兩行或兩列對調，其值變號。

(3) 任一行或任一列可提公因數。

(4) 任兩行或任兩列元素成比例，其值為 0。

(5) 將任一行（或列）元素的 k 倍加到另一行（或列）的對應元素上，其值不變。

(6) 可依任一行（或列）將一個行列式分解成兩個行列式的和。

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha & a_2 & a_3 \\ b_1+\beta & b_2 & b_3 \\ c_1+\gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & a_2 & a_3 \\ \beta & b_2 & b_3 \\ \gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

練習 A

$\begin{vmatrix} 20 & 21 & 22 \\ 23 & 24 & 25 \\ 26 & 27 & 28 \end{vmatrix} =$ ____________ 。

練習 B

已知 $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 8$，試求 $\begin{vmatrix} a+3x & b+3y & c+3z \\ 7 & 6 & 5 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$ ____________ 。

重點 12

設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 為空間中三個非零向量。

若此三向量**不共平面**，則由 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 所張之平行六面體體積為 $V_{六}=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

※ 若此三向量**共平面**，則 $V_{六}=0 \rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$

練習 A

設 $A(1,-1,0)$、$B(0,1,0)$、$C(2,3,4)$、$D(-1,1,3)$ 為空間中四點，則由 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$ 所展成的平行六面體體積為____________。

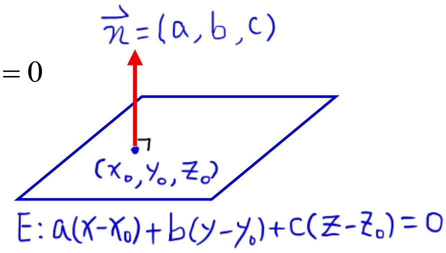
練習 B

空間中，若 $A(1,2,3)$、$B(1,3,5)$、$C(3,4,3)$、$D(3,5,k)$ 四點共平面，則 $k=$____________。

重點 13

空間中，平面的點法式 $\rightarrow$ $E: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

其中 $\vec{n}=(a,b,c)$ 為法向量，(x_0,y_0,z_0) 為平面上一點。



※ 化為一般式 $\rightarrow$ $E: ax+by+cz+d=0$

★ 由 $E: ax+by+cz+d=0$，可取其一個法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$ 為與平面 E 垂直之向量

練習 A

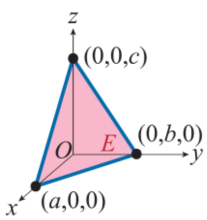
已知平面 E 上一點 $A(1,2,3)$，且 $\vec{n}=(2,-1,1)$ 為平面 E 的一個法向量，則平面 E 的方程式為__________________。

練習 B

一神槍手瞄準一點 $P(1,2,3)$ 開槍，子彈沿直線垂直射入圓形靶的平面 E，剛好射中平面 E 上的紅色靶心 $Q(5,-1,7)$，則此平面 E 的方程式為__________________。

重點 14

截距式 $\rightarrow$ $E:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$(如右圖)



練習 A

過空間中三點 $A(2,0,0)$、$B(0,3,0)$、$C(0,0,5)$ 之平面方程式為__________________。

練習 B

$A(3,0,0)$、$B(0,6,0)$、$C(0,0,-4)$ 三點所在平面之法向量**可為** $\vec{n}=$____________。

$\boxed{\text{重點 15}}$

欲求兩平面 $E_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 、 $E_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ 之兩交角為 θ 與 $180°-\theta$，

可利用法向量 $\overline{n_1}=(a_1,b_1,c_1)$ 、 $\overline{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$ ，先由 $\cos\varphi=\dfrac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}$ 算出兩法向量夾角 φ，則

此時 $\varphi=\theta$ **或** $\varphi=180°-\theta$。(即所取兩法向量之夾角，會是兩平面夾角之一！)

$\boxed{\text{練習 A}}$

兩平面 $E_1: 2x+y+z=15$ 與 $E_2: x-y+2z=30$ 所交之**鈍夾角**為____________。

$\boxed{\text{練習 B}}$

已知平面 $E_1: x+2y+z+1=0$ 與 $E_2: ax-y+z-5=0$ 互相垂直，則 $a=$____________。

$\boxed{\text{重點 16}}$

點 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $E: ax+by+cz+d=0$ 的距離 $D=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\boxed{\text{練習 A}}$

