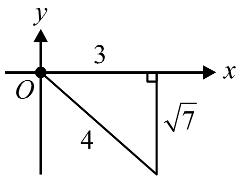
113 學年度四技二專第五次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 113-5-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	C	B	B	A	B	D	C	A	B	C	B	C	D	B	A	D	D	C	D	A	D	B	A

1. $\because \theta$ 為第四象限角，且 $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{3}{4}$



$\therefore \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{4}{3}$，故選(C)

2. $80 = 10 \times \log_{10} w \Rightarrow 8 = \log_{10} w \Rightarrow w = 10^8$，故選(A)

3. [法一]

做 $P(0, 4)$ 點關於 x 軸的對稱點 $P'(0, -4)$

可知 P'、Q、R 三點共線

又 R 點在線段 $\overline{BC}$ 上，可知 $b = 6$，即 $R(a, 6)$

$\because P'$、Q、R 三點共線

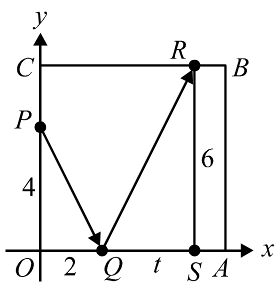
$\therefore m_{P'Q} = m_{QR}$

$\Rightarrow \dfrac{0-(-4)}{2-0} = \dfrac{6-0}{a-2} \Rightarrow 2 = \dfrac{6}{a-2} \Rightarrow a = 5$

則 $a + b = 5 + 6 = 11$，故選(C)

[法二]

過 R 點作 $\overline{RS} \perp x$ 軸於 S 點，如圖



則 $\Delta OPQ \sim \Delta SRQ \Rightarrow \dfrac{2}{4} = \dfrac{t}{6}$

$\Rightarrow t = 3$，則 $a = 2 + 3 = 5$，$b = 6$

$\therefore a + b = 5 + 6 = 11$，故選(C)

4. $V(t) = S'(t) = -3t + 6$

$\because$ 汽車完全停止時，速度為 0

$\therefore -3t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2$

所求 $S(2) = -\dfrac{3}{2} \times 2^2 + 6 \times 2 = -6 + 12 = 6$，故選(B)

5. 原式

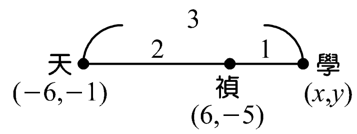
$= \dfrac{\sin(360° + 23°)}{\cos(270° - 23°)} + \dfrac{\sec 34°}{-\csc 56°}$

$+ \tan(2 \times 360° + 32°)\tan(270° - 32°)$

$= \dfrac{\sin 23°}{-\sin 23°} + \dfrac{\sec 34°}{-\csc(90° - 34°)} + \tan 32° \cot 32°$

$= -1 + \dfrac{\sec 34°}{-\sec 34°} + 1 = -1 + (-1) + 1 = -1$，故選(B)

6. 示意圖如下



設學校坐標為 (x, y)，則

$6 = \dfrac{2 \times x + 1 \times (-6)}{2+1} \Rightarrow 2x - 6 = 18 \Rightarrow x = 12$

$-5 = \dfrac{2 \times y + 1 \times (-1)}{2+1} \Rightarrow 2y - 1 = -15 \Rightarrow y = -7$

$\therefore$ 學校坐標為 $(12, -7)$，故選(A)

7. $\because f(x)$ 為實係數三次多項式

$\therefore$ 依虛根共軛成對定理可知：$a = -4$、$b = 2$

則 $f(x) = 1 \times [x - (2-4i)][x - (2+4i)](x-3)$

$= [(x-2) + 4i][(x-2) - 4i](x-3)$

$= [(x-2)^2 - (4i)^2](x-3)$

$= (x^2 - 4x + 20)(x-3) = x^3 - 7x^2 + 32x - 60$

可知一次項係數為 32，故選(B)

8. 由餘式定理知，$f(x)$ 除以 $x-5$ 之餘式

為 $f(5) = 9^4 - 13 \times 9^3 + 37 \times 9^2 + 2 \times 9 + 16$

設 $g(x) = x^4 - 13x^3 + 37x^2 + 2x + 16$

則所求為 $g(x)$ 除以 $x-9$ 之餘式

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -13 & 37 & 2 & 16 & \\ & 9 & -36 & 9 & 99 & 9 \\ \hline 1 & -4 & 1 & 11 & \lfloor 115 & \end{array}$$

