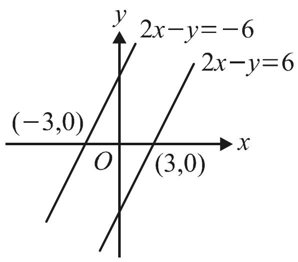
107 學年度四技二專第一次聯合模擬考試
共同科目　數學(B)卷　詳解

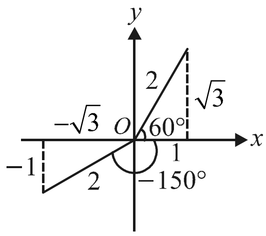
數學(B)卷　　107-1-B

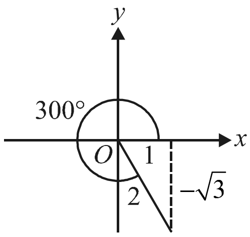
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	C	A	D	C	B	B	A	D	B	B	B	C	B	D	C	A	A	D	A	D	C	B	A	A

1. 若直線通過 $(a,3)$、$(2,b)$ 兩個點
   則直線斜率 $=\dfrac{3-b}{a-2}=1$
   $\Rightarrow a-2=3-b\Rightarrow a+b=3+2=5$
2. 令直線 L 的方程式爲 $y=mx+k$
   其斜率爲 $m=\dfrac{0-4}{3-1}=-2$，代入方程式得 $y=-2x+k$
   將點 $(1,4)$ 代入得 $4=-2+k\Rightarrow k=6$
   所以直線 L 的方程式爲 $y=-2x+6$
3. 若直線 L_1、L_2 互相垂直，則斜率相乘的值爲 -1
   又直線 $x-2y+4=0$ 的斜率爲 $\dfrac{1}{2}$
   且 $y=mx+3$ 的斜率爲 $m\Rightarrow \dfrac{1}{2}\times m=-1\Rightarrow m=-2$
4. 點 $(3,-5)$ 到 L：$4x+3y+c=0$ 的距離爲
   $\dfrac{|4\cdot 3+3\cdot(-5)+c|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4\Rightarrow\dfrac{|-3+c|}{5}=4$
   $\Rightarrow -3+c=\pm 20\Rightarrow c=23$ 或 $c=-17$
   已知 $c>0$，所以 $c=23$
5. 線段 $\overline{AB}$ 的中點爲 D
   $D=\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{(2,1)+(6,3)}{2}=\dfrac{(8,4)}{2}=(4,2)$
   $\overline{CD}=\sqrt{(7-4)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$
6. 若直線 L 的方程式爲 $2x-y=k$
   則 L 分別與 x 軸及 y 軸交於 $(\dfrac{k}{2},0)$ 及 $(0,-k)$
   L 與 x 軸及 y 軸所圍成的直角三角形面積爲
   $\dfrac{1}{2}\cdot|\dfrac{k}{2}|\cdot|-k|=9\Rightarrow|-k^2|=36\Rightarrow k=\pm 6$
   如下圖所示，又因爲 L 不經過第四象限，所以 $k=-6$



7. [法 1]：如下圖所示，標準位置角 60°、−150°、300° 的終邊上點坐標分別爲 $(1,\sqrt{3})$、$(-\sqrt{3},-1)$、$(1,-\sqrt{3})$
   則 $\sin 60^\circ+\cos(-150^\circ)+\sec 300^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2}{1}=2$





   [法 2]：$\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   $\cos(-150^\circ)=\cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)$
   $=-\cos 30^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   $\sec 300^\circ=\sec(360^\circ-60^\circ)=\sec(-60^\circ)=\sec 60^\circ=\dfrac{2}{1}$
   $\therefore$ 原式 $\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}+(\dfrac{-\sqrt{3}}{2})+\dfrac{2}{1}=2$
8. $a=\sin 136^\circ=\sin(180^\circ-136^\circ)=\sin 44^\circ<1$
   $b=\cos 44^\circ=\sin(90^\circ-44^\circ)=\sin 46^\circ<1$
   $c=\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$
   又因爲 $44^\circ<46^\circ$，所以 $\sin 44^\circ<\sin 46^\circ$，故 $a<b<c$
9. 向量 $\overrightarrow{AB}=(a-(-5),8-2)=(a+5,6)$
   向量 $\overrightarrow{CD}=(6-3,b-(-1))=(3,b+1)$
   $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}\Rightarrow(a+5,6)=3\times(3,b+1)$
   $\Rightarrow(a+5,6)=(9,3b+3)$
   解得 $a=4$、$b=1$，因此 $a+b=5$
10. $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$
    $=(-3,-4)+(5,-2)=(2,-6)$
11. 向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積爲 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30^\circ=5\cdot 6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$
12. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(3,-1)\cdot[(-2,4)+(5,2)]$
    $=(3,-1)\cdot(3,6)=3\times 3+(-1)\times 6=3$
13. 因爲 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 垂直，所以 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積爲 0
    $\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,-1)\cdot(k,9)=0\Rightarrow 3k-9=0\Rightarrow k=3$
14. ΔABC 的面積爲 $\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\sin A$
    $=\dfrac{1}{2}6\times 4\sin 120^\circ=3\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$
15. 如下圖所示，樓高爲線段 $\overline{BC}$
    空拍機原本在 A 點
    仰角 $\angle CAB=30^\circ$，$\angle CAD=60^\circ$

