

112 學年度四技二專第四次聯合模擬考試

共同科目 數學(C)卷 詳解

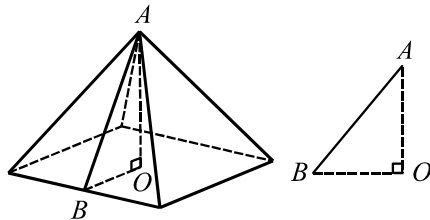
數學(C)卷

112-4-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	B	D	B	A	C	A	B	A	C	D	C	C	B	D	D	A	B	A	C	B	D	D	C

1. $\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} = 2024 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 2023 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 10d + 10d + 10d + \cdots + 10d = 1$
 $\Rightarrow 100d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{100}$
 $\therefore a_{2024} - a_{2023} = d = \frac{1}{100}$ ，故選(A)

2. 由圖可知，設高為 h



$$\frac{AO}{BO} = \frac{6}{5} = \frac{h}{115} \Rightarrow h = 138$$
，故選(C)

3. 設長方形的長為 a ，寬為 b ($a, b > 0$)

則 $4a + 6b = 24 \Rightarrow 2a + 3b = 12$ 且總面積為 $3ab$
 利用算幾不等式

$$\frac{2a + 3b}{2} \geq \sqrt{(2a)(3b)} \Rightarrow 6 \geq \sqrt{6ab} \Rightarrow 36 \geq 6ab$$

$\Rightarrow 3ab \leq 18$ ，故選(B)

4. 依題意可知：中肆獎要有四個中獎號碼外加一個特別號，還有一個是 7 個中獎號碼之外的號碼

$$C_4^6 \cdot C_1^1 \cdot C_1^{49-7} = 15 \times 1 \times 42 = 630$$
，故選(D)

5. 設圓心為 (a, b) ，則圓心到二切線的距離相等

$$\Rightarrow \frac{|a - 2b + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2a - b + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\Rightarrow a - b + 1 = 0 \text{ 或 } a + b - 1 = 0$$

且圓心在 $3x - y - 9 = 0$ 上

$$\begin{cases} a - b + 1 = 0 \\ 3a - b - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 5, b = 6$$

$$\text{或 } \begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ 3a - b - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{2}, b = -\frac{3}{2} \text{ (不合)}$$

$$\text{所以半徑 } r = \frac{|2 \times 5 - 6 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

得圓面積為 $\pi r^2 = 5\pi$ ，故選(B)

6. $\because x - 2$ 為多項式 $f(x)$ 的因式 $\therefore f(2) = 0$

$\therefore$ 以 $x - 1$ 除 $f(x)$ 的商式為 $q(x)$ ，餘式為 3

由除法原理可設 $f(x) = (x - 1)q(x) + 3$

令 $x = 2$ 代入

$$f(2) = (2 - 1)q(2) + 3 = 0 \Rightarrow q(2) = -3$$
，故選(A)

7. 令 $\sin x + \cos x = t$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$)

$$\text{則 } f(x) = g(t) = -t^2 + 4t$$

$$= -(t^2 - 4t + 4) + 4 = -(t - 2)^2 + 4$$

因為 $t = 2$ 不在範圍內

所以當 $t = \sqrt{2}$ 時，有最大值 $4\sqrt{2} - 2$

故選(C)

8. 由題意可知： a, b, c 成等比，所以 $b^2 = ac$

$$\text{又 } f(a) = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pi^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{同理：} b = \pi^{\frac{1}{4}}, \text{ 得 } c = \frac{b^2}{a} = \frac{(\pi^{\frac{1}{4}})^2}{\pi^{\frac{1}{2}}} = 1$$

$$\therefore f(c) = \log_\pi c = \log_\pi 1 = 0$$

故選(A)

$$9. (A) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 8 \\ 4x + 6y = 9 \end{cases} \text{ (不合)} \rightarrow \text{無解}$$

$$(B) \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{5}{2} \rightarrow \text{恰一組解}$$

$$(C) \begin{cases} x + y + z = 3 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x - 2y + z = 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 3x - 7y - z = -9 \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{2} - \textcircled{1}: 2x - 3y = -3 \\ \textcircled{1} + \textcircled{3}: 4x - 6y = -6 \end{cases}$$

$\rightarrow$ 無限多組解

$$(D) \begin{cases} 2x + y + 9z = 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 2y + 8z = 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 4x + 3y + 7z = 0 \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}: x + 10z = 0 \\ \textcircled{1} \times 3 - \textcircled{3}: 2x + 20z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{無限多組解}$$

故選(B)

10. 對稱中心即為反曲點，由題意可知：點 $(1, 0)$ 、 $(4, 0)$ 在活動路線圖形上

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + m + n - 16 = 0 \\ 64 + 16m + 4n - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -9, n = 24$$

$$\text{所以 } y = f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \Rightarrow f''(x) = 6x - 18$$

$$\text{解 } f''(x) = 0 \Rightarrow x = 3 = a$$

$$f(3) = 3^3 - 9 \times 3^2 + 24 \times 3 - 16 = 2 = b$$

$$\therefore a - b = 3 - 2 = 1$$

故選(A)