由綜合除法知，$g(x)$ 除以 $x-9$ 之餘式為 115

故選(D)

9. 由微分的定義知：

$f'(114) = \lim\limits_{x \to 114} \dfrac{f(x) - f(114)}{x - 114}$

$= \lim\limits_{x \to 114} \dfrac{\dfrac{(x-108)(x-110)(x-112)(x-114)}{(x-116)(x-118)} - 0}{x - 114}$

$= \lim\limits_{x \to 114} \dfrac{(x-108)(x-110)(x-112)}{(x-116)(x-118)} = \dfrac{6 \times 4 \times 2}{(-2) \times (-4)} = 6$

故選(C)

10. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{27-28}\begin{bmatrix} -9 & -4 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}-3&4\\7&-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3\\3&-5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&4\\7&-9\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1&3\\3&-5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&4\\7&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3\\3&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&7\\2&6\end{bmatrix}$$

則門鎖密碼爲 3726，故選(A)

11. 由橢圓方程式知：$a=5$

又正焦弦長爲 $\frac{32}{5}=\frac{2b^2}{5}\Rightarrow b=4$

則 $c=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\therefore \Delta PF_1F_2=\frac{1}{2}\times 2c\times b=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$，故選(B)

12. [法一]

數學在上午，國文、英文有一科在下午：

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{上午3個}\\\text{時段選1個}\\\text{時段排數學}}}\times\underbrace{2}_{\substack{\text{國文英文}\\\text{2科選1科}\\\text{放上午}}}\times\underbrace{2}_{\substack{\text{上午2個}\\\text{時段選1個}\\\text{排國文或英文}}}$$

$$\times\underbrace{2}_{\substack{\text{下午2個}\\\text{時段選1個}\\\text{排英文或國文}}}\times\underbrace{2!}_{\substack{\text{專一}\\\text{專二}\\\text{隨意排}}}=48$$

數學在上午，國文、英文兩科都在下午：

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{上午3個時段}\\\text{選1個時段排數學}}}\times\underbrace{2!}_{\substack{\text{下午2個時段}\\\text{安排國文英文}}}\times\underbrace{2!}_{\substack{\text{專一專二}\\\text{上午隨意排}}}=12$$

共 $48+12=60$，故選(C)

[法二]

數學在上午－數學、國文、英文都在上午：

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{上午3個}\\\text{時段選1個排數學}}}\times 4!-\underbrace{3!}_{\substack{\text{上午3個時段}\\\text{安排國英數}}}\times\underbrace{2!}_{\substack{\text{下午2個時段}\\\text{安排專一專二}}}$$

$=72-12=60$，故選(C)

13. 設等差中項爲 x，排數爲 n，由等差中項知：

$\frac{a_1+a_n}{2}=x\Rightarrow a_1+a_n=2x$

$\frac{a_2+a_{n-1}}{2}=x\Rightarrow a_2+a_{n-1}=2x$

$\frac{a_3+a_{n-2}}{2}=x\Rightarrow a_3+a_{n-2}=2x$

$\frac{a_4+a_{n-3}}{2}=x\Rightarrow a_4+a_{n-3}=2x$

$$\therefore\underbrace{(a_1+a_2+a_3+a_4)}_{\text{前4排總和}}+\underbrace{(a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)}_{\text{最後4排總和}}$$

$=26+110=8x\Rightarrow x=\frac{136}{8}=17$

又等差中項乘以排數等於總和

$\Rightarrow 17\times n=221\Rightarrow n=13$，故選(B)

14. 設 $3|\overrightarrow{a}|=2|\overrightarrow{b}|=6t\Rightarrow|\overrightarrow{a}|=2t$、$|\overrightarrow{b}|=3t$

$\because 2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $3\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}$ 垂直

$\therefore(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(3\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b})=0$

$\Rightarrow 6|\overrightarrow{a}|^2-10\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-5|\overrightarrow{b}|^2=0$

$\Rightarrow 6(2t)^2-7\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-5(3t)^2=0$

$\Rightarrow 7\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-21t^2\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-3t^2$

又 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{-3t^2}{2t\times 3t}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=120^\circ$

故選(C)

15. 由雙曲線的定義知：雙曲線上點 A 與焦點 F_1、F_2，

滿足 $|\overline{AF_2}-\overline{AF_1}|=2a=2235-525=1710$

又實驗室在雙曲線上

$\therefore|\overline{PF_2}-\overline{PF_1}|=2a=1710$，則時間差爲 $\frac{1710}{342}=5$ 秒