點 $P(-2,3,1)$ 到平面 $E: 2x-y+2z+18=0$ 的距離為____________。

$\boxed{\text{練習 B}}$

若點 $P(a,2,3)$ 到平面 $E: x-2y+2z+7=0$ 的距離為 4，則 $a=$____________。(兩解)

$\boxed{\text{重點 16}}$

兩平行平面 $E_1: ax+by+cz+d_1=0$ 、 $E_2: ax+by+cz+d_2=0$ 之距離 $D=\dfrac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\boxed{\text{練習 A}}$

兩平行平面 $E_1: 3x+2y-z+6=0$ 與 $E_2: 3x+2y-z-8=0$ 之距離為____________。

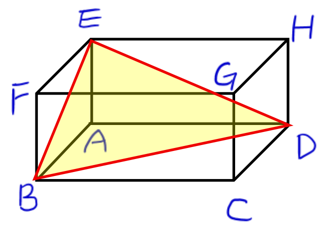
$\boxed{\text{練習 B}}$

已知兩平行平面 $E_1: x-2y+2z=3$ 與 $E_2: x-2y+2z=k$ 之距離為 4 ，則

所有 k 值之和為____________。

如圖，一長方體 *ABCD-EFGH*，已知 $\overline{AB}=\overline{AE}=2$ ， $\overline{AD}=4$ ，

則 G 到 ΔBDE 所在平面之距離為____________。



重點 17

克拉瑪公式解二元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \end{cases} \rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}，\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}，\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

① $\Delta\neq 0 \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$ → 恰一組解 → 平面坐標系中，兩直線交於一點

② $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0 \rightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ → 無限多組解 → 平面坐標系中，兩直線重合

③ $\Delta=0$ 但 Δ_x、Δ_y 至少有一不為 0 → $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ → 無解 → 平面坐標系中，兩直線平行

練習 A

已知 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ d & 2e \end{vmatrix}=3$、$\begin{vmatrix} a & 3c \\ d & 3f \end{vmatrix}=48$、$\begin{vmatrix} 3c & 2b \\ 3f & 2e \end{vmatrix}=24$，若 $\begin{cases} ax+2by=3c \\ dx+2ey=3f \end{cases}$ 的解為 $\begin{cases} x=m \\ y=n \end{cases}$，則

$2m+n=$____________。

練習 B

已知方程組 $\begin{cases} 2x+ay=4 \\ (b-2)x+9y=12 \end{cases}$ 有無限多組解，則 $a+b=$____________。

重點 17

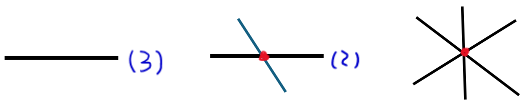
克拉瑪公式解三元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \\ \Delta\cdot z=\Delta_z \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

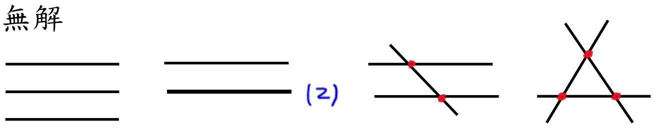
① $\Delta\neq 0 \rightarrow x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}，y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}，z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$ → 恰一組解 → 三面共點

② $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ → 無限多組解 →



三面共線

③ $\Delta=0$ 但 Δ_x、Δ_y、Δ_z 至少有一不為 0 → 無解



練習 A

解$\begin{cases} 3x+3y+4z=285 \\ 2x+5y+3z=290 \\ 4x+4y+2z=280 \end{cases}$得$(x, y, z)=$ ____________ 。

練習 B

若方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$恰有一組解$(-1, 2, 3)$，則方程組$\begin{cases} a_1x+2b_1y+c_1z=3d_1 \\ a_2x+2b_2y+c_2z=3d_2 \\ a_3x+2b_3y+c_3z=3d_3 \end{cases}$之解$(x, y, z)=$ ____________ 。

