113 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

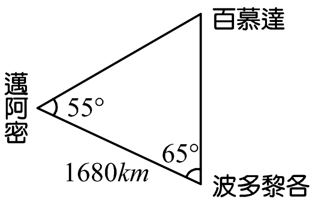
數學(C)卷　113-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	B	B	D	D	C	A	B	A	A	D	C	C	A	A	D	D	A	B	D	C	C	B	B

1. 由算幾不等式知：$\dfrac{2x+5y}{2} \ge \sqrt{(2x)(5y)} \Rightarrow 5 \ge \sqrt{10xy}$
$\Rightarrow 25 \ge 10xy \Rightarrow 2.5 \ge xy$
當等號成立時，需 $2x=5y$，又 $2x+5y=10$
$\therefore 2x=5y=5$ 即 $x=2.5$ 、 $y=1$ 時 $xy=2.5$ 為最大值，故選(B)

2. 原式 $=2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta+12=-2\cos^2\theta-\cos\theta+14$
$=-2(\cos^2\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{16})+\dfrac{1}{8}+14$
$=-2(\cos\theta+\dfrac{1}{4})^2+14\dfrac{1}{8}$ $(-1\le\cos\theta\le1)$
當 $\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ 有最大值 $a=14\dfrac{1}{8}$
當 $\cos\theta=1$ 有最小值 $b=11$
$a+b=25\dfrac{1}{8}=\dfrac{201}{8}$，故選(C)

3. 三角形內角和為 180°，由圖得知 $1680\,km$ 的對角為 $180°-55°-65°=60°$
由正弦定理：$\dfrac{1680}{\sin60°}=2R$，$R=1680\times\dfrac{2}{\sqrt3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1680}{\sqrt3}$
$=560\sqrt3$，故選(B)



4. 所求為過三點之圓的圓心
令圓方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$
A 代入：$9+169-3d+13e+f=0\cdots①$
B 代入：$16+169+4d+13e+f=0\cdots②$
C 代入：$64+81+8d-9e+f=0\cdots③$
②－①：$7+7d=0$，$d=-1$
②－③：$40-4d+22e=0\Rightarrow 40+4+22e=0$，$e=-2$
圓心 $(a,b)=(\dfrac{-d}{2},\dfrac{-e}{2})=(\dfrac{1}{2},1)$，$a-b=-\dfrac{1}{2}$，故選(B)

5. $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=0\Rightarrow(x-2,8)\cdot(-2,3)=0$
$\Rightarrow -2x+4+24=0\Rightarrow 2x=28\Rightarrow x=14$，故選(D)

6. [法一]
$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 最小，即 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 反方向，$x：y=-\dfrac{4}{3}：\dfrac{2}{3}=-2：1$
令 $x=2t$ 、 $y=-t$ 且 $t>0$ 代入 $x^2+y^2=20$
$(2t)^2+(-t)^2=20$，$4t^2+t^2=20$，$5t^2=20$，$t^2=4$
$t=2$ (-2 不合)，$x=4$ 、 $y=-2$，$x+y=4+(-2)=2$
故選(D)
[法二]
$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}y$
由柯西不等式知：
$(x^2+y^2)\cdot[(-\dfrac{4}{3})^2+(\dfrac{2}{3})^2]\ge(-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}y)^2$
$\Rightarrow 20\times\dfrac{20}{9}\ge(-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}y)^2\Rightarrow-\dfrac{20}{3}\le-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}y\le\dfrac{20}{3}$
等號成立時，$\dfrac{x}{-\frac{4}{3}}=\dfrac{y}{\frac{2}{3}}=3t\Rightarrow x=-4t$ 、 $y=2t$
$(-4t)^2+(2t)^2=20\Rightarrow 20t^2=20\Rightarrow t^2=1\Rightarrow t=\pm1$
(1) $t=1\Rightarrow x=-4$ 、 $y=2$
則 $-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}y=-\dfrac{4}{3}\times(-4)+\dfrac{2}{3}\times2=\dfrac{20}{3}$ (不合)
(2) $t=-1\Rightarrow x=4$ 、 $y=-2$
則 $-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}y=-\dfrac{4}{3}\times4+\dfrac{2}{3}\times(-2)=-\dfrac{20}{3}$
$\therefore x+y=4+(-2)=2$，故選(D)

7. 2.1 接近整數 2，當 $h=2$ 時得以讓函數變容易計算，以此作連續綜合除法

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3 & -20 & +30 & +2 & 2 \\
 & +6 & -28 & +4 & \\
\hline
3 & -14 & +2 & & +6 \\
 & +6 & -16 & & \\
\hline
3 & -8 & & & -14 \\
 & +6 & & & \\
\hline
3 & , -2 & & &
\end{array}
$$