即聲響傳到兩辦公室的時間差爲 5 秒，故選(D)

16. (A) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0.07n}{3n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{100}n}{3n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{100}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{\frac{7}{100}}{3-0}=\frac{7}{300}$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{2n+1}+7^n+13}{9^{n-1}+5^n-11}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\times 9^n+7^n+13}{\frac{1}{9}\times 9^n+5^n-11}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+(\frac{7}{9})^n+13\times(\frac{1}{9})^n}{\frac{1}{9}+(\frac{5}{9})^n-11\times(\frac{1}{9})^n}=\frac{3+0+13\times 0}{\frac{1}{9}+0-11\times 0}=27$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{114n+2025}{n^2+100n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{114}{n}+\frac{2025}{n^2}}{1+\frac{100}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{0+0}{1+0-0}=0$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n-7}-n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[(\sqrt{n^2+5n-7}-n)\times\frac{\sqrt{n^2+5n-7}+n}{\sqrt{n^2+5n-7}+n}]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{\sqrt{n^2+5n-7}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-\frac{7}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^2}}+1}$

$=\frac{5-0}{\sqrt{1+0-0}+1}=\frac{5}{2}$

故選(B)

17. 因爲前後兩端的燈不能熄滅，即表示將中間的 12 盞路燈選擇 3 盞熄滅

將不熄滅的路燈以△表示，熄滅的路燈以×表示

則所求可視爲

△, △, △, △, △, △, △, △, △, ×, ×, ×的排列且 3 個「×」不能相鄰的方法數

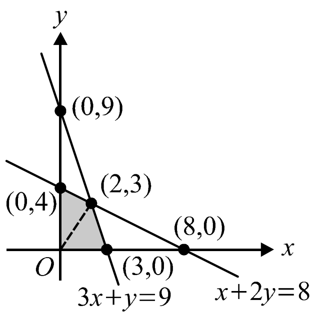
即將△, △, △, △, △, △, △, △, △排成一列

3 個「×」去插空隙

可得方法數爲 $C_3^{10}=\frac{10\times 9\times 8}{1\times 2\times 3}=120$，故選(A)

18. $\begin{cases}3x+y=9\\x+2y=8\end{cases}$ 解聯立 $\Rightarrow x=2$、$y=3$

解集合如圖所示，圖形面積爲鋪色區域



所求為 $\frac{1}{2}\times4\times2+\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{17}{2}$ 平方單位，故選(D)

19. 觀察 2×2 方格上數字總和：$1+4\times3=1^2+2^2\times3$

3×3 方格上數字總和：$1^2+2^2\times3+3^2\times5$

則 10×10 方格上數字總和

$=1^2\times1+2^2\times3+3^2\times5+\cdots+10^2\times19$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}2k^3-\sum_{k=1}^{10}k^2$

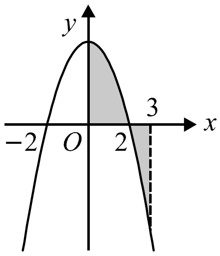
$=2\times(\frac{10\times11}{2})^2-\frac{10\times11\times21}{6}=6050-385=5665$

故選(D)

20. 令 $4-x^2=0$，得 $x=\pm2$

即 $f(x)$ 圖形於 x 軸交於 $(-2,0)$、$(2,0)$兩點

如圖所示，所圍成區域面積為鋪色區域



面積 $=\int_0^2(4-x^2)dx+\int_2^3(x^2-4)dx$

$=(4x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2+(\frac{1}{3}x^3-4x)\Big|_2^3$

$=(8-\frac{8}{3})+[(9-12)-(\frac{8}{3}-8)]=\frac{23}{3}$，故選(C)

21. $\begin{cases}L_1：5x-y=-5\\L_2：x-y=3\end{cases}$ 解聯立得點 $P(-2,-5)$

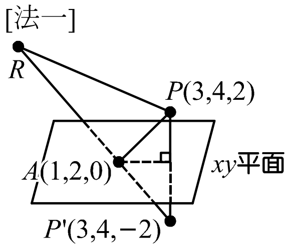
$\begin{cases}L_3：3x+5y=17\\L_2：x-y=3\end{cases}$ 解聯立得點 $Q(4,1)$

∵線段 $\overline{PQ}$ 與直線 $L：x+2y-k=0$ 相交

$\therefore(-2-10-k)(4+2-k)\le0\Rightarrow(k+12)(k-6)\le0$

$\Rightarrow-12\le k\le6$，故選(D)