11. 所求 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 6a + 3b + 2c - 9c - 4b - a = 5a - b - 7c$ 之最大值
利用柯西不等式

$$(a^2 + b^2 + c^2)[(5)^2 + (-1)^2 + (-7)^2] \geq (5a - b - 7c)^2$$

$$\Rightarrow 12 \times 75 \geq (5a - b - 7c)^2$$

$$\Rightarrow -30 < 5a - b - 7c < 30$$

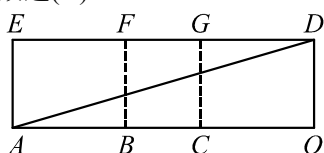
故選(C)

12. 依題意將長方體沿著側面展開

$$\text{最短距離為 } \overline{AD} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OD}^2}$$

$$= \sqrt{(9+6+9)^2 + 7^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$$

故選(D)



13. 設平面方程式之法向量为 $\vec{n}$

則 $\vec{n} \perp (1, 2, -1)$ 且 $\vec{n} \perp (1, -1, 1)$

$$\Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -1) \times (1, -1, 1) = (1, -2, -3)$$

$\therefore$ 設平面方程式為 $x - 2y - 3z = k$

且過 $(1, -2, 1)$, 所以 $1 - 2(-2) - 3 = k \Rightarrow k = 2$

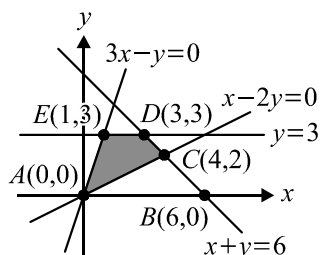
平面方程式為 $x - 2y - 3z = 2 \Rightarrow x - 2y - 3z - 2 = 0$

$\therefore a = -2, b = -3, c = -2 \Rightarrow a - b + c = -1$

故選(C)

14. 將不等式的圖形畫出, 即可知道滿足可行解區域為深色部分, 所以區域面積為梯形 $ABDE$ 面積 - 三角形

$$ABC \text{ 面積} = \frac{(2+6) \times 3}{2} - \frac{6 \times 2}{2} = 6, \text{ 故選(C)}$$



15. 如圖所示, 設 $\overline{BD} = \overline{CD} = x$, 則 $\overline{AD} = 2x$

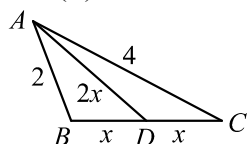
$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \cos C = \frac{(2x)^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 2x}$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中, } \cos C = \frac{x^2 + 4^2 - (2x)^2}{2 \cdot x \cdot 4}$$

$$\text{則 } \frac{4x^2 + 12}{16x} = \frac{-3x^2 + 16}{8x} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BC} = 2x = 2\sqrt{2}$$

故選(B)



16. 所求為挑選方法數 $\times$ 排列方法數

$$(C_3^3 \times C_2^5) \times (2! \times P_3^3) = 120$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 ABC 剩下5人 先排其 ABC 再
 必挑 再挑2人 他2人 插空隙

故選(D)

17. 利用正弦定理可知: $2R = \frac{a}{\sin A}$, 先求出 $\sin A$

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow B + C = 180^\circ - A$$

$$\Rightarrow \sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$\text{得 } \sin A = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

$$\text{則 } R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{22}{2 \times \frac{11}{5\sqrt{5}}} = 5\sqrt{5}$$

$$\text{所以外接圓面積為 } \pi r^2 = \pi (5\sqrt{5})^2 = 125\pi$$

故選(D)

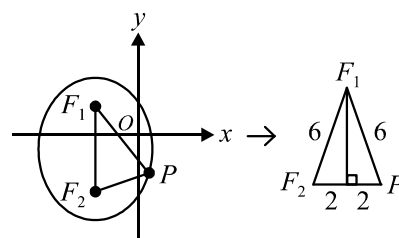
18. 依題意可知: 兩焦點為 $(-3, 2)$ 、 $(-3, -4)$, 兩焦點距離 = 6

$$\text{而 } \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a = 10$$

$$\text{且 } \frac{\overline{PF_1}}{\overline{PF_2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \overline{PF_1} = 6, \overline{PF_2} = 4$$

$$\Delta PF_1F_2 = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{6^2 - 2^2} = 8\sqrt{2}$$

故選(A)



19. (A) $\times$: z_1 的主幅角為 0° , z_2 的主幅角為 180°

$$\Rightarrow \frac{z_2}{z_1} \text{ 的主幅角為 } 180^\circ$$

(B) $\bigcirc$: z_1 的主幅角為 90° , z_2 的主幅角為 180°

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 \text{ 的主幅角為 } 270^\circ$$

(C) $\times$: $z_1 + z_2$ 的長度 $|z_1 + z_2|$ 不會是 1 ($\because z_2 = i$)