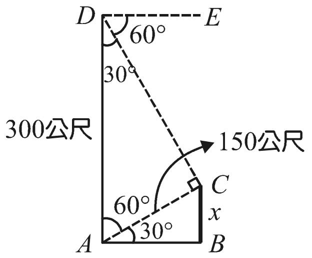
空拍機升空至 D 點且 $\overline{AD}=300$

俯角 $\angle CDE=60°$ ， $\angle CDA=30°$

因為 $\angle DCA=180°-\angle CDA-\angle CAD=90°$

所以 $\overline{AC}=\overline{AD}\cos 60°=300\times\frac{1}{2}=150$

$\overline{BC}=\overline{AC}\sin 30°=150\times\frac{1}{2}=75$



16. 因為 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$

左右平方得 $\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$

又 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

$\Rightarrow \sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

因為 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ，所以 $\sin\theta>0$ 、 $\cos\theta>0$

故 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

17. 將原式 $\frac{2\cos\theta+3\sin\theta}{4\sin\theta-\cos\theta}$ 上下同除以 $\cos\theta$ 得

$\frac{2+3\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{4\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}=\frac{2+3\tan\theta}{4\tan\theta-1}=\frac{2+3x}{4x-1}=\frac{19}{7}$

$\Rightarrow 14+21x=76x-19\Rightarrow 55x=33\Rightarrow x=\frac{3}{5}$

18. 已知 $90°<\theta<180°$ ，若 $\sin\theta=\frac{4}{5}$

則 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$

利用二倍角公式

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{4}{5}\cdot(-\frac{3}{5})=-\frac{24}{25}$

19. 令 $\overline{AB}=c=6$ 、 $\overline{AC}=b=4$ 、 $\overline{BC}=a$

利用餘弦定理公式

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cos 60°$

$\Rightarrow a^2=16+36-24=28\Rightarrow a=\pm\sqrt{28}=\pm 2\sqrt{7}$ (負不合)

20. 假設標準位置角 θ 的終邊上一點坐標為 (x,y) ，且到原點的距離為 $r=\sqrt{x^2+y^2}$

因為 $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{3}{4}$ 、 $\cos\theta=\frac{x}{r}<0$ ，所以 $x<0$ 、 $y<0$

假設 $x=-4$ ，則 $y=-3$ ， $r=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

所以 $\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{-3}$

21. 已知 $0<\alpha,\beta<90°$ ，若 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ 且 $\cos\beta=\frac{3}{5}$

則 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{12}{13}$ 且 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{4}{5}$

利用三角函數的差角公式

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}-\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{15-48}{65}=\frac{-33}{65}$

22. 利用正弦定理公式

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{BC}}{\sin A}\Rightarrow\frac{\overline{AC}}{\sin 60°}=\frac{6}{\sin 45°}$

$\Rightarrow\overline{AC}\sin 45°=6\sin 60°\Rightarrow\overline{AC}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\overline{AC}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{3}\Rightarrow\overline{AC}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=6\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{6}$

23. 如右圖所示，若點 C 的坐標在第三象限且在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上

又 $\overline{AB}$：$\overline{AC}=1$：2

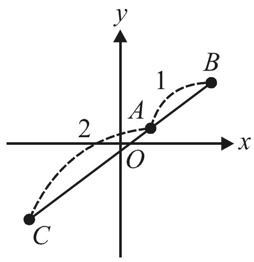
則 A 為 B 、 C 的內分點

利用分點公式， $A=\frac{C+2B}{3}$

$\Rightarrow 3A=C+2B\Rightarrow C=3A-2B$

$\Rightarrow(x,y)=(6,3)-(12,8)$

$=(-6,-5)\Rightarrow x+y=-11$



24. $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2a\cdot b+|\vec{b}|^2$

$\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=4^2-2\cdot(-10)+5^2=16+20+25=61$

$\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{61}$

25. [法 1]：根據廣義角三角函數的化簡公式

$\sin(90°+\theta)=\cos\theta=\frac{4}{5}$ ， $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\csc(270°+\theta)=-\sec\theta=-\frac{5}{4}$

$\frac{\sin(90°+\theta)-\cos(180°-\theta)}{\csc(270°+\theta)}=\frac{\frac{4}{5}-(-\frac{4}{5})}{-\frac{5}{4}}=\frac{\frac{8}{5}}{-\frac{5}{4}}$

$=\frac{8}{5}\times(-\frac{4}{5})=-\frac{32}{25}$

[法 2]：如下圖所示，假設標準位置角 θ 、 $90°+\theta$ 、 $180°-\theta$ 、 $270°+\theta$ 的終邊上坐標分別為 A 、 B 、 C 、 D 且至原點的距離皆為 5 單位，則 $A(4,3)$ 、 $B(-3,4)$ 、 $C(-4,3)$ 、 $D(3,-4)$

所以 $\dfrac{\sin(90^\circ+\theta)-\cos(180^\circ-\theta)}{\csc(270^\circ+\theta)}=\dfrac{\frac{4}{5}-(-\frac{4}{5})}{-\frac{5}{4}}=\dfrac{\frac{8}{5}}{-\frac{5}{4}}$

$=\dfrac{8}{5}\times(-\dfrac{4}{5})=-\dfrac{32}{25}$