$f(x)=3(x-2)^3-2(x-2)^2-14(x-2)+6$
$f(2.1)=3(0.1)^3-2(0.1)^2-14(0.1)+6$
$=0.003-0.02-1.4+6=4.583\approx4.58$，故選(C)

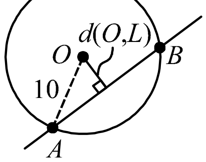
8. 由根與係數關係得 $\begin{cases}\alpha+\beta=-7\\ \alpha\beta=4\end{cases}\Rightarrow\alpha<0$ 、 $\beta<0$
$(\sqrt\alpha+\sqrt\beta)^2=\sqrt\alpha^2+2\sqrt\alpha\sqrt\beta+\sqrt\beta^2=\alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$
$=(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\beta}=-7-2\sqrt4=-11$，故選(A)

9. $3x+4y-25=0$ 之斜率 $m_1=-\dfrac{3}{4}$
令 L 之斜率為 m_L　$\because$ 垂直：$m_L\times m_1=-1$　$\therefore m_L=\dfrac{4}{3}$

又過$(2\,,1)\Rightarrow y-1=\dfrac{4}{3}(x-2)\Rightarrow 3y-3=4x-8$

$\Rightarrow 4x-3y-5=0$，故選(B)

10.



圓心$O(-1\,,2)$到L距離

$d(O\,,L)=\dfrac{|3\times(-1)-4\times 2-14|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{25}{5}=5$，又半徑$r=10$

所求$\overline{AB}=2\sqrt{10^2-5^2}=2\sqrt{75}=10\sqrt{3}$，故選(A)

11. [法一]

$(-1\,,2)$代入$\Rightarrow(-1)^2+2^2+8\times(-1)+6\times 2-9=0$

$\therefore(-1\,,2)$在圓上

由圓上一點求切線公式知：

$(-1)x+2y+4\times(-1)+4x+3\times 2+3y-9=0$

$\Rightarrow 3x+5y-7=0$，故選(A)

[法二]

$(-1\,,2)$代入$\Rightarrow(-1)^2+2^2+8\times(-1)+6\times 2-9=0$

$\therefore(-1\,,2)$在圓上，圓心$(-\dfrac{8}{2},-\dfrac{6}{2})=(-4\,,-3)$

設切線斜率為m，圓心與切點的連線斜率為$m_{\perp}$

$m_{\perp}=\dfrac{2-(-3)}{-1-(-4)}=\dfrac{5}{3}$，$m_{\perp}\cdot m=-1$，$m=-\dfrac{3}{5}$

則$(y-2)=-\dfrac{3}{5}(x+1)\Rightarrow 3x+5y-7=0$，故選(A)

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{9}(2^n-3n+1)=\sum_{n=1}^{9}2^n-\sum_{n=1}^{9}3n+\sum_{n=1}^{9}1$

$=\dfrac{2[1-2^9]}{1-2}-3\times\dfrac{(1+9)\times 9}{2}+1\times 9$

$=1022-135+9=896$，故選(D)

13. $n+1=8$或$(n+1)+8=20\Rightarrow n=7$或$11$

$7+11=18$，故選(C)

14. 先安排兩校誰為 O$\Rightarrow$2 種選擇

O 的 18 個位置排 18 人$\Rightarrow 18!$

X 的 18 個位置排 18 人$\Rightarrow 18!$

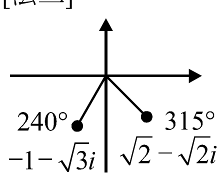
所求$2\times 18!\times 18!$，故選(C)

15. [法一]

$z=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{-1-\sqrt{3}i}\times\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})i}{4}$

$=\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ$，$Arg(z)=75^\circ=\dfrac{5}{12}\pi$，故選(A)

[法二]



$Arg(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)=315^\circ$，$Arg(-1-\sqrt{3}i)=240^\circ$

$Arg(z)=315^\circ-240^\circ=75^\circ=\dfrac{5}{12}\pi$，故選(A)

16. $V=0.836\times 10^{\frac{3}{2}}=8.36\sqrt{10}\ m/s$

單位換算$8.36\sqrt{10}\times\dfrac{60\times 60}{1000}=36\times 0.836\sqrt{10}$

$\approx 95.1\ km/h$ ($\sqrt{10}\approx 3.16$)，故選(A)

17. [法一]

$10^{3\log 2+\log 6}=10^{\log 2^3+\log 6}=10^{\log 8+\log 6}=10^{\log 48}=48$

故選(D)