(D) $\times$: z_1 的主幅角為 90° , z_1^2 的主幅角為 180°

故選(B)

20. 設河面在 x 軸上, 圓心在 y 軸上, 半徑為 r

$$\Rightarrow \text{圓心坐標為 } (0, 12 - r)$$

$$\text{設圓方程式為 } x^2 + [y - (12 - r)]^2 = r^2$$

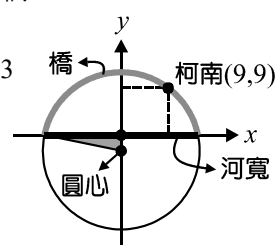
又柯南(9, 9)也在圓弧形的拱橋上

$$\text{得 } 9^2 + (r - 3)^2 = r^2 \Rightarrow r = 15$$

$$\text{圓心與 } x \text{ 軸距離為 } |12 - 15| = 3$$

$$\therefore \text{河寬為 } 2\sqrt{15^2 - 3^2} = 12\sqrt{6}$$

故選(A)



$$21. \text{ 由 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 9} = 1, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = -\frac{3}{2}$$

可知 $ax^2 + bx + c$ 有因式 $x-3$ 、 $x-2$

設 $ax^2 + bx + c = a(x-3)(x-2)$

$$\text{代回得 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x-3)(x-2)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x-2)}{x+3} = \frac{a \times 1}{6} = 1 \Rightarrow a = 6$$

$$\text{故 } ax^2 + bx + c = 6(x-3)(x-2) = 6x^2 - 30x + 36$$

$$\text{得 } a = 6, b = -30, c = 36$$

$$\therefore a + b + c = 6 + (-30) + 36 = 12, \text{ 故選(C)}$$

22. 依導數定義

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)(x+3)} - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)(x+3)(x+1)}$$

$$= \frac{(-1) \times (-3) \times (-4)}{(-2) \times 1 \times 2} = \frac{-12}{-4} = 3$$

故選(B)

23. $f'(x) = -8 - 2x \Rightarrow$ 該切線斜率 $m = f'(-2) = -4$

$$\Rightarrow \text{該切線方程式爲 } 4x + y = 4$$

所求面積爲 $\triangle PQR$ 面積 - 區域 PQO 面積

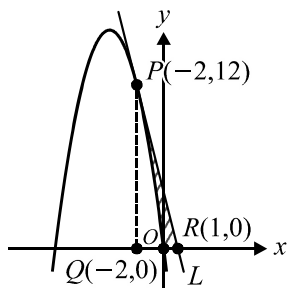
$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \times [1 - (-2)] \times 12 = 18$$

$$\text{區域 } PQO \text{ 面積} = \int_{-2}^0 (-8x - x^2) dx = \left(-4x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-2}^0$$

$$= (0) - [-16 - (-\frac{8}{3})] = \frac{40}{3}$$

$$\therefore \text{所求面積} = 18 - \frac{40}{3} = \frac{14}{3}$$

故選(D)



24. 依題意可設 5 點距離死亡時間爲 t_1 小時，6 點距離死亡時間爲 t_2 小時

$$\Rightarrow \begin{cases} 18 = 9 + (36-9)\left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot t_1} \\ 12 = 9 + (36-9)\left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot t_1} = \frac{9}{27} \dots\dots ① \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot t_2} = \frac{3}{27} \dots\dots ② \end{cases}$$

$$\frac{②}{①} \text{ 可得 } \left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot (t_2 - t_1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot 1} = \frac{3}{9} \Rightarrow k = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3$$

$$\text{得 } 18 = 9 + (36-9)\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3 \cdot t_1} \Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(\log_2 3) \cdot t_1}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = (\log_2 3) \cdot t_1 \Rightarrow \log_2 3 = (\log_2 3) \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 1$$

表示死亡時間爲早上 5 點再往前一小時，就是 4 點，故選(D)

[另解]

由氣溫 9°C ，體溫由 18°C 降至 12°C 經過一小時可知

$$\Rightarrow 12 = 9 + (18-9)\left(\frac{1}{2}\right)^k \Rightarrow k = \log_2 3$$

設 36°C 降至 18°C 經過 t 小時，則

$$\Rightarrow 18 = 9 + (36-9)\left(\frac{1}{2}\right)^{(\log_2 3) \cdot t} \Rightarrow t = 1$$

表示死亡時間爲早上 5 點再往前一小時，就是 4 點，故選(D)

25. 建立直角坐標系如圖，設雙曲線方程式爲 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\because \text{腰部截圓的直徑爲 } 32 \text{ 公尺} \therefore a = 16$$

又點 $(34, -60)$ 亦在圖形上

$$\Rightarrow \frac{34^2}{16^2} - \frac{(-60)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b = 32$$

$$\text{頂部截圓上一點 } (20, y) \Rightarrow \frac{20^2}{16^2} - \frac{y^2}{32^2} = 1 \Rightarrow y = 24$$

所以塔高爲 $60 + 24 = 84$ 公尺，故選(C)

