108 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(B)卷　詳解

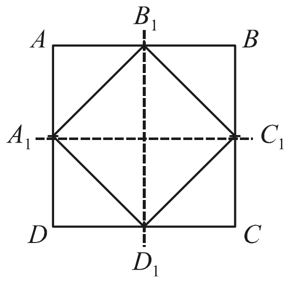
數學(B)卷　108-3-B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	B	B	C	B	D	A	B	A	D	A	A	C	D	C	C	A	C	C	B	C	D	D	D	A

1. ∵坐標平面上 A 、 B 、 C 三點無法形成三角形的三頂點
∴ A 、 B 、 C 三點共線
即 $m_{\overline{AB}}=m_{\overline{AC}}\Rightarrow\dfrac{-3-3}{4-1}=\dfrac{(5k+1)-3}{-3-1}$
$\Rightarrow\dfrac{-6}{3}=\dfrac{5k-2}{-4}\Rightarrow 15k-6=24\Rightarrow 15k=30\Rightarrow k=2$
故選(B)

2. ∵ $\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-3}=\dfrac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$
$=\dfrac{(A+B)x+(-3A+2B)}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{2x-11}{(x+2)(x-3)}$
∴ $\begin{cases}A+B=2\\-3A+2B=-11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\B=-1\end{cases}\Rightarrow A+4B=-1$
故選(B)
[另解]兩邊同乘以 $(x+2)(x-3)$ 去分母得
$2x-11=A(x-3)+B(x+2)$
將 $x=-2$ 代入得 $-15=-5A\Rightarrow A=3$
將 $x=3$ 代入得 $-5=5B\Rightarrow B=-1$
$\Rightarrow A+4B=-1$，故選(B)

3. 連接 $\overline{B_1D_1}$ 、 $\overline{A_1C_1}$



由圖形可知，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 面積為正方形 $ABCD$ 面積的一半(即 $\dfrac{1}{2}$ 倍)，以此類推，所有正方形之面積和為「公比 $=\dfrac{1}{2}$」之無窮等比級數
又∵正方形面積 $=10\times10=100$ (平方公分)
∴這些正方形的面積總和為 $\dfrac{100}{1-\dfrac{1}{2}}=200$ (平方公分)
故選(B)

4. $a=50\times1.2+6=66$ ， $b=10\times1.2=12$ ，故選(C)

5. ∵點 $P(\sin\theta,\tan\theta)$ 在第四象限
∴ $\begin{cases}\sin\theta>0\\\tan\theta<0\end{cases}\Rightarrow\theta$ 為第二象限角
$\Rightarrow\cos\theta<0$ 且 $\csc\theta>0$
即點 $Q(\cos\theta,\csc\theta)$ 在第二象限，故選(B)

6. ∵ $-\sqrt{1^2+2^2}\le\sin x+2\cos x\le\sqrt{1^2+2^2}$
∴ $-\sqrt{5}\le\sin x+2\cos x\le\sqrt{5}$
$\Rightarrow 3-\sqrt{5}\le\sin x+2\cos x+3\le 3+\sqrt{5}$
即 $f(x)$ 的最大值 $M=3+\sqrt{5}$ ，最小值 $m=3-\sqrt{5}$
$\Rightarrow M\times m=(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})=3^2-\sqrt{5}^2=4$
故選(D)

7. ∵有兩相等實根
∴判別式： $(-6)^2-4\times1\times(k+1)=0$
$\Rightarrow 36-4k-4=0\Rightarrow k=8$ ，故選(A)

8. ∵各擲一個公正的骰子一次的情形共有 $6\times6=36$ 種
扣除兩人點數相等的 6 種後剩 30 種
其中兩人分別獲勝的情形各佔一半為 15 種
∴機率為 $\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$ ，故選(B)

9. ∵ α 、 β 為 $3x^2-6x-2=0$ 的兩根
∴ $\alpha+\beta=-\dfrac{-6}{3}=2$ 且 $\alpha\cdot\beta=\dfrac{-2}{3}$
$\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=2^2-2\times(\dfrac{-2}{3})=4+\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{3}$ ，故選(A)

10. ∵至少 2 男 2 女
∴可能為 3 男 2 女或 2 男 3 女
即 $C_3^6\times C_2^4+C_2^6\times C_3^4=20\times6+15\times4=180$
故選(D)

11. ∵平均數 $\overline{X}=159$ 公分且標準差 $S=5$ 公分
∴154 公分 $=\overline{X}-S$ ，164 公分 $=\overline{X}+S$
依常態分配之 68-95-99.7 法則知
介於 154 公分~164 公分之間的人數約佔 68%
即 $60000\times68\%=40800$ 人，故選(A)

12. ∵ $|\overrightarrow{a}|=4$ ， $|\overrightarrow{b}|=6$ ，且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 夾角為 120°
∴ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\times\cos120^\circ=4\times6\times(-\dfrac{1}{2})=-12$
則 $|3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=9\times|\overrightarrow{a}|^2+6\times\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$
$=9\times4^2+6\times(-12)+6^2=108$
得 $|3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$ ，故選(A)

13. 所求 $=$ 任意排 $-$ 「0」排首位數字
$=\dfrac{7!}{3!\,2!}-\dfrac{6!}{2!\,2!}=420-180=240$ ，故選(C)

14. 原式 $=\sqrt[3]{3^2\times\sqrt[4]{3^4\div3^{\frac{6}{2}}}}=\sqrt[3]{3^2\times\sqrt[4]{3^1}}=\sqrt[3]{3^2\times3^{\frac{1}{4}}}$
$=\sqrt[3]{3^{\frac{9}{4}}}=3^{\frac{3}{4}}$ 且 $(\dfrac{1}{27})^x=3^{-3x}$ 得 $\dfrac{3}{4}=-3x\Rightarrow x=-\dfrac{1}{4}$
故選(D)

15.