重點 18

矩陣的列運算解聯立方程式：

$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$之係數矩陣為$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，增廣矩陣為$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{經過矩陣的列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right] \begin{array}{l} \xrightarrow{③} \text{將} y\text{、}z \text{值代入解得} x \\ \xrightarrow{②} \text{將} z \text{值代入解得} y \\ \xrightarrow{①} \text{先解得} z \end{array}$$

練習 A

解$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+y-2z=1 \\ 4x-3y-z=3 \end{cases}$得$(x, y, z)=$ ____________ 。

練習 B

若矩陣$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right]$經過列運算後可以化成$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$，則$a^2+b^2+c^2=$____________ 。

已知方程組$\begin{cases} x+y+(1-a)z=1 \\ x+(1-a)y+z=1 \\ (1-a)x+y+z=1 \end{cases}$，$a$為實數，則

(1) $a=$ ______時，方程組有無限多組解。 (2) $a=$ ______時，方程組無解。

將矩陣$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & a & 1 \\ 3 & 1 & 1 & b \end{array}\right]$經過列運算化簡得$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$，則$a+b=$____________ 。

$\boxed{\text{重點 19}}$

設 m、n 為正整數，則形如 $\left.\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n\text{行}}\right\}m\text{列}$ 的矩陣稱為 $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{先列}}}{m}\times\underset{\substack{\uparrow\\ \text{再行}}}{n}$ 階矩陣，通常用大寫英文字母表示矩陣，例如記為 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$(其中 i、j 為自然數且 $1\le i\le m$，$1\le j\le n$)，此矩陣共有 m 列、n 行，a_{ij} 為第 i 列與第 j 行交叉位置上的元素，稱為該矩陣的第(i,j)元。

※ 若 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 之 $m=n$，則稱 A 為 n 階方陣。

$\boxed{\text{練習 A}}$

已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，其中第$(i,j)$元滿足 $a_{ij}=i+j$，則 $A=$____________。

$\boxed{\text{練習 B}}$

設矩陣 $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$，其中 $a_{ij}=i^2+3j$，則 $A=$____________。

$\boxed{\text{重點 20}}$

(1) 零矩陣：

若一個 $m\times n$ 階矩陣的每個元都是 0，則稱為 $m\times n$ 階**零矩陣**。

※ 若零矩陣為 n 階方陣，可記為 O_n。

(2) n 階單位方陣：

若一個 n 階方陣，其主對角線上的每個元都是 1，其餘位置的元都是 0，則稱為 n 階單位方陣，以 I_n 表示。(例如：$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$、$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$)

(3) 矩陣相等 → **對應元**全部都要相等

(4) 矩陣相加 → **對應元**要相加

(5) 矩陣相減 → **對應元**要相減

(6) 矩陣乘以一常數 k → **所有元**全部都要乘以 k

※ 若在用矩陣列運算解方程組中，則可以只同列中同乘以 k(或同除以 k)即可！

$\boxed{\text{練習 A}}$

若 $\begin{bmatrix} x-y & 3 \\ 3x-2y & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 2a-b \end{bmatrix}$，則數對 $(x,y,a,b)=$____________。

練習 B

設 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & -4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$，則 $3A-2B=$ ____________ 。

重點 21

矩陣乘法：

$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 、$B=\left[b_{ij}\right]_{n\times \ell}$ $\rightarrow$ $C=AB=\left[c_{ij}\right]_{m\times \ell}$，其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

※ 矩陣 A 的行數要等於矩陣 B 的列數，AB 才能相乘 $\rightarrow$ AB 能相乘不一定 BA 能相乘

矩陣乘法不具交換律

實例：

$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}\end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\\a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}\end{bmatrix}$$

練習 A

$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\2 & 4 & -6\end{bmatrix}$，若 $AB=\begin{bmatrix}8 & 24 & a\\5 & b & -15\end{bmatrix}$，則 $a+b=$ ____________ 。

練習 B

設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 8\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}-10 & 4\\5 & -2\end{bmatrix}$，則 $AC+BC=$ ____________ 。