22. [法一]



$P(3,4,2)$ 對 xy 平面之對稱點為 $P'(3,4,-2)$

又 $\overrightarrow{AR}=3\overrightarrow{AP}\Rightarrow\overrightarrow{AR}=3\overrightarrow{P'A}=3(-2,-2,2)$

$=(-6,-6,6)$

$|\overrightarrow{AR}|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+6^2}=6\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AP}=(2,2,2)$，$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore\Delta APR=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2\times|\overrightarrow{AR}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3})^2\times(6\sqrt{3})^2-(-12)^2}=12\sqrt{2}$，故選(A)

[法二]

$P(3,4,2)$ 對 xy 平面之對稱點為 $P'(3,4,-2)$

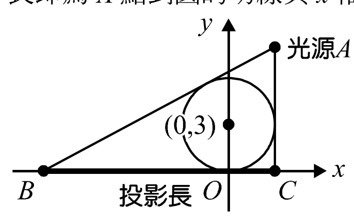
又 $\overrightarrow{AR}=3\overrightarrow{AP}\Rightarrow\overrightarrow{AR}=3\overrightarrow{P'A}=3(-2,-2,2)$

$=(-6,-6,6)$

$\therefore\Delta APR=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AP}|=\frac{1}{2}\cdot|(-6,-6,6)\times(2,2,2)|$

$=\frac{1}{2}|(-24,24,0)|=\frac{1}{2}\times24\sqrt{2}=12\sqrt{2}$，故選(A)

23. 圓的圓心(0 , 3)，半徑為 3，光源 A 往圓照射的投影長即為 A 點到圓的切線與 x 軸兩交點之距離，如下圖



設切線斜率為 m，則切線方程式為 $y-8=m(x-3)$

$\Rightarrow mx-y+8-3m=0$

∵圓心到切線的距離等於半徑

$\therefore\frac{|-3+8-3m|}{\sqrt{m^2+1}}=3\Rightarrow|5-3m|=3\sqrt{m^2+1}\Rightarrow30m=16$

$\Rightarrow m=\frac{8}{15}$，且另一條切線斜率不存在，可知切線為 $y-8=\frac{8}{15}(x-3)$ 與 $x=3$，分別令 $y=0$ 代入，可得與 x 軸交點為 $B(-12,0)$ 與 $C(3,0)$

∴投影長為 $\overline{BC}=3-(-12)=15$，故選(D)

24. 令 $\theta=x+40^\circ$，則 $x+100^\circ=\theta+60^\circ$

原式 $=3\cos\theta+5\cos(\theta+60^\circ)-2$

$=3\cos\theta+5(\cos\theta\cos60^\circ-\sin\theta\sin60^\circ)-2$

$=3\cos\theta+\frac{5}{2}\cos\theta-\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\theta-2$

$=\frac{11}{2}\cos\theta-\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\theta-2$

$=\sqrt{(\frac{11}{2})^2+(\frac{5\sqrt{3}}{2})^2}(\frac{11}{14}\cos\theta-\frac{5\sqrt{3}}{14}\sin\theta)-2$

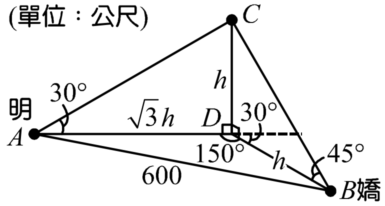
$=7(\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)-2$，其中 $\begin{cases}\cos\phi=\frac{11}{14}\\\sin\phi=\frac{5\sqrt{3}}{14}\end{cases}$

$=7\cos(\theta+\phi)-2$

$\because -1 \le \cos(\theta+\phi) \le 1 \Rightarrow -7 \le 7\cos(\theta+\phi) \le 7$

$\therefore -9 \le f(\theta) \le 5$，故選(B)

25. 依題意畫圖如下圖



設熱氣球高度 $\overline{CD} = h$ 公尺，則 $\overline{AD} = \sqrt{3}h$ 公尺，$\overline{BD} = h$ 公尺

又 $\angle ADB = 180° - 30° = 150°$

在 ΔABD 中，由餘弦定理：

$600^2 = (\sqrt{3}h)^2 + h^2 - 2 \times \sqrt{3}h \times h \times \cos 150°$

$600^2 = 7h^2 \Rightarrow h = \dfrac{600}{\sqrt{7}} = \dfrac{600\sqrt{7}}{7}$ 公尺，故選(A)