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

點數和爲質數有：2、3、5、7、11

其機率分別爲 $\frac{1}{36}$ 、$\frac{2}{36}$ 、$\frac{4}{36}$ 、$\frac{6}{36}$ 、$\frac{2}{36}$

$\Rightarrow$ 出現點數和爲質數的機率

$=\frac{1+2+4+6+2}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

則擲一次所得金額的期望值爲

$\frac{5}{12}\times 60+\frac{7}{12}\times(-120)=25-70=-45$ 元，故選(C)

16. $\because \tan\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$

$\therefore \sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{1}{4}$

且 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\times(-\frac{1}{4})=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

但 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ ，得 $\sin\theta<0$ ， $\cos\theta>0$

即 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，故選(C)

17. 先求 $\overline{AB}$ 中點 $M(\frac{-2+1}{2},\frac{1+(-5)}{2})=(\frac{-1}{2},-2)$

且 $m_{\overline{AB}}=\frac{1-(-5)}{-2-1}=\frac{6}{-3}=-2$ ，則 $\overline{AB}$ 中垂線斜率爲 $\frac{1}{2}$

$\overline{AB}$ 中垂線方程式： $y-(-2)=\frac{1}{2}[x-(-\frac{1}{2})]$

$\Rightarrow y+2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\Rightarrow 2x-4y-7=0\Rightarrow x-2y-\frac{7}{2}=0$

得 $a=-2$ ， $b=-\frac{7}{2}\Rightarrow a\times b=7$ ，故選(A)

18. 由柯西不等式知

$[a^2+(2b)^2]\cdot[1^2+(-4)^2]\geq(a-8b)^2$

且 $5\cdot 17\geq(a-8b)^2\Rightarrow(a-8b)^2\leq 85$

$\Rightarrow -\sqrt{85}\leq a-8b\leq\sqrt{85}$

$\therefore a-8b$ 的最大值爲 $\sqrt{85}$ ，故選(C)

19. $\because S_{19}=a_{10}\times 19$

且 $a_{10}=a_{13}+(10-13)\times d=16+(-3)\times(-\frac{4}{3})$

$=16+4=20$

$\therefore S_{19}=20\times 19=380$ ，故選(C)

[另解] $a_{13}=a_1+12d\Rightarrow 16=a_1+12\times(-\frac{4}{3})\Rightarrow a_1=32$

$\therefore S_{19}=\frac{19\times[2\times 32+18\times(-\frac{4}{3})]}{2}=380$ ，故選(C)

20. $\because (5-m)x^2+6x+(m+5)>0$ 恆成立

$\therefore \begin{cases}5-m>0\\ 6^2-4\cdot(5-m)\cdot(m+5)<0\end{cases}$

即 $\begin{cases}m<5\\ 4m^2-64<0\Rightarrow -4<m<4\end{cases}$

$\Rightarrow -4<m<4$ ，故選(B)

21. $\because x^2-3x+1=0$

$\Rightarrow x-3+\frac{1}{x}=0$ ，即 $x+\frac{1}{x}=3$

而 $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\cdot(x+\frac{1}{x})$

$=3^3-3\times 1\times 3=27-9=18$ ，故選(C)

[另解] $\because x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=3^2-2=7$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=3\times(7-1)=18$

故選(C)

22. $\because \log_a x=2$ ， $\log_b x=3$ ， $\log_c x=5$

$\therefore \log_x a=\frac{1}{2}$ ， $\log_x b=\frac{1}{3}$ ， $\log_x c=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \log_x abc=\log_x a+\log_x b+\log_x c=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$

$\therefore \log_{abc} x=\frac{30}{31}$ ，故選(D)

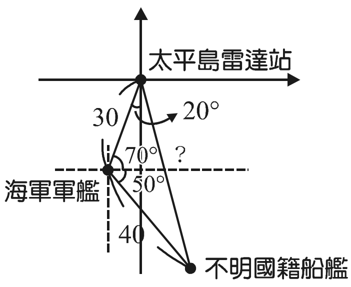
23. $\because$ 1~999 共 999 個數

$\therefore$ 有「8」的數字個數 $=999-$ (沒有「8」的數字個數)

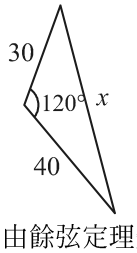
$=999-(\underbrace{9\times 9\times 9}_{0\sim 9\text{共10個，但沒有8}}-\overset{000\text{不合}}{1})$

$=999-728=271$ 個，故選(D)

24. 由題意可畫出如下之圖形



將此圖簡化爲



由餘弦定理知

$x^2=30^2+40^2-2\times 30\times 40\times\cos 120°$

$=900+1600+1200=3700$

得 $x=\sqrt{3700}=10\sqrt{37}$

即不明國籍船艦距離太平島雷達站 $10\sqrt{37}$ 海浬

故選(D)

25. 先分析此單字字母的組成： $s\times 3$ 、 $c\times 2$ 、 $u\times 1$ 、 $e\times 1$

取出 4 個字母與排列情形如下

情形	選法	排法
三同一異	$1\times C_1^3=3$	$\frac{4!}{3!}=4$
二同二同	$C_2^2=1$	$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$
二同二異	$C_1^2C_2^3=6$	$\frac{4!}{2!}=12$
四異	$C_4^4=1$	$4!=24$

得全部的排法有：

$3\times4+1\times6+6\times12+1\times24=12+6+72+24=114$

故選(A)