※ 提示：可使用 $AC+BC=(A+B)C$，但要注意 $AC+BC\neq C(A+B)$！

重點 22

矩陣乘法性質：

設 A、B、C 為矩陣，r 為實數，則

(1) 結合律 $\rightarrow$ $(AB)C=A(BC)$ 、$r(AB)=(rA)B=A(rB)$

(2) 分配律(分左右) $\rightarrow$ 左分配律：$A(B+C)=AB+AC$；右分配律：$(A+B)C=AC+BC$

(3) 矩陣乘法單位元 I $\rightarrow$ 若 A 為 n 階方陣，則 $AI_n=I_nA=A$

※ 矩陣加法單位元為**零矩陣** O

練習 A

設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 8\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}-10 & 4\\5 & -2\end{bmatrix}$，則 $CA+CB=$ ____________ 。

練習 B

已知 A、B 均為二階方陣，且 $A+B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$、$A-B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$則

(1) $A=$ ________。 (2) $B=$ ________。 (3) $AB=$________。 (4) $BA=$________。

(5) $(A+B)(A-B)=$________。 (6) $A^2-B^2=$________。

重點 23

乘法反方陣

設 A 為 n 階非零方陣，若存在一個 n 階方陣 B 使得 $AB=BA=I_n$，則稱 B 為 A 的乘法反方陣，簡稱反方陣，記作 $B=A^{-1}$ $\rightarrow$ $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$

★ 二階乘法反方陣公式：

設 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，其行列式 $\det(A)=\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$，若 $\Delta\neq 0$，則 $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$。

※ $\Delta=0 \Leftrightarrow A^{-1}$不存在

練習 A

已知 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$，則 $A^{-1}=$__________。

練習 B

已知 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ k & k-2\end{bmatrix}$的反方陣不存在，則 $k=$ __________。

重點 24

$AX=B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$

$XA=B \Rightarrow XAA^{-1}=BA^{-1} \Rightarrow X=BA^{-1}$

※ $AA^{-1}=I \Rightarrow IX=XI=X$

※ $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$

令 $A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}$、$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$，則 $AX=B$，若 $\det(A)\neq 0$，則 $X=A^{-1}B$。

練習 A

設 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 11 & 4\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$，若矩陣 X 滿足 $AX=B$，則 $X=$__________。

練習 B

小米想借哥哥的平板使用，但被四位數密碼鎖住無法執行，哥哥故意刁難，僅告訴小米平板密碼 $abcd$ 符合以下二階方陣的等式：

$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，則此四位數密碼為____________。

加強練習：

1. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$，若矩陣 X 滿足 $X+5A=3X+3B$，則 $X=$ ________。

2. 已知 A 為二階方陣，且 $A\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$、$A\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$，則 $A=$____________。

3. 已知 A 為二階方陣，若 $A^2=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$、$A^3=\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$，則 $A=$____________。

4. 若 $\begin{cases} x-3y=-1 \\ ax-by=1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} ax+by=3 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 有相同的解，則$(a,b)=$ ____________。

5. 方程組 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y-z=1 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$ 之解的情形為____________。(填恰一組解、無限多組解或無解)

6. 當 $a=$ _______時，方程組 $\begin{cases} x+y+(1-a)z=1 \\ x+(1-a)y+z=1 \\ (1-a)x+y+z=1 \end{cases}$ 無解。

7. 若平面 E 過點$(1,2,-1)$，且 E 與兩平面 $E_1:x+y-z+4=0$ 、$E_2:3x+y+2z-3=0$ 均垂直，則平面 E 之方程式為____________。

8. 若平面 E 過點$(3,5,7)$，且 E 與 xy 平面、yz 平面均垂直，則平面 E 之方程式為____________。

9. 空間中有一平面 $E:x+y-2z+3=0$ 與 $A(1,2,-3)$、$B(-5,-1,0)$兩點。若 $\overline{AB}$ 交平面 E 於 C 點，則 $\overline{AC}:\overline{BC}=$____________。

10. 解 $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+1 \\ x+3 & x+1 & x+2 \end{vmatrix}=0$ 得 $x=$____________。

11. 若平面上三相異直線 $L_1:(7-k)x+2y+3=0$ 、$L_1:7x+(2-k)y+3=0$ 、$L_1:7x+2y+(3-k)=0$ 恰交於一點，則實數 $k=$______。

(提示：可想成是求空間中之三面共線後，取 $z=1$ 所產生的點之 x、y 坐標)