[法二]

$\because 10^a=2$且$10^b=6$

$\therefore$求式$=(10^a)^3\times 10^b=2^3\times 6=48$，故選(D)

18. 將行列式展開得$-9(x-2)(x-11)=0$，$x=2$或11，所求為$2+11=13$，故選(D)

19. [法一]

右乘反矩陣$\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x & y\\ z & u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 7\\ 22 & 15\end{bmatrix}\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}10 & 7\\ 22 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，$x+y=1+2=3$，故選(A)

[法二]

根據矩陣運算得$\begin{cases}2x+4y=10\cdots① \\ x+3y=7\cdots②\end{cases}$

①－②$\Rightarrow x+y=3$，故選(A)

20. [法一]

$\Delta=\begin{array}{c}(-2)\\(-2)\\ \\ \end{array}\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -7 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=7$

$\Delta z=\begin{array}{c}(-2)\\(-2)\\ \\ \end{array}\begin{vmatrix}2 & 3 & 9\\ 2 & -3 & 13\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & 3\\ 0 & -7 & 7\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-7-(-21)=14$

$z=\dfrac{\Delta z}{\Delta}=\dfrac{14}{7}=2$，故選(B)

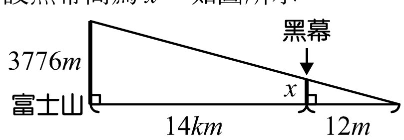
[法二](加減消去法)

$\begin{cases}2x+3y+5z=9\cdots① \\ 2x-3y+4z=13\cdots② \\ x+2y+2z=3\cdots③\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}①+②：4x+9z=22\cdots④ \\ 2\times②+3\times③：x+2z=5\cdots⑤\end{cases}$

④$-4\times$⑤$\Rightarrow z=2$，故選(B)

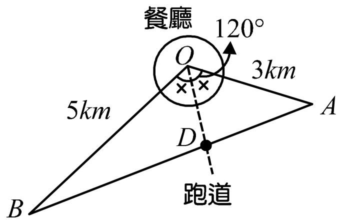
21. 設黑幕高為x，如圖所示



$3776：x=14012：12$，$x=\dfrac{3776\times 12}{14012}\fallingdotseq 3.23$，故選(D)

22. 法向量 $\overrightarrow{n_E} \perp \overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} // \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$
$= (2, -1, -1) \times (1, -3, 2)$
$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix})$
$= (-5, -5, -5) = -5(1, 1, 1)$
令 E：$x + y + z + k = 0$，$A(1, 2, 3)$ 代入 $1 + 2 + 3 + k = 0$
$k = -6 \Rightarrow E$：$x + y + z - 6 = 0$，故選(C)

23.



利用餘弦求 $\overline{AB} \Rightarrow \overline{AB}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120°$
$= 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-\frac{1}{2}) = 49 \Rightarrow \overline{AB} = 7$
又內角平分線 $\overline{OA}$：$\overline{OB} = \overline{DA}$：$\overline{DB} = 3$：$5$
$\overline{DB} = \frac{5}{5+3} \times 7 = \frac{35}{8}$，故選(C)

24. 首年 $a_1 = 40$
次年 $a_2 = 40 \times 1.05$
第三年 $a_3 = 40 \times 1.05^2 \cdots\cdots$
第 n 年 $a_n = 40 \times 1.05^{n-1}$ (單位：萬公噸)爲一等比數列，
根據題意求其前 n 項等比級數
$\frac{40 \times (1 - 1.05^n)}{1 - 1.05} \geq 1000 \Rightarrow \frac{(1.05^n - 1)}{0.05} \geq 25$
$\Rightarrow (1.05^n - 1) \geq 1.25 \Rightarrow 1.05^n \geq 2.25$
$\because 1.05^{16} \approx 2.183 < 2.25 < 2.292 \approx 1.05^{17}$
$\therefore 16 < n < 17$，即所求爲第 17 年，故選(B)

25. $T_a = 0.085\, h_a^{\frac{3}{4}}$、$T_b = 0.070 \times 30^{\frac{3}{4}}$
$\because T_a = \frac{17\sqrt{2}}{7} T_b \Rightarrow 0.085 h_a^{\frac{3}{4}} = \frac{17\sqrt{2}}{7} \times 0.070 \times 30^{\frac{3}{4}}$
$\Rightarrow h_a^{\frac{3}{4}} = \frac{17\sqrt{2}}{7} \times \frac{0.07}{0.085} \times 30^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{2} \times 30^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 30^{\frac{3}{4}}$
$\Rightarrow h_a = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}} \times (30^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}} = 4 \times 30 = 120$，故選(B)